

## 2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Непериодические сигналы в частотной области описываются спектральной плотностью  $\dot{S}(\omega)$ , которая определяется как прямое преобразование Фурье сигнала  $s(t)$ :

$$\dot{S}(\omega) = F[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.1)$$

Исходный сигнал  $s(t)$  определяется через его спектральную плотность с помощью обратного преобразования Фурье

$$s(t) = F^{-1}[\dot{S}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (2.2)$$

В общем случае спектральная плотность  $\dot{S}(\omega)$  является комплексной функцией частоты  $\omega$ . Модуль спектральной плотности

$$S(\omega) = |\dot{S}(\omega)| \quad (2.3)$$

описывает относительное распределение амплитуд гармонических составляющих спектра сигнала  $s(t)$  по частоте и называется амплитудно-частотным спектром (АЧС) сигнала, а аргумент

$$\Theta(\omega) = \arg \dot{S}(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[\dot{S}(\omega)]}{\text{Re}[\dot{S}(\omega)]} \quad (2.4)$$

описывает распределение начальных фаз гармонических составляющих спектра сигнала по частоте и называется фазочастотным спектром (ФЧС) сигнала. В соответствии с (2.3) и (2.4) АЧС является четной функцией частоты, а ФЧС – нечетной функцией частоты.

Из (2.1) следует, что если  $s(t)$  – четная функция времени ( $s(t) = s(-t)$ ), то спектральную плотность такого сигнала можно определить выражением

$$\dot{S}(\omega) = S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt, \quad (2.5)$$

так что в этом случае спектральная плотность  $S(\omega)$  является действительной функцией частоты.

Энергия сигнала  $E_s$  определяется как интеграл от средней мощности сигнала, так что на сопротивлении 1 Ом выделяется энергия, равная

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (2.6)$$

В соответствии с теоремой Парсеваля энергия может быть определена через спектральную плотность  $\dot{S}(\omega)$  сигнала  $s(t)$  выражением

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.7)$$

Часто аналитические модели сигналов  $s(t)$  имеют бесконечную протяженность по оси времени, а спектральные плотности  $\dot{S}(\omega)$  – бесконечную протяженность по оси частот. В теории и на практике длительность сигнала  $\Delta T$  и ширину его спектра  $\Delta\Omega$  ограничивают конечными значениями, которые могут быть определены различными способами. Одним из широко используемых критериев определения параметров  $\Delta T$  и  $\Delta\Omega$  является следующий. В качестве параметров  $\Delta T$  и  $\Delta\Omega$  сигнала  $s(t)$  принимаются такие значения длительности и ширины спектра сигнала, в пределах которых заключена заданная доля  $\eta$  (например,  $\eta = 0.95$ ) полной энергии сигнала. Исходя из этого определения, длительность сигнала  $\Delta T$  находится из уравнения (для  $s(t)$  – четной функции времени)

$$\eta \cdot E_s = \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} s^2(t) dt, \quad (2.8)$$

а ширина спектра  $\Delta\Omega$  сигнала – из уравнения

$$\eta \cdot E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\Omega/2}^{\Delta\Omega/2} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.9)$$

При преобразованиях сигналов изменяются их спектральные плотности. В ряде важных линейных преобразований сигналов спектры преобразованных сигналов достаточно просто связаны со спектрами исходных сигналов. Рассмотрим, например, следующие преобразования.

1) При запаздывании (задержке) сигнала на время  $\tau z$

$$F[s(t - \tau z)] = \dot{S}(\omega) \exp(-j\omega\tau z). \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что АЧС задержанного сигнала  $s(t - \tau z)$  совпадает с АЧС исходного сигнала, а ФЧС запаздывающего сигнала определяется через ФЧС исходного сигнала выражением

$$\arg F[s(t - \tau z)] = \arg F[s(t)] - \omega\tau z. \quad (2.11)$$

2) Изменим в исходном сигнале масштаб времени, т. е. умножим аргумент  $t$  на некоторый постоянный коэффициент  $m$ . В результате сигнал примет вид  $s(mt)$ . Спектральная плотность такого сигнала будет находиться из выражения

$$F\{s(mt)\} = \dot{S}(\omega/m) / m. \quad (2.12)$$

Следовательно, при «сжатии» исходного сигнала во времени, что имеет место при  $m > 1$ , его спектр расширяется во столько же раз (и наоборот).

3) Спектральная плотность продифференцированного сигнала определяется через спектральную плотность сигнала  $s(t)$  выражением

$$\dot{S}_{DIF}(\omega) = F\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = j\omega \dot{S}(\omega). \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует, что за счет влияния множителя  $\omega$  в правой части (2.13) в АЧС продифференцированного сигнала подавляются низкочастотные составляющие (в области нулевой частоты) спектра исходного сигнала  $s(t)$ . ФЧС продифференцированного сигнала определяется в соответствии с (2.13) выражением

$$\Theta_{DIF}(\omega) = \arg \dot{S}(\omega) + \begin{cases} \pi/2, \omega > 0, \\ -\pi/2, \omega < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

4) Умножение исходного сигнала  $s(t)$  на  $\cos(\omega_0 t)$  приводит к смещению спектра исходного сигнала по оси частот на величину  $\omega_0$  и соответствующему уменьшению в два раза величины этого спектра, т. е.

$$F\{s(t) \cos(\omega_0 t)\} = \dot{S}(\omega - \omega_0)/2 + \dot{S}(\omega + \omega_0)/2. \quad (2.15)$$

В (2.10), (2.12), (2.13) и (2.15)  $\dot{S}(\omega)$  – спектральная плотность исходного сигнала  $s(t)$ .

