

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ**

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Специальность 010801 (013800) - “Радиофизика и электроника”

ВОРОНЕЖ
2006

Утверждено научно-методическим советом физического факультета
26.12.2005 протокол № 10

Составитель

Парфенов В.И.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре радиофизики
физического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 2 курса дневного отделения и студентов 4
курса вечернего отделения специальности 010801 (013800) - Радиофизика
и электроника

1. АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Цепью называют совокупность радиотехнических элементов, соединенных проводами и электромагнитными полями. В данной работе рассматриваются цепи, состоящие из дискретных элементов: резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности. Такие цепи являются реальными частями большинства радиоустройств. Кроме того, подобные цепи используют как приближенные модели при исследовании ряда сложных элементов и систем.

Подаваемые на цепь, существующие в ней и выводимые из цепи токи, напряжения и электромагнитные колебания (радиоволны) обобщенно называют *сигналами*.

С помощью цепей создают, усиливают и преобразуют разнообразные сигналы, которые используют в качестве носителей информации и управляющих воздействий.

Простейшими элементами цепей являются *двухполюсники*, которые имеют только две внешние клеммы (полюса). Двухполюсники бывают *активными* и *пассивными*.

Активные двухполюсники содержат источники энергии, которую они вносят в цепь. На схемах активные двухполюсники изображают в виде *генератора напряжения* или *генератора тока*. Простейший генератор напряжения содержит последовательно соединенные идеальный источник электродвижущей силы (ЭДС) и выходное сопротивление (обычно малой величины). Простейший генератор тока содержит параллельно соединенные идеальный источник тока и выходное сопротивление (обычно большой величины).

Пассивные двухполюсники либо потребляют энергию, подводимую к цепи, либо на некоторое время запасают ее малые количества, а затем отдают эти запасы в цепь. Первые из них называют *резистивными*, это – резистор с сопротивлением R (Ом), диод и др. Вторые называют *реактивными* – это конденсатор с емкостью C (Фарада) и катушка с индуктивностью L (Генри).

Пассивные двухполюсники делят на *линейные* и *нелинейные*. У *линейных* двухполюсников связь между напряжением на них и протекающим током задается линейной функцией. У таких двухполюсников величины их параметров не зависят от протекающих токов и напряжений на двухполюснике. Если параметры независимо изменяют во времени по некоторому закону, то такие линейные двухполюсники называют *параметрическими*. У *нелинейных* двухполюсников величины их параметров зависят от протекающего тока или падения напряжения и поэтому связь между током и напряжением у таких двухполюсников задается нелинейными функциями.

Цепи, составленные из двухполюсников, также могут быть линейными, нелинейными, параметрическими, пассивными, активными. Важным свойством линейных цепей является подчинение их *принципу суперпозиции*, который заключается в том, что отклик цепи на сумму нескольких входных воздействий равен сумме откликов на каждое из них. К нелинейным цепям принцип суперпозиции неприменим.

Существуют две основные задачи, которые приходится решать при использовании и проектировании цепей – это задача *анализа* цепи и задача *синтеза* цепи.

Анализом заданной цепи называют нахождение ее выходного сигнала $u(t)$ при известном входном сигнале $x(t)$.

Синтезом цепи называют нахождение ее структуры и параметров, при которых заданный входной сигнал $x(t)$ преобразуется в требуемый выходной сигнал $u(t)$.

Разработаны *символические* методы исследования цепей. Они основаны на замене реальных вещественных сигналов некоторыми математическими символами (в том числе и невещественными) и на использовании правил нахождения реакции цепей на такие символические сигналы. Примером служит *комплексный* метод, оперирующий комплексными сигналами (см. ниже).

Рассмотрим связь между током и напряжением для элементов цепи в интегро-дифференциальной временной форме.

Для резистора:

$$u(t) = R i(t), \quad i(t) = u(t) / R = G u(t), \quad (1.1)$$

где $G = 1 / R$ – проводимость (Сименс).

Для конденсатора:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0), \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}, \quad (1.2)$$

где $q(t)$ – заряд (Кулон).

Для катушки индуктивности:

$$u(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}, \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0), \quad (1.3)$$

где Φ – магнитный поток (Вебер). В выражениях (1.2) и (1.3) учтены начальные условия, то есть напряжение на емкости и ток через индуктивность на момент времени $t = 0$, начиная с которого ведется наблюдение процессов в данных элементах.

Использование выражений (1.2), (1.3) иногда приводит к некоторым вычислительным трудностям. Поэтому, если токи и напряжения в цепи являются гармоническими (синусоидальными), то целесообразно использовать символический метод анализа цепи, основанный на представлении сигналов в комплексной форме. Сущность комплексного метода исследования цепей заключается в том, что, используя комплексное представление синусоидальных сигналов и правила действия

с комплексными сигналами, с помощью простых алгебраических операций находят реакцию цепи на реальные синусоидальные воздействия любой частоты.

Из курса математики известно определение комплексного числа $Z = a + jb$ (где $j = \sqrt{-1}$). Разработан аппарат операций над комплексными числами и функциями (сложение, умножение и т. д.). Найдена связь комплексного числа с показательной и тригонометрическими функциями (формула Эйлера): $a + jb = M \exp(j\varphi) = M(\cos\varphi + j \sin \varphi)$, $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль, а $\varphi = \arctg(b/a)$ – аргумент комплексного числа. Из последней записи видно, что $a = \operatorname{Re}[Z] = M \cos \varphi$, $b = \operatorname{Im}[Z] = M \sin \varphi$. Поэтому комплексную функцию $X(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + j A_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A_m \exp(j(\omega_0 t + \varphi_0)) = A_m \exp(j\varphi_0) \exp(j\omega_0 t) = A_m \exp(j\omega_0 t)$, (где $A_m = A_m \exp(j\varphi_0)$ – комплексное число) называют *комплексным представлением* вещественной синусоидальной функции $x(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Re}[X(t)]$ или *комплексным сигналом* $X(t)$. При этом комплексное число A_m называют *комплексной амплитудой* вещественной сигнальной функции $x(t)$. Далее для упрощения записи аргумент t у комплексных сигналов будем пускать, полагая $X(t) = X$.

Известно также векторное представление комплексного числа на комплексной плоскости, показанное на рис. 1.1.

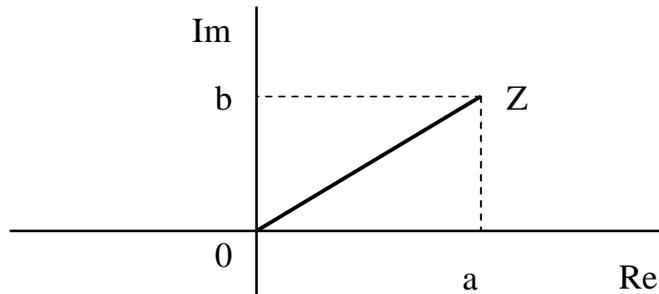


Рис. 1.1

Оно задается вектором длины M , начало которого совпадает с началом координат (точкой 0), а конец – с точкой Z , имеющей координаты a и b . При этом угол между названным вектором и вещественной осью равен φ . Аналогично, комплексную функцию $X = A_m \exp(j\varphi_0) \exp(j\omega_0 t) = A_m \exp(j\omega_0 t)$ на той же плоскости представляют вектором, который в момент времени $t = 0$ совпадает с вектором комплексной амплитуды (комплексным числом) $A_m \exp(j\varphi_0)$ и который вращается вокруг точки 0 против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 . Проекция такого вращающегося вектора на вещественную ось и является вещественной синусоидальной функцией $x(t)$. Поэтому данный вектор называют *векторным представлением* вещественной синусоидальной функции $x(t)$.

Запишем выражения, связывающие синусоидальные токи и напряжения для элементов R , C и L , в комплексной форме с учетом

формул (1.1)-(1.3) и правил дифференцирования и интегрирования комплексных сигналов и считая начальные условия нулевыми.

Пусть нам задан гармонический ток

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I) = \operatorname{Re}[I] = \operatorname{Re}[I_m \exp(j\varphi_I) \exp(j\omega t)] = \operatorname{Re}[I_m \exp(j\omega t)],$$

втекающий в рассматриваемый элемент. Здесь $I_m = I_m \exp(j\varphi_I)$ – комплексная амплитуда тока. Тогда для резистора из (1.1) получаем:

$$U_m = R I_m . \quad (1.4)$$

Для конденсатора из (1.2) записываем:

$$U_m = \frac{1}{j\omega C} I_m . \quad (1.5)$$

Для катушки индуктивности из (1.3) получаем:

$$U_m = j\omega L I_m . \quad (1.6)$$

В (1.4)-(1.6) U_m - комплексная амплитуда напряжения на соответствующем элементе. В результате выражения для напряжений, как функций времени, примут простой вид. Действительно, для резистора с учетом (1.4) имеем

$$u(t) = \operatorname{Re}[U_m \exp(j\omega t)] = \operatorname{Re}[R I_m \exp(j\omega t)] = R I_m \cos(\omega t + \varphi_I). \quad (1.7)$$

Для конденсатора с учетом (1.5) получаем

$$u(t) = \operatorname{Re}[U_m \exp(j\omega t)] = \operatorname{Re}[I_m \exp(j\omega t) / j\omega C] = I_m \cos(\omega t + \varphi_I - \pi/2) / \omega C. \quad (1.8)$$

Наконец, для катушки индуктивности с учетом (1.6) находим

$$u(t) = \operatorname{Re}[U_m \exp(j\omega t)] = \operatorname{Re}[I_m \exp(j\omega t) j\omega L] = I_m \omega L \cos(\omega t + \varphi_I + \pi/2). \quad (1.9)$$

Видно, что конечная связь между реальными сигналами $i(t)$ и $u(t)$ для всех элементов одинакова как при оперировании с вещественными сигналами, так и при оперировании с комплексными сигналами. Однако если пользоваться комплексными амплитудами, то связь имеет более простую, алгебраическую форму, задаваемую выражениями (1.4)-(1.6), которые в литературе иногда называют законами Ома в комплексной форме. При этом появляется понятие *комплексного сопротивления*. Для резистора оно остается вещественным и равным R , а для емкостей и индуктивностей – является чисто мнимым, равным числам $1/j\omega C = -j/\omega C$ и $j\omega L$ соответственно. Для последовательного соединения резистора и индуктивности, например, имеем комплексное сопротивление $Z = R + j\omega L$.

Отсюда следует, что для линейных цепей все связи между входными и выходными сигналами можно записать не только в виде интегро-дифференциальных уравнений, но и в более простой комплексной форме.

Целью выполнения лабораторной работы является изучение характеристик простейших линейных радиотехнических цепей с постоянными параметрами. Исследования проводятся на ЭВМ с помощью программы схемотехнического моделирования *Micro Cap V*, версия 6 (сокращенно *Micro Cap*).

ЗАДАНИЯ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАНИЕ 1. Идеализированный резистивный элемент при гармоническом воздействии

Рассмотреть электрические процессы, которые возникают в цепи, состоящей из идеализированного резистора R , подключенного к источнику гармонического напряжения $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$. Теоретически, используя символический комплексный метод, рассчитать:

- амплитуду тока, протекающего через резистор;
- сдвиг фаз между током и напряжением на резистивном элементе;
- значение тока в момент времени $t=1$ [мсек];
- период мгновенной мощности резистивного элемента.

Проверить все расчеты экспериментально, используя программу Micro Cap.

Построить векторную диаграмму цепи с идеализированным резистивным элементом.

При расчетах принять: $U_m = 1$ [В], $\varphi_U = \pi/3$ [рад], $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ [рад/сек], $R=n$ [КОм], где n – номер Вашего варианта, задаваемый преподавателем.

ЗАДАНИЕ 2. Идеализированный емкостной элемент при гармоническом воздействии

Рассмотреть электрические процессы, которые возникают в цепи, состоящей из идеализированного емкостного элемента (конденсатора) C , подключенного к источнику гармонического напряжения $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$. Теоретически, используя символический комплексный метод, рассчитать:

- амплитуду тока, протекающего через конденсатор;
- определить сдвиг фаз между током и напряжением на емкостном элементе;
- период мгновенной мощности емкостного элемента, максимальное значение мгновенной мощности, а также первый момент его достижения.

Проверить все расчеты экспериментально, используя программу Micro Cap.

Построить векторную диаграмму цепи с идеализированным емкостным элементом.

При расчетах принять: $U_m = 1$ [В], $\varphi_U = \pi/3$ [рад], $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ [рад/сек], $C=n$ [нФ], где n – номер Вашего варианта.

ЗАДАНИЕ 3. Идеализированный индуктивный элемент при гармоническом воздействии

Рассмотреть электромагнитные процессы, которые возникают в цепи, состоящей из идеализированного индуктивного элемента (катушки

индуктивности) L , подключенного к источнику гармонического тока $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I)$. Теоретически, используя символический комплексный метод, рассчитать:

- амплитуду напряжения на индуктивном элементе;
- сдвиг фаз между током и напряжением на индуктивном элементе;
- период мгновенной мощности индуктивного элемента, максимальное значение мгновенной мощности, а также первый момент его достижения.

Проверить все расчеты экспериментально, используя программу Micro Cap.

Построить векторную диаграмму цепи с идеализированным индуктивным элементом.

При расчетах принять: $I_m = 1$ [А], $\varphi_I = \pi/3$ [рад], $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ [рад/сек], $L = n$ [мкГн], где n – номер Вашего варианта.

ЗАДАНИЕ 4. Последовательное соединение R - и C -элементов

Рассмотреть электрические процессы, которые возникают в цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора R и емкости C , подключенных к источнику гармонического напряжения $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$. Теоретически, используя символический комплексный метод, рассчитать:

- амплитуду и начальную фазу тока в цепи;
- сдвиг фаз между током и входным напряжением;
- амплитуды напряжения на резистивном и емкостном элементах.

Проверить все расчеты экспериментально, используя программу Micro Cap.

Построить векторную диаграмму цепи с резистивным и емкостным элементами.

При расчетах принять: $U_m = 1$ [В], $\varphi_U = \pi/3$ [рад], $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ [рад/сек], $R = n$ [КОм], $C = n$ [нФ], где n – номер Вашего варианта.

ЗАДАНИЕ 5. Последовательное соединение R - и L -элементов

Рассмотреть электромагнитные процессы, которые возникают в цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора R и катушки индуктивности L , подключенных к источнику гармонического напряжения $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$. Теоретически, используя символический комплексный метод, рассчитать:

- амплитуду и начальную фазу тока в цепи;
- сдвиг фаз между током и входным напряжением;
- амплитуды напряжения на резистивном и индуктивном элементах.

Проверить все расчеты экспериментально, используя программу Micro Cap.

Построить векторную диаграмму цепи с резистивным и индуктивным элементами.

При расчетах принять: $U_m = 1$ [В], $\varphi_U = \pi/3$ [рад], $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ [рад/сек], $R=n$ [КОм], $L=n$ [мГн], где n – номер Вашего варианта.

ЗАДАНИЕ 6. Последовательное соединение R -, C - и L -элементов

Рассмотреть электромагнитные процессы, которые возникают в цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора R , конденсатора C и катушки индуктивности L , подключенных к источнику гармонического напряжения $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$. Теоретически, используя символический комплексный метод, рассчитать:

- амплитуду и начальную фазу тока в цепи;
- сдвиг фаз между током и входным напряжением;
- амплитуды напряжения на резистивном, емкостном и индуктивном элементах.

Проверить все расчеты экспериментально, используя программу Micro Cap.

Построить векторную диаграмму цепи с резистивным, емкостным и индуктивным элементами.

При расчетах принять: $U_m = 1$ [В], $\varphi_U = \pi/3$ [рад], $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ [рад/сек], $R=n$ [КОм], $C=n$ [нФ], $L=n$ [мГн] где n – номер Вашего варианта.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ 1-3

Учитывая однотипность заданий 1-3, рассмотрим порядок их выполнения на одном примере, а именно, на примере задания 2. Рассмотрим цепь, приведенную на рис.1.2.

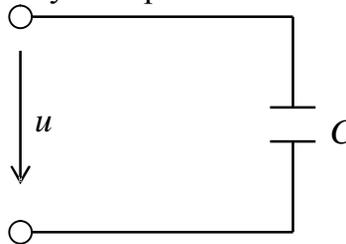


Рис.1.2

Для определенности положим: $U_m = 1$ [В], $\varphi_U = \pi/3$ [рад], $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ [рад/сек], $C=1.5$ [нФ]. Далее в соответствии с (1.5) записываем соотношение между комплексными амплитудами тока I_m в этой цепи и входного напряжения U_m :

$I_m = U_m j\omega C = \omega C |U_m| \exp[j(\varphi_U + \pi/2)] = |I_m| \exp[j\varphi_I]$, учитывая что $j = \exp(j\pi/2)$. Таким образом, амплитуда тока $|I_m| = \omega C |U_m|$, а начальная

фаза тока $\arg(\mathbf{I}_m) = \varphi_I = \varphi_U + \pi/2$, т.е. ток опережает напряжение на $\pi/2$.
 Численное значение амплитуды тока равно $|\mathbf{I}_m| = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^{-9} = 9.425$ [мкА].

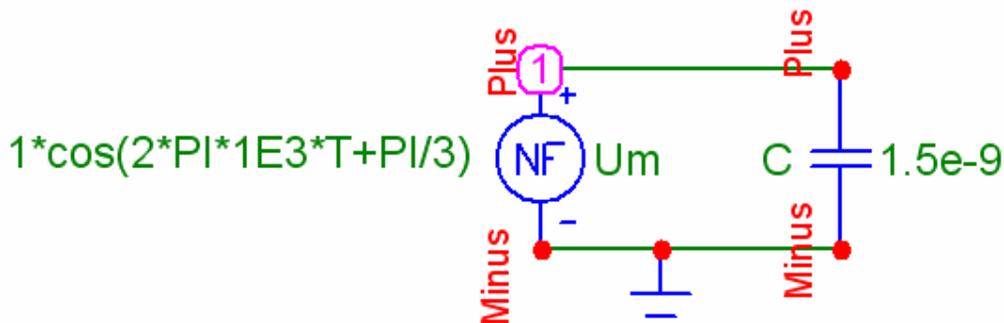
Вычислим теперь мгновенную мощность, как $P(t) = i(t) \cdot u(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{I}_m \exp[j(\omega t + \varphi_I)]\} \cdot \operatorname{Re}\{\mathbf{U}_m \exp[j(\omega t + \varphi_U)]\}$. Учитывая полученные ранее соотношения между амплитудами и начальными фазами тока и напряжения, запишем окончательное выражение для мгновенной мощности как

$$P(t) = |\mathbf{I}_m| |\mathbf{U}_m| \cos(\omega t + \varphi_U) \cos(\omega t + \varphi_U + \pi/2) = -\frac{\omega C}{2} |\mathbf{U}_m|^2 \sin[2(\omega t + \varphi_U)].$$

Таким образом, мгновенная мощность емкостного элемента является периодической функцией времени с периодом, равным $T_p = 2\pi/2\omega = \pi/\omega$.