## ЗАДАНИЯ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

**ЗАДАНИЕ 2.1.** В соответствии с номером Вашего варианта выберите из таблицы Таб.1.1 форму сигнала и зарисуйте такой сигнал для двух значений параметра  $\tau$ , характеризующего его длительность. В дальнейшем все временные параметры, такие как длительность, будут иметь размерность в *миллисекундах*, а параметр  $S_0$ , являющийся амплитудным множителем сигнала, измеряется в *вольтах*. Для определенности положим, что всюду в дальнейшем  $S_0 = 1$ . Вычислить длительность исследуемого сигнала для двух значений параметра  $\tau$ , воспользовавшись формулой (2.8).

**ЗАДАНИЕ 2.2.** Учитывая четность исследуемого сигнала, рассчитать по формуле (2.5) его спектральную плотность. Построить графики АЧС (модуля спектральной плотности) в двух вариантах: вначале, в обычном виде, а затем – отнормировав их на свои максимальные значения. Сделать качественный вывод о соотношении между длительностью сигнала во времени и протяженностью его спектра в частотной области. Привести количественную оценку соотношения между длительностью и шириной спектра исследуемого сигнала, воспользовавшись результатами предыдущего пункта задания, а также формулой (2.9).

**ЗАДАНИЕ 2.3.** Выполнить спектральный анализ сигнала, задержанного относительно исходного на величину  $\tau d$ , равной 1 мсек. С этой целью рассчитать спектральную плотность задержанного сигнала и построить графики АЧС и ФЧС для двух значений параметра  $\tau$ . Сравнить полученные результаты с теми, которые следуют из теории. Обосновать полученные результаты.

**ЗАДАНИЕ 2.4.** Выполнить спектральный анализ сигнала с измененным масштабом времени (положив  $m=0.5$  и  $m=2$ ). Рассчитать спектральную плотность такого сигнала, воспользовавшись определением (2.1). Построить графики сигнала с

измененным масштабом и его АЧС. По результатам их сравнения сделать вывод о характере связи между поведением сигнала во временной и частотной областях. Показать, что теоретическая формула (2.12) адекватно описывает полученные результаты.

**ЗАДАНИЕ 2.5.** Выполнить спектральный анализ сигнала  $sd(t)$ , полученного путем дифференцирования исходного сигнала  $s(t)$ . Представить на графике исходный и продифференцированный сигналы для двух значений параметра  $\tau$ . Рассчитать по определению (2.1) спектральную плотность продифференцированного сигнала и построить графики АЧС и ФЧС исходного и продифференцированного сигналов. Показать, что теоретические формулы (2.13) и (2.14) адекватно описывают полученные результаты.

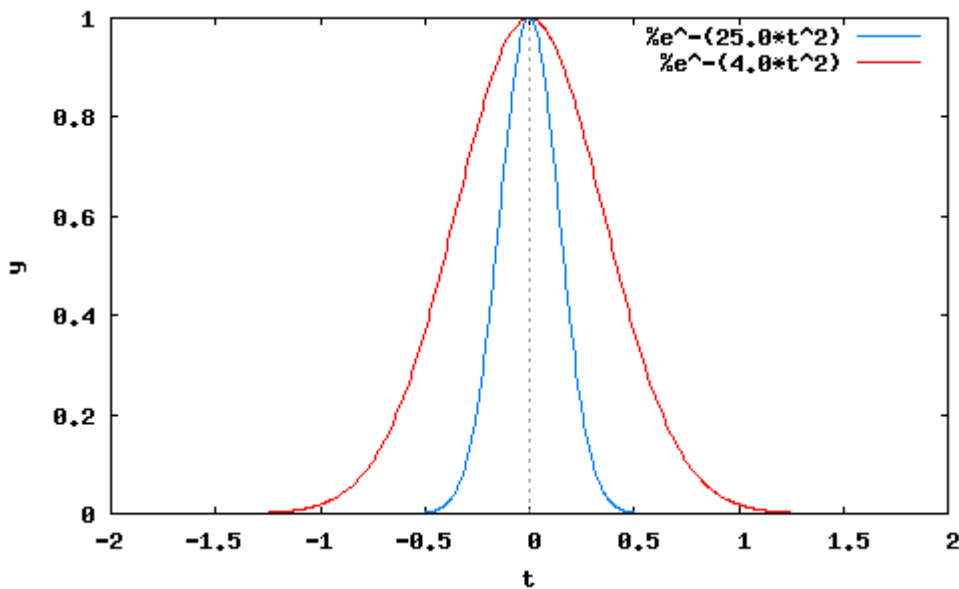
**ЗАДАНИЕ 2.6.** Рассмотреть сигнал  $s(t)\cos(\omega_0 t)$ , положив  $\omega_0 = 40$  [рад/сек] $10^3$ . Рассчитать спектральную плотность такого сигнала и показать, что эта спектральная плотность совпадает с той, которая получается из теоретической формулы (2.15). Нарисовать график АЧС подобного сигнала для двух значений параметра  $\tau$  и сделать вывод о характере изменений, происшедших с их спектрами в результате такого преобразования.