Максимальное значение, равное $\max(T_p) = \frac{\omega C}{2} |\mathbf{U}_m|^2$, период достигает в моменты времени t_k , удовлетворяющие условию $2(\omega t_k + \varphi_U) = 3\pi/2 \pm \pi k$, где k – любое целое неотрицательное число. Следовательно, первый момент достижения мощностью своего максимального значения равен $t_0 = (3\pi/4 - \varphi_U)/\omega$. Численные значения искомых параметров равны:
 $T_p = \pi/2\pi \cdot 10^3 = 0.5$ [мсек], $\max(T_p) = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^{-9} / 2 = 4.71$ [мкВт],
 $t_0 = (3\pi/4 - \pi/3) / 2\pi \cdot 10^3 = 0.208$ [мсек].

Рассмотрим теперь выполнение задания 2 с использованием программы Micro Cap (МС6). В окне редактирования с использованием средств пакета МС6 нарисовать следующую схему:

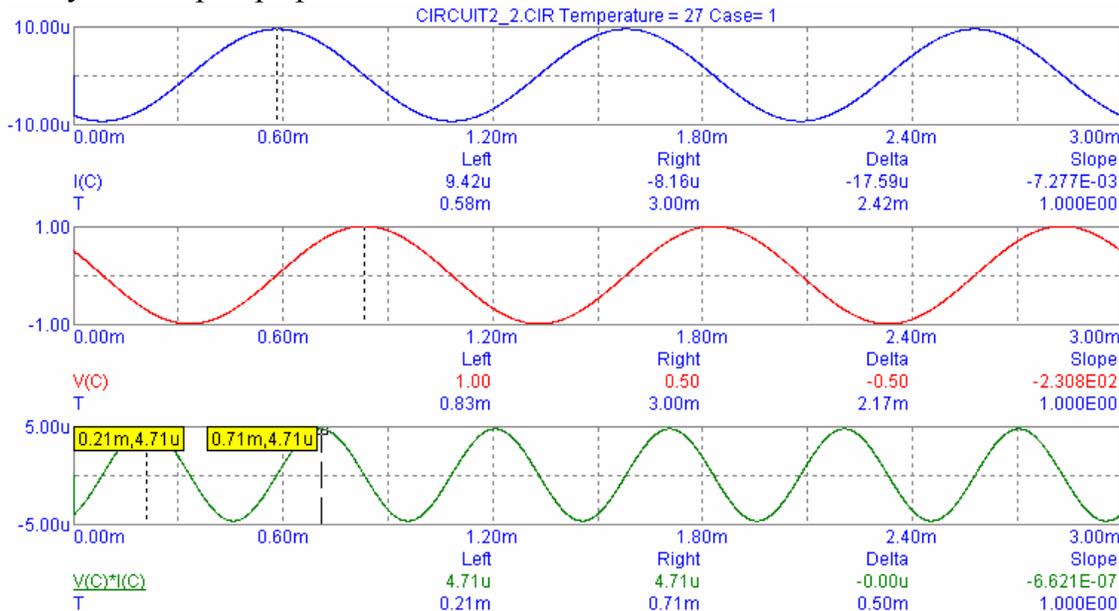


Здесь в качестве источника напряжения использован так называемый функциональный источник (Function Source). Вывод такого источника на экран осуществляется путем последовательного вызова пунктов меню: Component-Analog Primitives- Function Sources-NFV. Затем при определении характеристик источника в окне Value набрать требуемую зависимость напряжения от времени. В данной задаче источник напряжения должен вырабатывать сигнал вида $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$, где $U_m = 1$ [В], $\varphi_U = \pi/3$ [рад], $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ [рад/сек]. Исследуемые характеристики вывести на экран дисплея в режиме *Transient*. В этом режиме на экран следует вывести следующие зависимости: 1) тока в цепи

от времени $i(t)$, 2) входного напряжения от времени $u(t)$, 3) мгновенной мощности от времени $i(t)u(t)$. С этой целью установить масштабы выводимых кривых по осям X и Y , как показано ниже:

P	XExpression	YExpression	XRange	YRange
1	T	I(C)	5m,0	1e-5,-1e-5
2	T	V(C)	5m,0	1,-1
3	T	V(C)*I(C)	5m,0	5e-6,-5e-6

Для более точного представления исследуемых характеристик целесообразно выбрать в меню Transient следующее: Maximum Time Step = 1E-6. В результате вычислений на экране компьютера будут выведены следующие три графика:



По первому графику производим измерения амплитуды тока $i(t)$. Для этого целесообразно использовать пиктограмму Peak. При этом под анализируемым графиком в столбце Left выводятся значения величины и положения максимального значения тока. Видим, что амплитуда тока равна 9.42 [мксек], что совпадает с теоретическим расчетом. Разность фаз между током и напряжением определим из первого и второго графиков, измерив разность временных положений первых максимумов напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$: $(0.83-0.58)[\text{мсек}]$. Для того чтобы перевести эту временную разность в разность фаз, необходимо ее умножить на циклическую частоту этих колебаний ω (учитывая, что частоты напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ одинаковы). В результате получаем, что разность фаз равна $\varphi_I - \varphi_U = 0.25 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 10^3 = \pi/2$. Итак, как и в теории, эксперимент показывает, что ток опережает напряжение на $\pi/2$.

Из третьего графика мощности легко определяем остальные необходимые параметры. Так, используя пиктограмму Peak для левой и правой клавиш мыши, определяем положения двух соседних максимумов мощности. Под третьим графиком в столбце Delta приводится разность

между самими значениями и их положениями на оси времени для отмеченных двух позиций. В нашем случае эта разность, которая и является с искомым периодом мощности, равна 0.5[мсек], что совпадает с теорией. Максимальное значение и положение этого максимального значения мощности находим, как и ранее, в столбце Left под графиком. Видим, что максимальное значение мощности равно 4.71 [мкВт], а положение первого максимума мощности равно 0.21 [мсек], что подтверждает полученные ранее теоретические результаты.

Векторная диаграмма цепи с идеализированным емкостным элементом будет выглядеть следующим образом (объяснить самостоятельно):

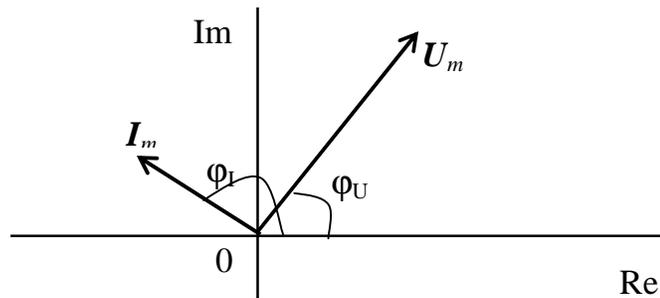


Рис.1.3

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ 4-6

Учитывая однотипность заданий 4-6, рассмотрим порядок их выполнения на одном примере, а именно, на примере задания 5. Рассмотрим цепь, приведенную на рис.1.4.

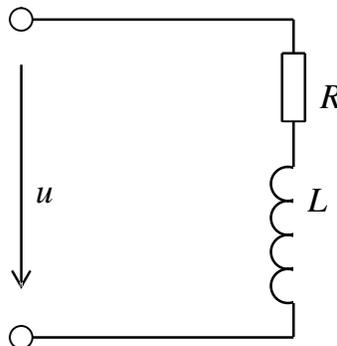


Рис.1.4

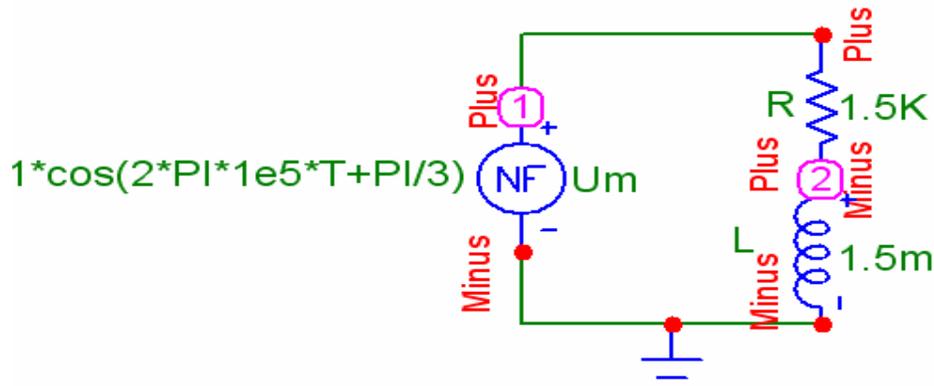
Для определенности положим: $U_m = 1$ [В], $\varphi_U = \pi/3$ [рад], $\omega = 2\pi \cdot 10^5$ [рад/сек], $L = 1.5$ [мГн]. Далее в соответствии с (1.4) и (1.6) записываем соотношение между комплексными амплитудами тока I_m в этой цепи и входного напряжения U_m :

$$I_m = \frac{U_m}{(R + j\omega L)} = |I_m| \exp[j\varphi_I] = U_m \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} =$$

$$= \frac{|U_m|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \exp \left[j \left(\varphi_U - \arctg \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right) \right]. \quad (1.10)$$

Таким образом, амплитуда тока $|I_m| = |U_m| / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, а начальная фаза тока $\arg(I_m) = \varphi_I = \varphi_U - \arctg(\omega L / R)$, т.е. напряжение опережает ток на $\arctg(\omega L / R)$. Численное значение амплитуды тока равно $|I_m| = 1 / \sqrt{(1.5 \cdot 10^3)^2 + (2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3})^2} = 5.645 \cdot 10^{-4} \text{ [A]}$. Начальная фаза тока равна $\varphi_I = \pi / 3 - \arctg(2\pi \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} / 1.5 \cdot 10^3) = 0.486 \text{ [рад]}$. Сдвиг фаз между напряжением и током составляет $\varphi_U - \varphi_I = \arctg(2\pi \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} / 1.5 \cdot 10^3) = 0.561 \text{ [рад]}$. Зная выражение для комплексной амплитуды тока (1.10) нетрудно найти и амплитуды напряжения на резистивном и индуктивном элементах: $|U_{mR}| = |I_m| R$, $|U_{mL}| = |I_m| \omega L$. Численные значения этих амплитуд равны $|U_{mR}| = 5.645 \cdot 10^{-4} \cdot 1.5 \cdot 10^3 = 0.846 \text{ [В]}$, $|U_{mL}| = 5.645 \cdot 10^{-4} \cdot 2\pi \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} = 0.532 \text{ [В]}$.

Рассмотрим теперь выполнение задания 5 с использованием программы Micro Cap (МС6). В окне редактирования с использованием средств пакета МС6 нарисовать следующую схему:

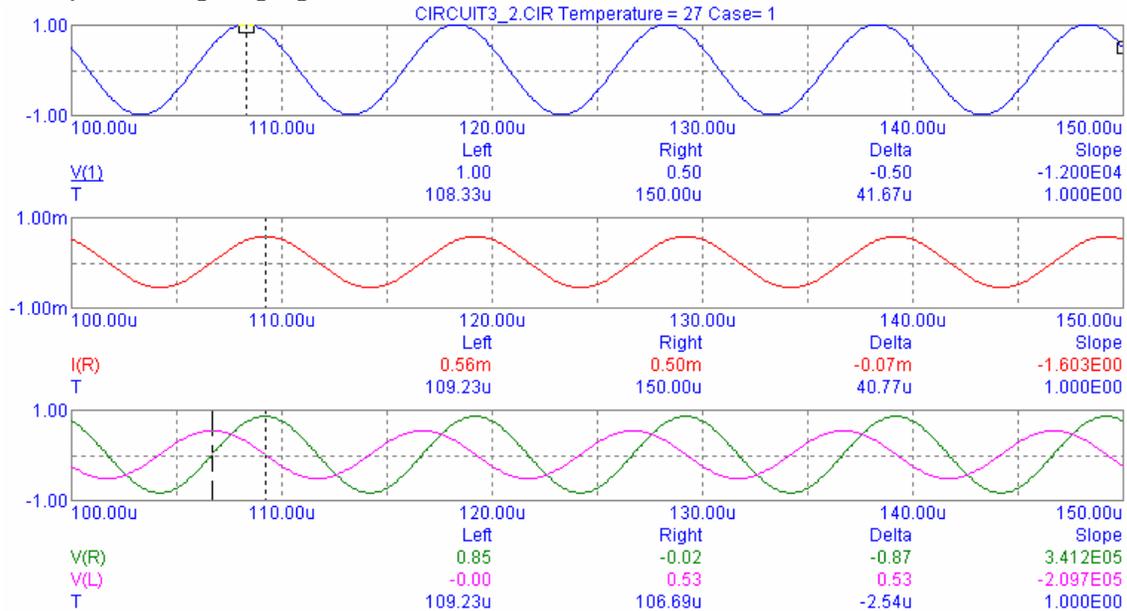


В режиме *Transient* на экран следует вывести следующие зависимости: 1) входного напряжения от времени, 2) тока в цепи от времени $i(t)$, 3) напряжения на резистивном и индуктивном элементах от времени. С этой целью установить масштабы выводимых кривых по осям X и Y, как показано ниже:

P	XExpression	YExpression	XRange	YRange
1	T	V(1)	150u,100u	1,-1
2	T	I(R)	150u,100u	1e-3,-1e-3
3	T	V(R)	150u,100u	1,-1
3	T	V(L)	150u,100u	1,-1

Для более точного представления исследуемых характеристик целесообразно выбрать в меню *Transient* следующее: Maximum Time Step =

1E-8. В результате вычислений на экране компьютера будут выведены следующие три графика:

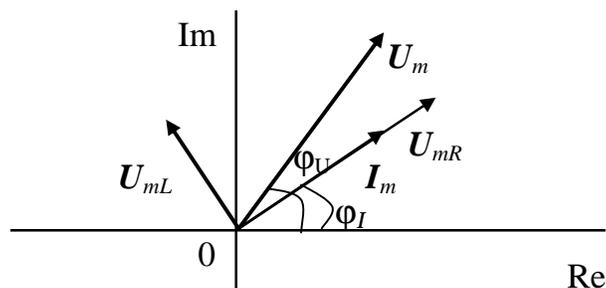


Из второго графика, пользуясь пиктограммой Peak, определяем амплитуду тока в цепи : $|I_m| = 0.56$ [мА], что согласуется с теоретическим результатом. Начальную фазу тока также определяем по второму графику. Очевидно, что начальная фаза будет определяться как произведение временной разности между положениями максимума сигнала и ближайшей точкой, кратной 0, умноженной на частоту колебания: $\varphi_I = (110 - 109.23) \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 10^5 = 0.483$ [рад]. Этот результат также совпадает с теоретическим. Сдвиг фаз между входным напряжением и током можно определить по первому и второму графику аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении задания 2. Действительно, определяя разность положений ближайших максимумов тока и напряжения и умножая результат на частоту этих колебаний (а они имеют одинаковую частоту), находим:

$$\varphi_U - \varphi_I = (109.23 - 108.33) \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 10^5 = 0.565 \text{ [рад]},$$

что также совпадает с теорией. Амплитуды напряжений на резистивном и индуктивном элементах находим из третьего графика, пользуясь пиктограммой Peak. В результате имеем $|U_{mR}| = 0.85$ [В], $|U_{mL}| = 0.53$ [В], что также согласуется с теорией.

Векторная диаграмма для рассматриваемой цепи, очевидно, будет выглядеть следующим образом (объяснить самостоятельно):



2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В теории электрических цепей сложной цепью принято считать цепь, направления токов во всех ветвях которой нельзя определить заранее без предварительного анализа и расчета цепи. Существуют различные методы анализа таких цепей. Рассмотрим некоторые из них. В дальнейшем будем рассматривать только цепи однофазного синусоидального тока.

Основной метод анализа таких цепей заключается в непосредственном использовании законов Кирхгофа. Его можно применять для анализа любых электрических цепей. Вначале целесообразно перейти к схеме замещения анализируемой цепи, заменив в исходной цепи пассивные элементы (резистор, конденсатор, катушка индуктивности) на эквивалентные им комплексные сопротивления. Так, комплексное сопротивление резистора $Z_R = R$, комплексное сопротивление емкостного элемента $Z_C = 1/j\omega C$, комплексное сопротивление индуктивного элемента равно $Z_L = j\omega L$. Задающие напряжения источников напряжения и токи источников тока также целесообразно заменить на соответствующие им комплексные амплитуды. Далее находим все p ветвей и q узлов цепи. Выбираем условно положительные направления токов во всех p ветвях и условно положительные направления обхода в контурах. Затем в соответствии с первым законом Кирхгофа составляем $q-1$ независимых уравнений для любых $q-1$ узлов и $p-q+1$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа для $p-q+1$ независимых контуров. В результате имеем $q-1+p-q+1 = p$ уравнений на p неизвестных комплексных амплитуд токов ветвей. Решив эту систему уравнений, найдем комплексные амплитуды токов всех ветвей. Комплексные амплитуды напряжений ветвей можно найти, используя обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащего пассивный элемент и источник э.д.с. Рассмотренный метод расчета электрических цепей неудобен, если в ней имеется большое число узлов и контуров, поскольку требуется решать много уравнений. В таких случаях целесообразнее применять методы контурных токов или узловых напряжений, позволяющие значительно сократить число решаемых уравнений.

Метод *контурных токов* (КТ) основан на введении понятия контурного тока – фиктивного тока, который «течет» в независимом контуре. Если найти все контурные токи, то токи всех ветвей будут определяться автоматически через них. Число контурных токов равно числу независимых контуров в цепи, т.е. равно $p-q+1$. Процедура нахождения контурных токов можно разбить на ряд этапов. Вначале составляют схему замещения путем замены каждого пассивного элемента

на соответствующее ему комплексное сопротивление. Затем строят ориентированный граф такой цепи и выбирают дерево цепи (произвольным образом). Далее, по выбранному дереву определяют $p-q+1$ главных контуров и вводят такое же количество контурных токов в этих контурах. Причем направление контурного тока в главном контуре выбирается согласно направлению тока в главной ветви соответствующего контура. Далее составляется матричное уравнение вида

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{U}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdot & z_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица комплексных сопротивлений

размером $n \times n$, $n=p-q+1$; $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ \dots \\ I_{nn} \end{pmatrix}$ - вектор-столбец искомым комплексных

амплитуд контурных токов размером $n \times 1$; $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \dots \\ E_{nn} \end{pmatrix}$ - вектор-столбец

комплексных амплитуд контурных э.д.с. размером $n \times 1$. Диагональные элементы матрицы \mathbf{Z} - z_{kk} ($k = \overline{1, n}$) представляют собой собственные сопротивления контуров, каждое из которых равно сумме комплексных сопротивлений, входящих в этот контур. Недиagonальные элементы $z_{km} = z_{mk}$ матрицы \mathbf{Z} - это взаимные сопротивления k -го и m -го контуров, равные сопротивлению смежной ветви между двумя рассматриваемыми контурами. Причем, если направления контурных токов обоих контуров вдоль этой ветви согласны, то это сопротивление берется со знаком плюс, а если встречны, то со знаком минус. Элементами матрицы \mathbf{U} являются контурные э.д.с. E_{kk} соответствующих контуров ($k = \overline{1, n}$), равные сумме э.д.с. источников напряжения, входящих в k -ый контур. Причем в этой сумме слагаемые берутся со знаком плюс, если направление контурного тока и направление э.д.с. совпадают и берутся со знаком минус в противном случае. Решив систему уравнений (2.1) любым из известных методов, определим $p-q+1$ комплексных амплитуд контурных токов. Комплексные амплитуды токов остальных ветвей находятся с использованием первого закона Кирхгофа, а комплексные амплитуды напряжений ветвей определяются с помощью обобщенного закона Ома для участка цепи, содержащего пассивный элемент и источник э.д.с.