**ЗАДАНИЕ 2.7.** Задать сигнал в виде таблицы в соответствии с номером Вашего варианта (см. Таб.1.2), осуществить его аппроксимацию непрерывной функцией с помощью сплайн-интерполяции и рассчитать его спектральную плотность. Вычислить энергию такого сигнала, воспользовавшись формулами (2.6) и (2.7) соответственно.

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 2.1.** Рассмотрим в качестве примера сигнал вида  $s(t) = S_0 \exp(-(t/\tau)^2)$ . Далее, в соответствии с заданием положим  $S_0 = 1$  [В] и учтем, что параметр  $\tau$  может принимать два значения (соответственно 0.2 и 0.5 мсек). Задаем эти параметры и выводим на экран график этого сигнала для двух значений параметра  $\tau$ :

```
S0:1$ TOL:1e-4$  
s:[S0*exp(-(t/tau[1])^2),S0*exp(-(t/tau[2])^2)]$ tau:[0.2,0.5]$  
wxplot2d(s,[t,-2,2],[y,0,1],[style,[lines,1,1],[lines,1,2]]);
```



Вычислим длительность исследуемого сигнала. С этой целью воспользуемся следующими свойствами этого сигнала: его четностью и его монотонным убыванием при  $t \geq 0$ . Тогда под длительностью сигнала  $T$  будем понимать такое значение момента времени  $t = T$ , при котором доля энергии сигнала на интервале  $[t/2; t]$  составляет малую часть  $\varepsilon$  энергии сигнала, вычисленную на интервале  $[0; t]$ . Это значение  $t = T$  определится из решения уравнения

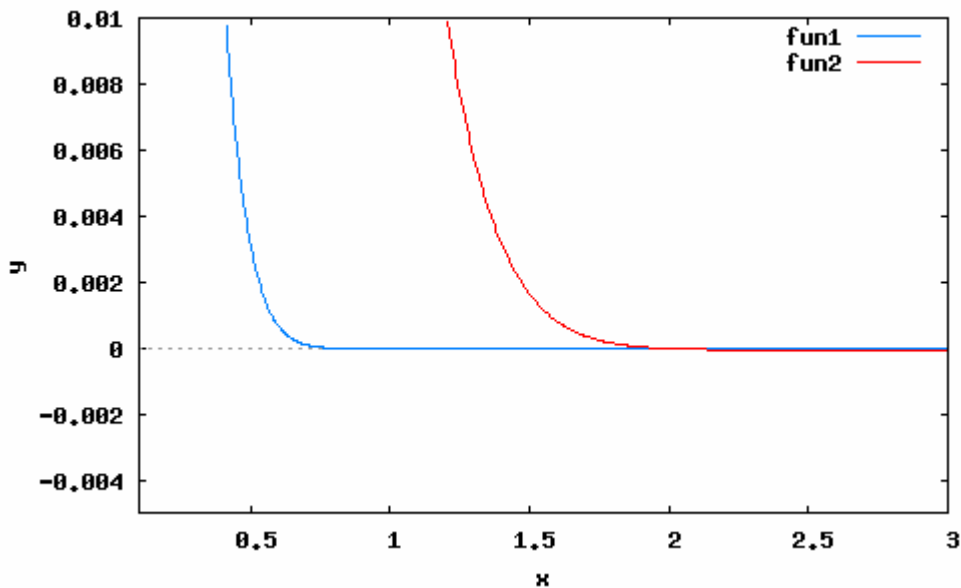
$$2 \int_{t/2}^t s^2(t) dt \left( 2 \int_0^t s^2(t) dt \right)^{-1} = \varepsilon.$$

В качестве величины  $\varepsilon$  можно взять, например, значение  $TOL$  — величину, задающую относительную точность вычислений. Для вычисления длительности

сигнала  $T$  создаем список из значений энергии сигналов  $E(t_1, t_2) = 2 \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt$

```
E(t1,t2):=makelist(2*quad_qags(s[i]^2,t,t1,t2,'epsrel=1d-)[1],i,1,2)$
```

После этого создаем функцию  $e(x)$ , строим ее график и находим корни уравнения  $e(x) = 0$ :



`e(x) := E(x/2, x) - TOL * E(0, x) $`

`T: makelist(find_root(e(x)[i], x, 0.1, 5), i, 1, 2);`  
`[0.77811837727913, 1.945295943197822]`

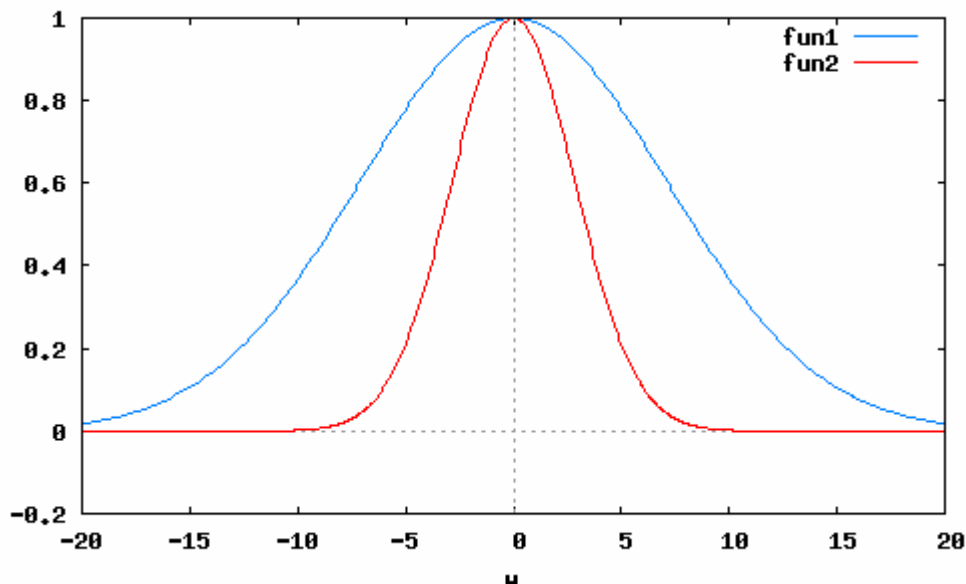
Анализ полученных данных свидетельствует о том, что увеличение параметра  $\tau$  приводит к увеличению длительности сигнала.

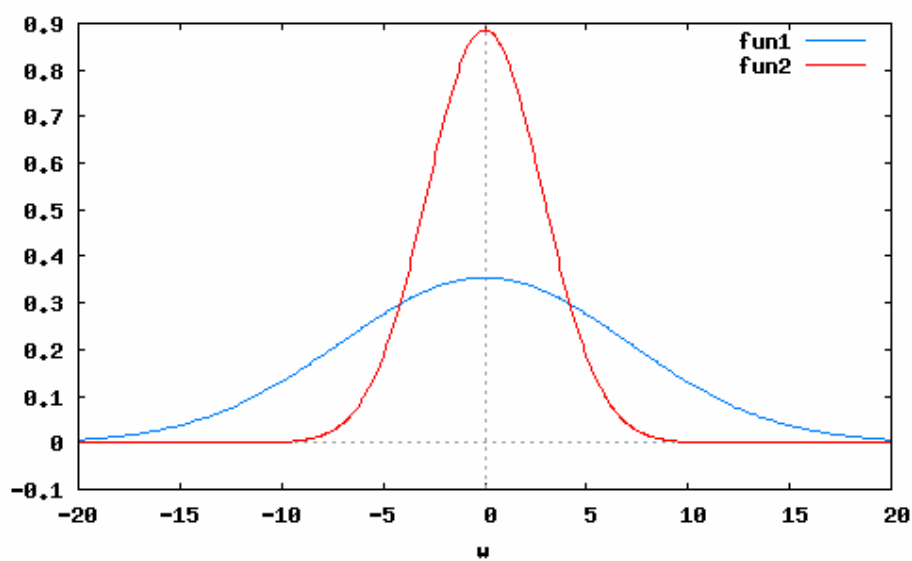
**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 2.2.** Определим теперь спектральную плотность анализируемого сигнала. Для этого воспользуемся тем, что он удовлетворяет условию четности, а, следовательно, для расчета спектральной плотности можно воспользоваться более простой, чем общая формула (2.1), формулой (2.5). Для найденной длительности сигнала  $T$

$$S_j(\omega) \approx 2 \int_0^{T_j} s(t) \cos(\omega t) dt.$$
 Численно рассчитываем интеграл и строим график АЧС

`S(w) := makelist(2*quad_qawo(s[i], t, 0, T[i], w, cos, 'epsabs=1d2) [1], i, 1, 2) $`

Заметим, что по оси абсцисс на этом графике отложена циклическая частота  $\omega$ . Учитывая, что все «временные» параметры сигнала были выражены в миллисекундах, нетрудно заметить, что частота  $\omega$  имеет размерность [рад/мсек]=





[рад/сек] $10^3$ .