Все изложенное выше справедливо для цепей, не содержащих ветвей с источниками тока. Если же цепь содержит $p_{\dot{E}0}$ ветвей с источниками тока, то количество неизвестных контурных токов уменьшится до $p-q+1-p_{\dot{E}0}$, если выбрать дерево графа цепи таким образом, чтобы ветви с источниками токов вошли в состав главных ветвей. При этом, очевидно, контурные токи таких $p_{\dot{E}0}$ главных контуров становятся известными (совпадают с задающими токами источников токов). Следовательно, уравнения необходимо составлять только для контуров с неизвестными контурными токами, т.е. число уравнений уменьшается до $p-q+1-p_{\dot{E}0}$. Для того чтобы можно было представить уравнения в матричной форме аналогично (2.1), необходимо перенести из левой части системы уравнений в правую слагаемые, зависящие от $p_{\dot{E}0}$ известных контурных токов. В остальном процедура расчета останется прежней.

Рассмотрим теперь другой, также весьма распространенный, метод анализа линейных электрических цепей – метод *узловых напряжений* (УН). Преимуществом этого метода по сравнению с методом контурных токов является отсутствие необходимости построения графа цепи и выбора дерева цепи. Метод узловых напряжений основан на том, что напряжение любой ветви может быть найдено как разность потенциалов узлов этой ветви. В соответствии с этим методом необходимо выбрать $q-1$ узел схемы (один оставшийся обычно является «земляным» узлом) и записать матричное уравнение вида

$$\mathbf{YV} = \mathbf{J}. \quad (2.2)$$

В (2.2) обозначено $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1k} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{k1} & Y_{k2} & \cdot & Y_{kk} \end{pmatrix}$ - матрица проводимостей

размером $k \times k$, $k=q-1$. Диагональные элементы Y_{mm} этой матрицы (собственные проводимости m -го узла) представляют собой сумму проводимостей ветвей, сходящихся в узле m ($m = \overline{1, k}$); элементы $Y_{ml} = Y_{lm}$ (взаимные проводимости) определяются как сумма проводимостей ветвей, непосредственно соединяющих узлы m и l , взятые со знаком минус.

Вектор $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ \dots \\ U_{k0} \end{pmatrix}$ - вектор-столбец узловых напряжений (U_{m0} - разность потенциалов (точнее, комплексная амплитуда) между m -ым и нулевым

потенциалов (точнее, комплексная амплитуда) между m -ым и нулевым

узлами) размером $k \times 1$. Вектор $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_k \end{pmatrix}$ - вектор-столбец узловых токов.

Причем J_m равен сумме комплексных амплитуд токов ветвей, подходящих к m -му узлу, и содержащих источники э.д.с. и (или) тока. Если комплексная амплитуда э.д.с. E_n n -ой ветви направлена к узлу m , то ее вклад в формирование J_m равен $E_n Y_n$, если же эта э.д.с. направлена от этого узла, то ее вклад составляет $-E_n Y_n$. Если к m -му узлу подтекает ток от источника тока, то он должен быть введен в J_m со знаком плюс, если этот ток от источника тока утекает, то он должен входить в J_m со знаком минус.

После решения системы (2.2) относительно комплексных амплитуд напряжений U_{m0} ($m = \overline{1, k} = q - 1$) напряжения остальных ветвей находятся очевидным образом через разность найденных ранее узловых напряжений, например, $U_{mn} = U_{m0} - U_{n0}$, а комплексные амплитуды токов ветвей определяются с помощью обобщенного закона Ома для участка цепи, содержащего пассивный элемент и источник э.д.с. Отметим, что здесь рассматривался вариант цепи, в которой отсутствовали ветви, содержащие только источники э.д.с. При наличии же таких ветвей требуется либо преобразовать цепь специальным образом, либо изменить определенным образом количество уравнений в системе (2.2). В данной работе подобные цепи не рассматриваются, поэтому подробный анализ применения метода узловых напряжений к таким цепям здесь приводить не будем. Следует также отметить, что методы контурных токов и узловых напряжений имеют свои ограничения (см., например, [2]).

Таким образом, целью данной работы является анализ линейных электрических цепей синусоидального тока методами контурных токов и узловых напряжений. Для проверки расчетов теоретический анализ цепей сопровождается также экспериментальным анализом этих цепей с использованием пакета схемотехнического моделирования Micro Cap VI.

ЗАДАНИЯ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

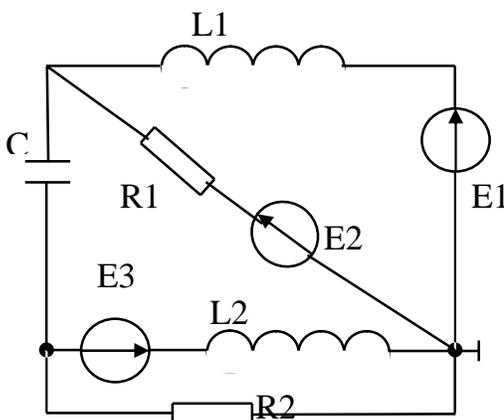
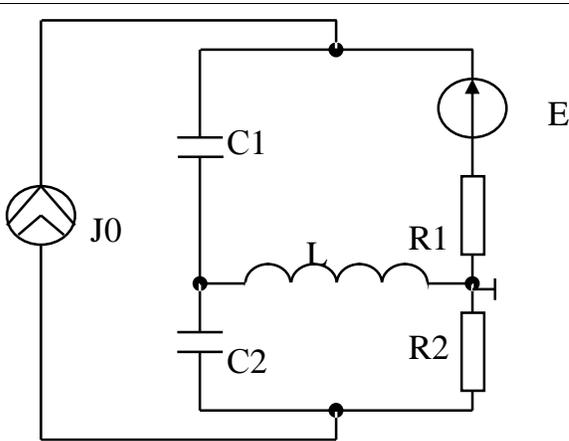
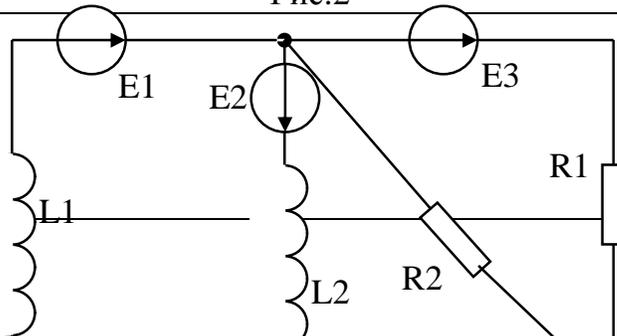
Проанализировать заданную электрическую цепь одним из рассмотренных выше методов (контурных токов или узловых напряжений). Проверить теоретические расчеты экспериментально, используя пакет схемотехнического моделирования Micro Cap VI. Вид электрической цепи и метод расчета выбрать в соответствии с номером Вашего варианта из Таб.1 и Таб.2.

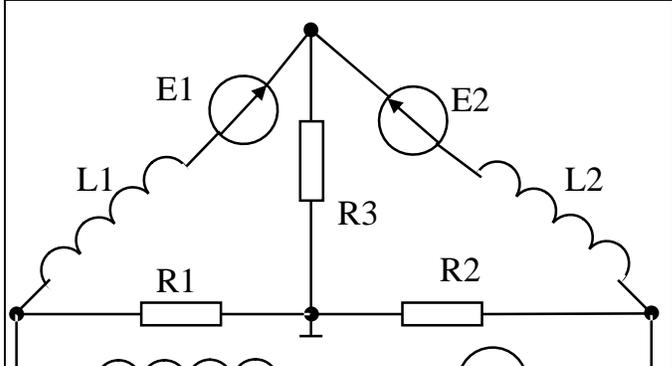
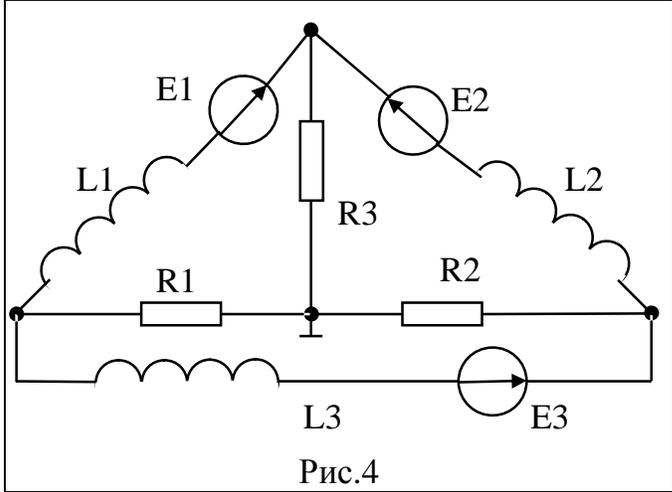
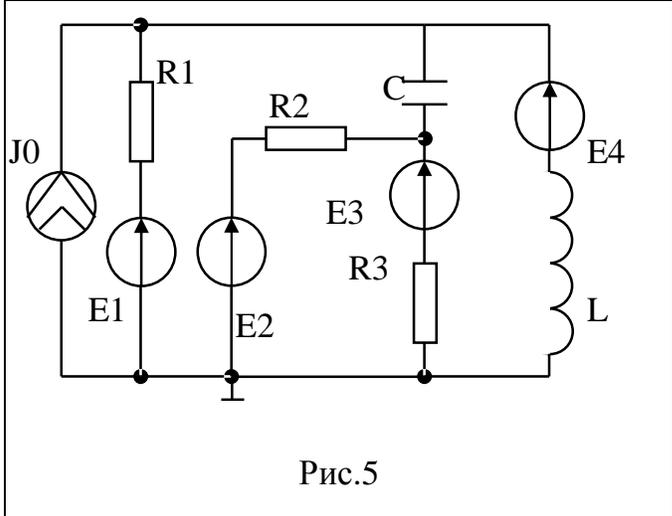
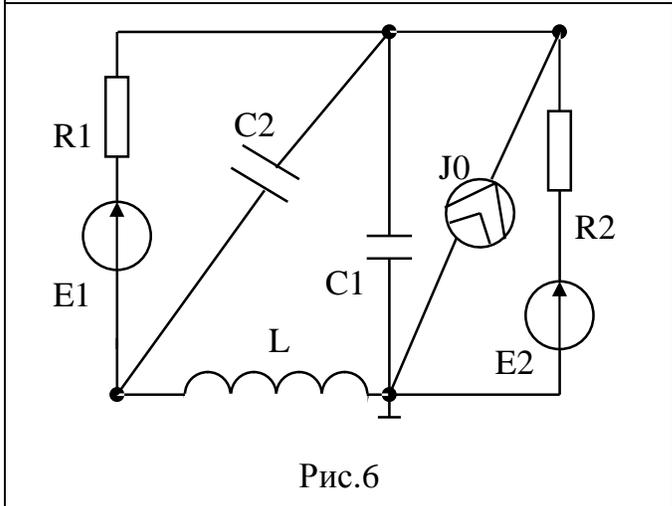
Таб.1