Для более наглядного сравнения полученных зависимостей отнормируем их на максимальные значения соответствующих спектральных плотностей. Из анализа приведенного рисунка следует следующий качественный вывод: увеличение длительности сигнала во времени приводит к «сжатию» спектра сигнала в частотной области. Для более точного подтверждения данного вывода вычислим ширину спектра исследуемого сигнала. С этой целью воспользуемся вычисленной полной энергией сигнала, за время его длительности  $E(0, T)$ . Кроме того, вычислим энергию сигнала, заключенную в ограниченной частотной области (от  $-y$  до  $y$ , где  $y$  – некоторое пока неизвестное значение частоты):

```
Ef(y, i) := 1/%pi * quad_qags(abs(S(x)[i])^2, x, 0, y, 'epsrel=1d-2) [1] $
```

Тогда, аналогично (2.9) ширина спектра сигнала может быть вычислена как удвоенное значение такой частоты, при которой энергия сигнала в полосе  $[-\Omega; \Omega]$  составляет некоторую часть, например 0.95, от полной энергии сигнала. Создаем список таким образом определенных ширин спектра

```
Del_w: makelist(find_root(Ef(y, i) - 0.95 * E(0, T[i]) [i], y, W[i], 5 * W[i]), i, 1, 2) ;
```

```
[9.799820151367566, 3.919928060547024]
```

Кроме того можно рассчитать величину  $F$ , обратную длительности  $T$  сигнала, соответствующую круговую частоту  $W$  и базу сигнала  $B = TF$ .

```
F: [1/T[1], 1/T[2]] $ W: 2 * %pi * F $ BASE: F * T $ display(T, F, BASE, W) $
```

```
T: [0.77811837727913, 1.945295943197822]
```

```
F: [1.285151500336918, 0.51406060013477]
```

```
BASE: [1.0, 1.0]
```

```
W: [8.074845024416721, 3.229938009766689] .
```

Таким образом, мы действительно количественно подтвердили, что с увеличением длительности сигнала во временной области ширина его спектра пропорционально уменьшается (и наоборот).

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 2.3.** Рассмотрим сигнал  $sz(t)$ , который получается из исходного сигнала  $s(t)$  путем его задержки во времени на некоторую величину  $\tau d$ , которую в дальнейшем полагаем равной 1 мсек, т. е.  $sz(t) = s(t - \tau d)$ .

```
sz:=ev(s,t=t-td);
```

Рассчитаем по определению (2.1) спектральную плотность задержанного сигнала и выведем на экран графики его АЧС и ФЧС: Для этого вычислим косинусную и синусную компоненты действительного спектра сигнала,

```
Sz_c(w,td):=makelist(quad_qawo(sz[i],t,td-T[i],td+T[i],w,cos,'epsabs=1d-3)[1],i,1,2)$
```

```
Sz_s(w,td):=makelist(quad_qawo(sz[i],t,td-T[i],td+T[i],w,sin,'epsabs=1d-3)[1],i,1,2)$
```

комплексный спектр,

```
Sz(w,td):=Sz_c(w,td)+%i*Sz_s(w,td)$
```

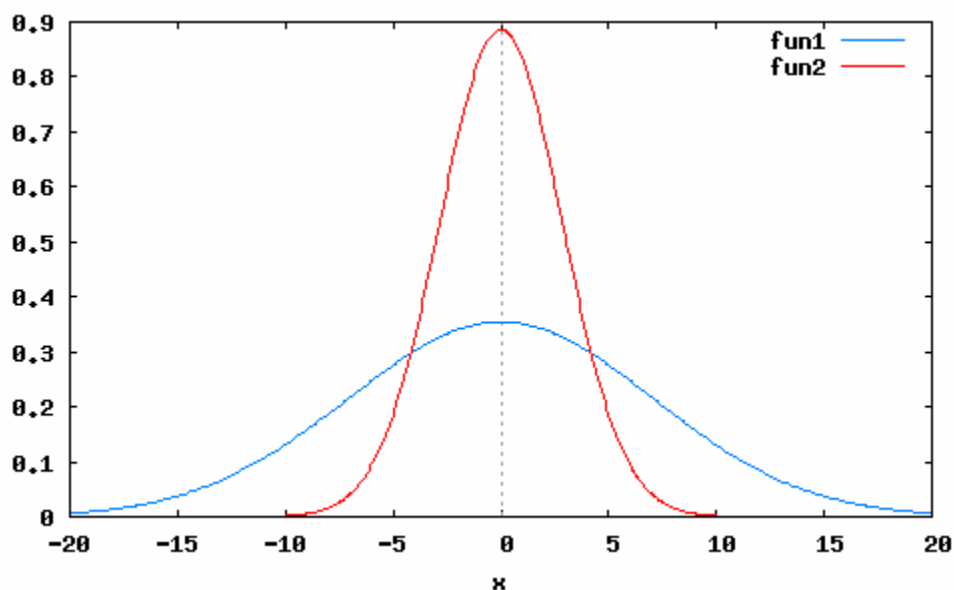
его модуль

```
a1(x):=cabs(Sz(x,1)[1])$ a2(x):=cabs(Sz(x,1)[2])$
```

и построим соответствующие графики

```
wxplot2d([a1(x),a2(x)], [x,-n,n])$
```

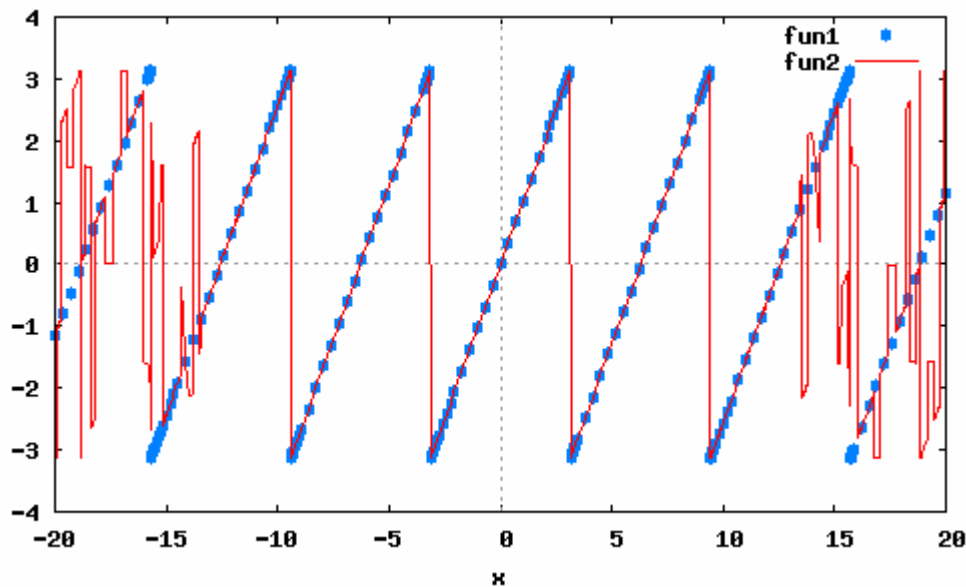
Из сравнения АЧС исходного сигнала  $|\dot{S}(\omega)|$  (см. рисунок на стр. 18) и АЧС задержанного сигнала  $|\dot{S}z(\omega)|$  следует, что они ничем не отличаются. Таким образом, действительно, как это следует и из теории, при сдвиге сигнала во времени на произвольную величину АЧС не меняется. Что касается ФЧС, то из теории известно соотношение между ФЧС исходного и ФЧС задержанного сигналов. Это





соотношение описывается формулой (2.11).

Рассчитываем в программе численно аргументы комплексных спектров



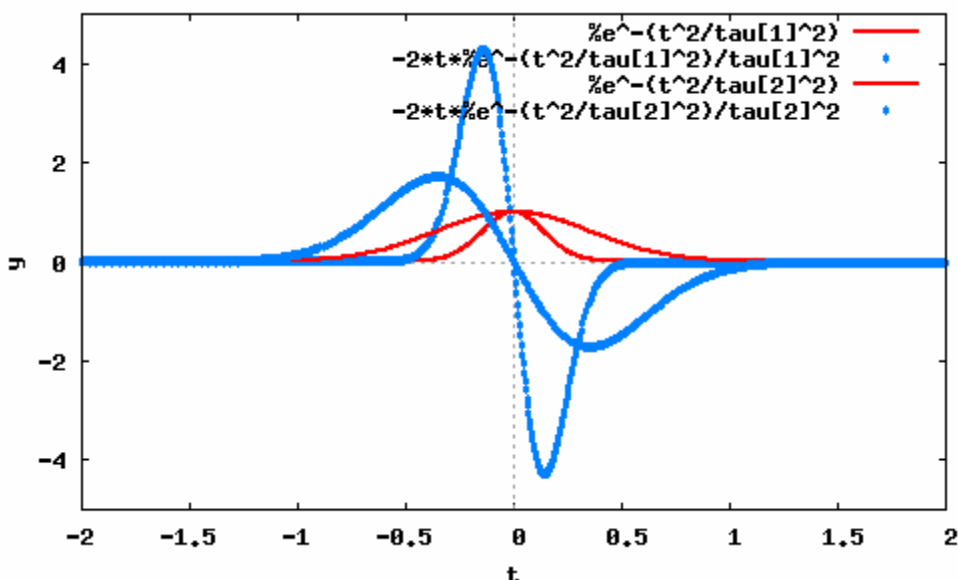
сигналов обеих длительностей и строим график.

```
f1(x) := carg(Sz(x,1)[1]) $ f2(x) := carg(Sz(x,1)[2]) $
```

Учитывая, что для данного положительного и четного сигнала его ФЧС всюду равен нулю, из (2.11) следует, что ФЧС задержанного сигнала должен быть равен  $-\omega \cdot \tau d$ , т. е. ФЧС должна быть линейной функцией от частоты. Однако из последнего рисунка этого не следует. *Объяснить причины этого на первый взгляд принципиального расхождения теории и практики, а также особенности поведения кривых рисунка.*