Номер варианта	Электрическая цепь	Метод расчета
1	Рис.1	КТ

2	Рис.1	УН
3	Рис.2	КТ
4	Рис.2	УН
5	Рис.3	КТ
6	Рис.3	УН
7	Рис.4	КТ
8	Рис.4	УН
9	Рис.5	КТ
10	Рис.5	УН
11	Рис.6	КТ
12	Рис.6	УН

Таб.2

Вид цепи	Параметры цепи
 <p>Рис.1</p>	$L1=1.2$ [мГн] $R1=9.5$ [кОм] $L2=2.2$ [мГн] $C=2$ [нФ] $R2=12$ [кОм] $E1(t) = 1.15 \cos(\omega t + \pi/5)$ [В] $E2(t) = 2.2 \cos(\omega t - \pi/4)$ [В] $E3(t) = 0.9 \cos(\omega t - \pi/3)$ [В] $\omega = 2\pi 10^4$ [рад/сек]
 <p>Рис.2</p>	$C1=1.5$ [нФ] $R1=3.5$ [кОм] $L=1$ [мГн] $C2=4$ [нФ] $R2=6$ [кОм] $E(t) = 2.1 \cos(\omega t + \pi/3)$ [В] $J0(t) = 2 \cdot 10^{-3} \cos(\omega t - \pi/4)$ [А] $\omega = 2\pi 10^4$ [рад/сек]
	$L1=2$ [мГн] $L2=1.3$ [мГн] $R1=10$ [кОм] $C=1.5$ [нФ]

<p style="text-align: center;">Рис.3</p> 	<p style="text-align: center;"> $R2=13$ [КоМ] $E1(t) = 3\cos(\omega t + \pi/2)$ [В] $E2(t) = 2.4\cos(\omega t - \pi/2)$ [В] $E3(t) = 2.8\cos(\omega t + \pi/8)$ [В] $\omega = 2\pi 10^4$ [рад/сек] </p>
<p style="text-align: center;">Рис.4</p> 	<p style="text-align: center;"> $L1=5$ [мГн] $L2=4$ [мГн] $L3=3$ [мГн] $R1=12$ [КОМ] $R2=13$ [КОМ] $R3=15$ [КОМ] $E1(t) = 2\cos(\omega t)$ [В] $E2(t) = \cos(\omega t + \pi/3)$ [В] $E3(t) = 1.5\cos(\omega t - \pi/4)$ [В] $\omega = 2\pi 10^4$ [рад/сек] </p>
<p style="text-align: center;">Рис.5</p> 	<p style="text-align: center;"> $R1=12$ [КОМ] $R2=15$ [КОМ] $R3=18$ [КОМ] $L=2$ [мГн] $C=1.4$ [нФ] $E1(t) = 2.3\cos(\omega t + \pi/7)$ [В] $E2(t) = 3.1\cos(\omega t - \pi/6)$ [В] $E3(t) = 1.5\cos(\omega t - \pi/2)$ [В] $E4(t) = 1.8\cos(\omega t + \pi/3)$ [В] $J0(t) = 3\cos(\omega t)$ [мА] $\omega = 2\pi 10^4$ [рад/сек] </p>
<p style="text-align: center;">Рис.6</p> 	<p style="text-align: center;"> $R1=15$ [КОМ] $R2=8$ [КОМ] $C1=2$ [нФ] $C2=1.2$ [нФ] $L=2.3$ [мГн] $E1(t) = 2.1\cos(\omega t + 2\pi/3)$ [В] $E2(t) = 2.5\cos(\omega t - 2\pi/3)$ [В] $J0(t) = 1.1\cos(\omega t + \pi/4)$ [мА] $\omega = 2\pi 10^4$ [рад/сек] </p>

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Рассмотрим, каким образом может быть выполнен анализ приведенной на рис.2.1 цепи с использованием как метода контурных токов (КТ), так и метода узловых напряжений (УН). Анализируемая цепь имеет вид

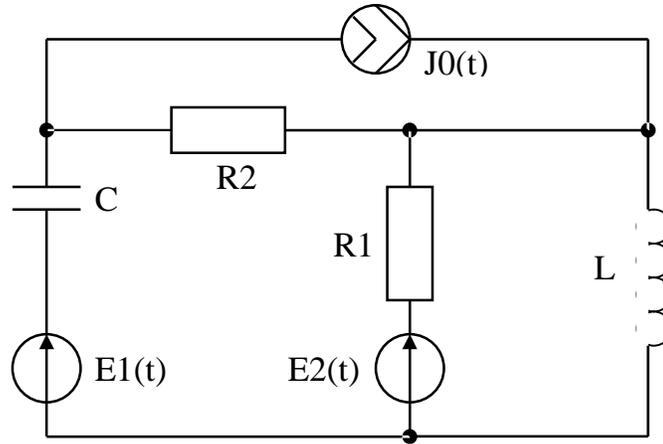


Рис.2.1

Параметры цепи заданы следующим образом: $C=1$ [нФ], $R1=15$ [КОм], $R2=10$ [КОм], $L=1$ [мГн], $J0(t) = 10^{-3} \cos(\omega t + \pi/4)$ [А], $E1(t) = 1.3 \cos(\omega t + \pi/6)$ [В], $E2(t) = 2 \cos(\omega t + 2\pi/3)$ [В]. Частота гармонических напряжений и токов в цепи равна 10 [КГц].

Вначале рассчитаем эту цепь с использованием метода контурных токов (КТ). Рисуем схему замещения такой цепи, заменяя в исходной цепи пассивные элементы цепи соответствующими им комплексными сопротивлениями, а источники энергии соответствующими источниками, описываемыми только их комплексными амплитудами. В результате схема замещения заданной цепи примет вид (рис.2.2):

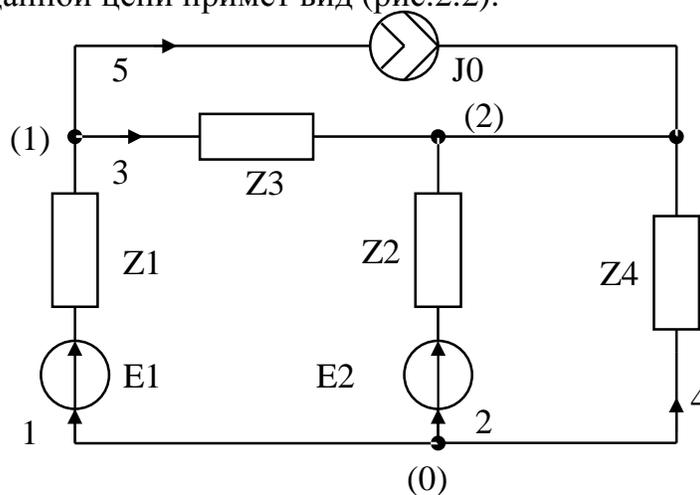


Рис.2.2

Здесь обозначено: $Z1 = 1/j\omega C$ - комплексное сопротивление конденсатора, $Z2 = R1$ - комплексное сопротивление резистора $R1$, $Z3 = R2$ - комплексное сопротивление резистора $R2$, $Z4 = j\omega L$ - комплексное

сопротивление катушки индуктивности, $E1 = 1.3 \exp(j\pi/6)$ - комплексная амплитуда источника э.д.с. $E1(t)$, $E2 = 2 \exp(j2\pi/3)$ - комплексная амплитуда источника э.д.с. $E2(t)$, $J0 = 10^{-3} \exp(j\pi/4)$ - комплексная амплитуда источника тока $J0(t)$. Кроме того, в схеме замещения цифрами в скобках обозначены номера узлов, а цифрами без скобок – номера ветвей. Таким образом, данная цепь содержит $p=5$ ветвей, $q=3$ узла и $p_{\dot{e}\dot{o}}=1$ ветвь, содержащую источник тока. Следовательно, в соответствии с методом контурных токов число составляемых уравнений должно быть равно $p - q + 1 - p_{\dot{e}\dot{o}} = 2$. Выберем дерево цепи таким образом, как это показано на рис.2.3 сплошными линиями:

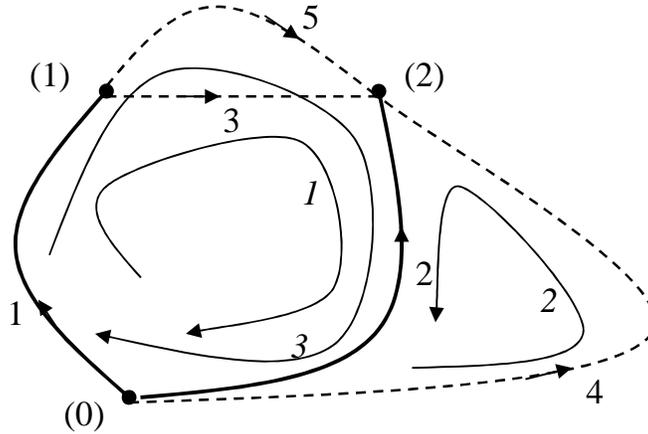


Рис.2.3

На этом рисунке также показаны три главных контура (номера контуров выделены курсивом), каждому из которых соответствует свой контурный ток. Направление обхода в каждом из контуров выбрано в соответствии с направлением тока в главной ветви контура.

Учтем теперь, что контурный ток I_{33} в третьем главном контуре известен (он совпадает с током главной ветви – ветви 5) и равен $J0$. Следовательно, система будет состоять из двух уравнений вида

$$\begin{cases} z_{11}I_{11} + z_{12}I_{22} + z_{13}I_{33} = E_{11} \\ z_{12}I_{11} + z_{22}I_{22} + z_{23}I_{33} = E_{22} \end{cases}$$

Здесь $z_{11} = Z1 + Z2 + Z3$, $z_{12} = Z2$, $z_{13} = Z1 + Z2$, $z_{22} = Z2 + Z4$, $z_{23} = Z2$, $E_{11} = E1 - E2$, $E_{22} = -E2$, $I_{11} = I_3$, $I_{22} = I_4$, $I_{33} = J0$. Кроме того, I_3 и I_4 - комплексные амплитуды токов в третьей и четвертой ветвях цепи соответственно. Перенесем третьи слагаемые в системе уравнений в правую часть, учитывая то, что они полностью известны. Тогда полученная система уравнений может быть записана в матричной форме аналогично (2.1), где

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} E_{11} - z_{13}J0 \\ E_{22} - z_{23}J0 \end{pmatrix}, \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Решив данную систему уравнений и найдя комплексные амплитуды токов I_3 и I_4 , с помощью первого закона Кирхгофа определяем комплексные

амплитуды токов оставшихся ветвей $I_1 = I_3 + J0$, $I_2 = -I_1 - I_4$. Кроме того, очевидно, что $I_5 = J0$. Комплексные амплитуды напряжений всех ветвей могут быть найдены, если использовать обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащего пассивный элемент и источник э.д.с. В результате имеем: $U_{10} = -I_1 Z1 + E1$, $U_{20} = -I_2 Z2 + E2 = -I_4 Z4$, $U_{12} = U_{10} - U_{20} = I_3 Z3$. Таким образом, получены все формулы, определяющие комплексные амплитуды токов и напряжений всех ветвей данной цепи.

Решение системы уравнений вида (2.1), (2.2) будем искать с помощью встроенной функции `Isolve` пакета `Mathcad`. Задаем вначале параметры цепи, изображенной на рис.2.2:

$$\begin{aligned} j &:= \sqrt{-1} & \omega &:= 2 \cdot \pi \cdot 10^4 & \text{ORIGIN} &\equiv 1 \\ E1 &:= 1.3 \cdot \exp\left(j \cdot \frac{\pi}{6}\right) & E2 &:= 2 \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & J0 &:= 10^{-3} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{\pi}{4}\right) \\ Z1 &:= \frac{10^9}{\omega \cdot j} & Z2 &:= 15 \cdot 10^3 & Z3 &:= 10^4 & Z4 &:= \omega \cdot j \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Далее с учетом вышеизложенного вводим значения матриц, входящих в уравнение (2.1):

$$\begin{aligned} z11 &:= Z1 + Z2 + Z3 & z12 &:= Z2 & z22 &:= Z2 + Z4 & z13 &:= Z1 + Z2 \\ z23 &:= Z2 & E11 &:= E1 - E2 & E22 &:= -E2 \end{aligned}$$

Сами матрицы примут вид

$$Z := \begin{pmatrix} z11 & z12 \\ z12 & z22 \end{pmatrix} \quad u := \begin{pmatrix} E11 - z13 \cdot J0 \\ E22 - z23 \cdot J0 \end{pmatrix}$$

Применяя функцию `Isolve`, находим решение системы уравнений (2.1), представленной в матричной форме, как

$$\Pi := \text{Isolve}(Z, u) \quad \Pi = \begin{pmatrix} -8.222 \times 10^{-4} - 1.17i \times 10^{-4} \\ 1.788 \times 10^{-4} - 7.063i \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Таким образом, комплексные амплитуды контурных токов в первом и втором главных контурах принимают вид

$$\Pi1 := \Pi_1 \quad \Pi2 := \Pi_2$$

Комплексные амплитуды токов всех ветвей с учетом ранее приведенных выражений запишутся как

$$I_3 := \Pi1 \quad I_4 := \Pi2 \quad I_5 := J0 \quad I_1 := I_3 + J0 \quad I_2 := -I_1 - I_4$$

Комплексные амплитуды напряжений соответствующих ветвей определяются из следующих соотношений:

$$U_{10} := -I_1 \cdot Z1 + E1 \quad U_{20} := -I_2 \cdot Z2 + E2 \quad U_{12} := U_{10} - U_{20}$$

Вычисляя модуль и аргумент комплексных амплитуд токов, получаем

$$\begin{aligned}
 |I_1| &= 6.012 \times 10^{-4} & \arg(I_1) &= 1.763 \\
 |I_2| &= 1.325 \times 10^{-4} & \arg(I_2) &= 2.072 \\
 |I_3| &= 8.304 \times 10^{-4} & \arg(I_3) &= -3 \\
 |I_4| &= 7.286 \times 10^{-4} & \arg(I_4) &= -1.323 \\
 |I_5| &= 1 \times 10^{-3} & \arg(I_5) &= 0.785
 \end{aligned}$$

Аналогично получаем амплитуды и начальные фазы напряжений ветвей цепи:

$$\begin{aligned}
 |U_{10}| &= 8.35 & \arg(U_{10}) &= -3 \\
 |U_{20}| &= 0.046 & \arg(U_{20}) &= -2.894 \\
 |U_{12}| &= 8.304 & \arg(U_{12}) &= -3
 \end{aligned}$$

Перейдем теперь к анализу цепи, изображенной на рис.2.1, с использованием метода узловых напряжений. Как и ранее воспользуемся схемой замещения такой цепи (см. рис.2.2). Построение графа и дерева цепи в этом случае не требуется. В соответствии с методом узловых напряжений необходимо составить и решить систему уравнений типа (2.2). Количество уравнений в этой системе определяется равенством $q-1$ и, очевидно, для рассматриваемой цепи, равно 2. Найдем элементы матриц, входящих в систему (2.2). Очевидно, $Y_{11} = Y_1 + Y_3$, $Y_{12} = -Y_3$, $Y_{22} = Y_2 + Y_3 + Y_4$. Здесь проводимость $Y_1 = 1/Z_1$ и т.д. Элементы вектора-столбца комплексных амплитуд узловых токов будут определяться как $J_1 = -J_0 + E_1/Z_1$, $J_2 = J_0 + E_2/Z_2$. Искомый вектор узловых напряжений

в данном случае будет выглядеть так $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix}$. Решив данную систему

уравнений и найдя комплексные амплитуды напряжений U_{10} и U_{20} , с помощью второго закона Кирхгофа определяем комплексные амплитуды напряжений оставшихся ветвей: $U_{12} = U_{10} - U_{20}$. Комплексные амплитуды токов всех ветвей могут быть найдены, если использовать обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащего пассивный элемент и источник э.д.с. В результате имеем: $I_1 = (E_1 - U_{10})/Z_1$, $I_2 = (E_2 - U_{20})/Z_2$, $I_3 = U_{12}/Z_3$, $I_4 = -U_{20}/Z_4$. Кроме того, очевидно, $I_5 = J_0$. Таким образом, получены все формулы, определяющие комплексные амплитуды токов и напряжений всех ветвей данной цепи.