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 2.5.** Выполним теперь дифференцирование исходного сигнала  $s(t)$  и построим временные зависимости при разных значениях параметра  $\tau$ :

```
sd:diff(s,t) $
wxplot2d([s[1],sd[1],s[2],sd[2]], [t,-2,2], [y,-5,5], [style,[lines,2,2],[points,1,1,1]]) $
```



Из этого графика видно, что дифференцирование сигнала приводит к изменению его формы. Найдем теперь спектральную плотность продифференцированного сигнала, воспользовавшись определением (2.1). Как и в предыдущем пункте вычислим косинусную и синусную компоненты действительного спектра сигнала, комплексный спектр, его модуль и построим соответствующие графики

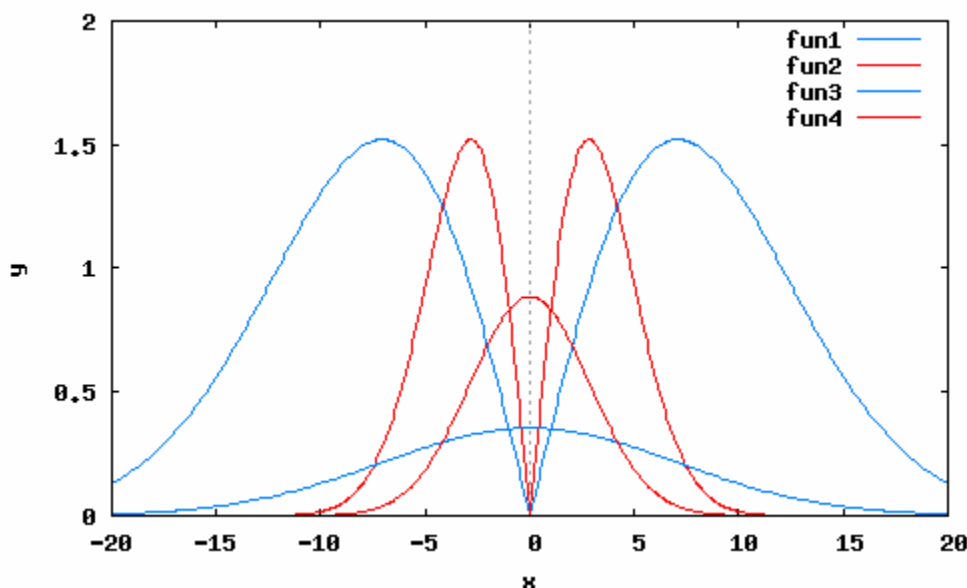
```
Sd_c(w) := makelist(quad_qawo(sd[i], t, -T[i], T[i], w, cos, 'epsabs=1d-2) [1], i, 1, 2) $
```

```
Sd_s(w) := makelist(quad_qawo(sd[i], t, -T[i], T[i], w, sin, 'epsabs=1d-2) [1], i, 1, 2) $
```

```
Sd(w) := Sd_c(w) + %i * Sd_s(w) $
```

```
n: 20 $ a1(x) := cabs(Sd(x) [1]) $ a2(x) := cabs(Sd(x) [2]) $
```

```
wxplot2d([a1(x), a2(x), S(x) [1], S(x) [2]], [x, -n, n], [y, 0, 2], [style, [lines, 1, 1], [lines, 1, 2]]) $
```



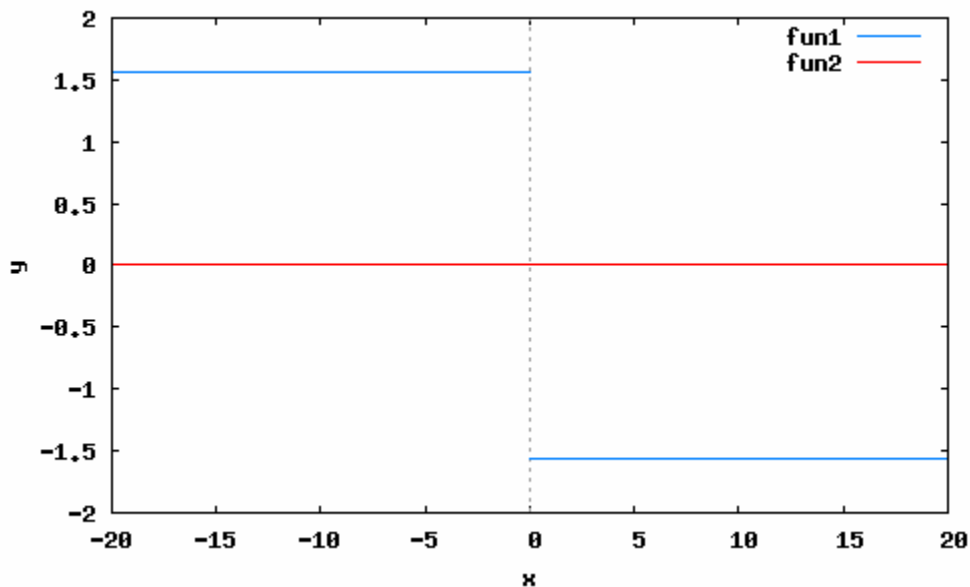
Анализ данного рисунка свидетельствует о том, что в результате дифференцирования в спектре сигнала происходит ослабление низкочастотных составляющих и некоторое «подчеркивание» высокочастотных.