Осуществим расчет цепи методом узловых напряжений с использованием пакета Mathcad. Вводим в рассмотрение элементы матриц, входящих в систему (2.2):

$$Y_{11} := Z_1^{-1} + Z_3^{-1} \quad Y_{12} := -Z_3^{-1} \quad Y_{22} := Z_2^{-1} + Z_3^{-1} + Z_4^{-1}$$

$$y := \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad J := \begin{pmatrix} -J_0 + \frac{E_1}{Z_1} \\ J_0 + \frac{E_2}{Z_2} \end{pmatrix}$$

Решение системы (2.2) осуществим также с использованием встроенной функции Isolve:

$$V := \text{Isolve}(y, J) \quad V = \begin{pmatrix} -8.266 - 1.181i \\ -0.044 - 0.011i \end{pmatrix}$$

Таким образом, искомые комплексные амплитуды напряжений равны

$$U_{10} := V_1 \quad U_{20} := V_2$$

А комплексная амплитуда U_{12} определится как

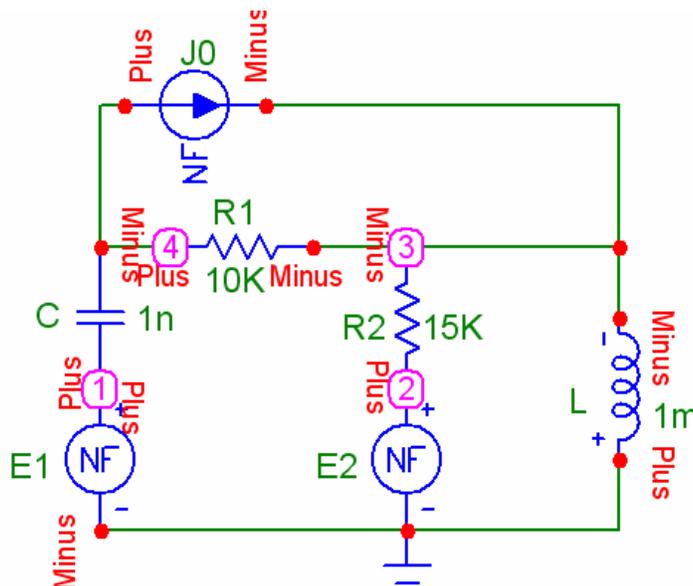
$$U_{12} := U_{10} - U_{20}$$

Комплексные амплитуды токов всех ветвей цепи в соответствии с вышеизложенным определяются из соотношений

$$I_1 := \frac{E_1 - U_{10}}{Z_1} \quad I_2 := \frac{E_2 - U_{20}}{Z_2} \quad I_3 := \frac{U_{12}}{Z_3} \quad I_4 := \frac{-U_{20}}{Z_4} \quad I_5 := J_0$$

Вычисляя модули и аргументы этих функций, находим амплитуды и начальные фазы всех искомых токов и напряжений. Очевидно, они совпадают с теми, которые были рассчитаны ранее с использованием метода контурных токов.

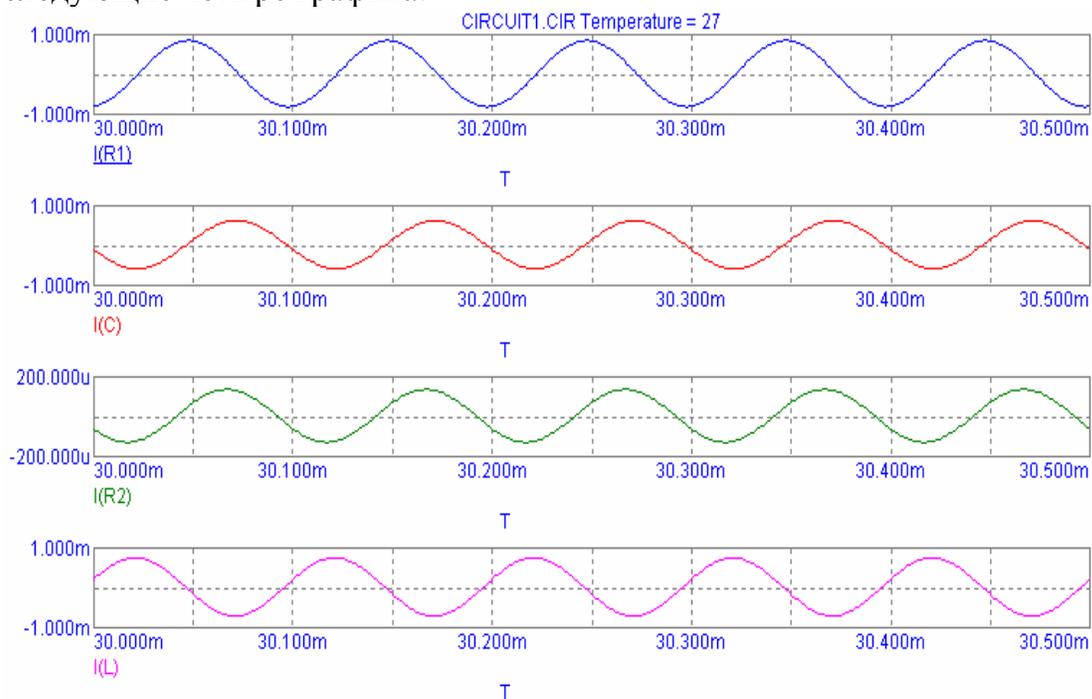
С целью проверки теоретических расчетов выполним анализ цепи рис.2.1 с помощью пакета схемотехнического моделирования Micro Cap. Используя имеющиеся в этом пакете средства, изображаем структуру заданной цепи в виде



В режиме *Transient* на экран выводим следующие зависимости: 1) тока в ветви, содержащей резистор $R1$, от времени, 2) тока в ветви, содержащей конденсатор C , от времени, 3) тока в ветви, содержащей резистор $R2$, от времени, 4) тока в ветви, содержащей катушку индуктивности L , от времени. С этой целью устанавливаем масштабы выводимых кривых по осям X и Y , как показано ниже:

P	XExpression	YExpression	XRange	YRange
1	T	I(R1)	30.5m,30m	1e-3,-1e-3
2	T	I(C)	30.5m,30m	1e-3,-1e-3
3	T	I(R2)	30.5m,30m	0.2e-3,-0.2e-3
4	T	I(L)	30.5m,30m	1e-3,-1e-3

Для более точного представления исследуемых характеристик целесообразно выбрать в меню *Transient* следующее: *Maximum Time Step* = $1E-6$. В результате вычислений на экране компьютера будут выведены следующие четыре графика:

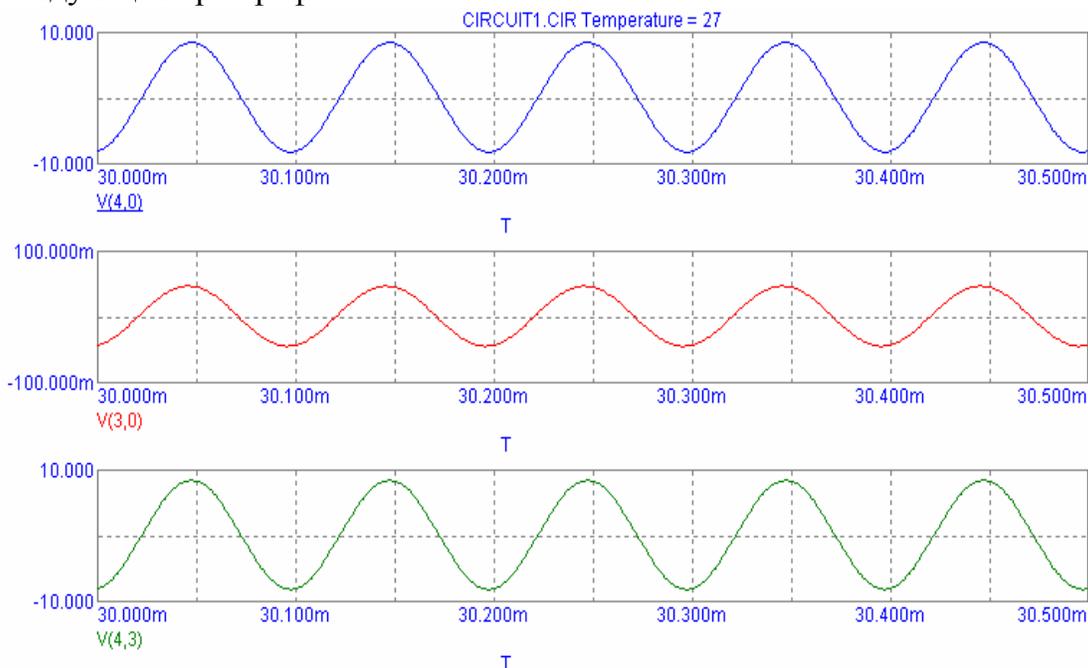


Амплитуды и начальные фазы токов измеряем по этим рисункам, используя пиктограмму *Peak* и известные соотношения, связывающие сдвиг фаз гармонического колебания с его временным сдвигом. Измерения показывают удовлетворительное соответствие экспериментальных данных с теоретическими.

Для определения напряжений ветвей цепи устанавливаем масштабы выводимых кривых по осям X и Y , как показано ниже:

P	XExpression	YExpression	XRange	YRange
1	T	V(4,0)	30.5m,30m	10,-10
2	T	V(3,0)	30.5m,30m	0.1,-0.1
3	T	V(4,3)	30.5m,30m	10,-10

В результате вычислений на экране компьютера будут выведены следующие три графика:



Амплитуды и начальные фазы напряжений, как и ранее, измеряем по этим рисункам, используя пиктограмму Peak и известные соотношения, связывающие сдвиг фаз гармонического колебания с его временным сдвигом. Измерения показывают удовлетворительное соответствие экспериментальных данных с теоретическими.

Таким образом, полностью решена поставленная задача анализа цепи. Причем результаты расчетов тремя методами (методом контурного тока, методом узловых напряжений и экспериментальным методом) совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов В.П. Основы теории цепей / В.П. Попов. - М. : Высшая школа, 2000. - 383 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л.А. Бессонов. - М. : Гардарики, 2002. - 638 с.
3. Фриск В.В. Основы теории цепей / В.В.Фриск. – М. : РадиоСофт, 2002. – 287с.

Составитель

Парфенов Владимир Иванович

Редактор

Тихомирова О.А.