Фазочастотный спектр

```
f1(x) := carg(Sd(x) [1]) $ f2(x) := carg(S(x) [1]) $
```

исходного и продифференцированного сигналов имеет следующий вид

```
wxplot2d([f1(x), f2(x)], [x, -n, n], [y, -2, 2]) $
```

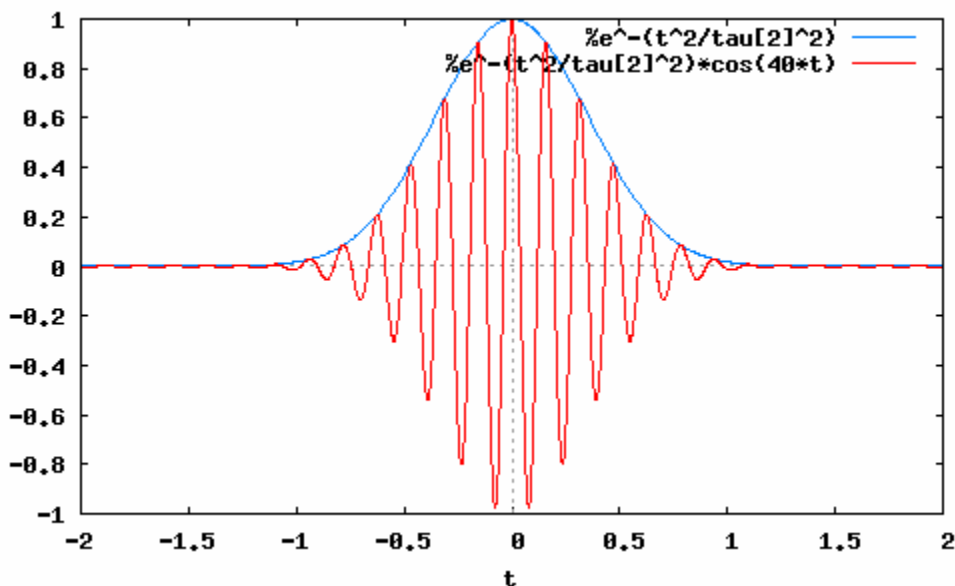


Непосредственным измерением уровней горизонтальных прямых на этом рисунке убеждаемся в выполнении формулы (2.14). *Самостоятельно подтвердить справедливость формулы (2.13), построив АЧС анализируемых сигналов по этой формуле и сравнив результат с предпоследним рисунком.*

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 2.6.** Рассмотрим сигнал  $s_c(t) = s(t) \cos(\omega_0 t)$ , полученный в результате перемножения исходного сигнала  $s(t)$  с функцией  $\cos(\omega_0 t)$ . На рисунке приведены графики сигналов  $s(t)$  и  $s_c(t)$  (сплошной и пунктирной кривыми соответственно):

```
sc:s*cos(40*t);
```

```
wxplot2d([s[2], sc[2]], [t, -2, 2], [style, [linesdotted, 2, 2, 1], [lines, 1, 2]]);
```



Нетрудно заметить, что сигнал  $s(t)$  в данном случае представляет собой огибающую сигнала  $s_c(t)$ . Определим теперь спектральную плотность сигнала

$s_c(t)$ , воспользовавшись определением (2.1). Как и в предыдущем пункте вычислим косинусную и синусную компоненты действительного спектра сигнала, комплексный спектр, его модуль и построим соответствующий график

```
Sc_c(w) :=makelist(quad_qawo(sc[i],t,-T[i],T[i],w,cos,'epsabs=1d-2)[1],i,1,2)$
```

```
Sc_s(w) :=makelist(quad_qawo(sc[i],t,-T[i],T[i],w,sin,'epsabs=1d-2)[1],i,1,2)$
```

```
Sc(w) :=Sc_c(w)+%i*Sc_s(w)$
```

```
n:60$
```

```
a1(x) :=cabs(Sc(x)[1])$ a2(x) :=cabs(Sc(x)[2])$
```

```
'wxplot2d([a1(x),a2(x)], [x,-n,n], [y,0,1])$
```

*Самостоятельно построить соответствующий график и объяснить полученные результаты.*

Из теории следует, что в результате умножения низкочастотного сигнала  $s(t)$  на  $\cos(\omega_0 t)$  модуль спектра сигнала смещается по оси частот влево и вправо на величину  $\omega_0$  и одновременно уменьшается по абсолютной величине в два раза - соотношение (2.15).

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 2.7.** Рассмотрим сигнал, заданный в виде таблицы (см. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 1.4, стр. 11) – список списков координат точек по осям абсцисс и ординат

```
S: [[0,0], [.1,1.1], [.2,3.4], [.3,5], [.4,2.3], [.5,3], [.6,2.2], [.7,0]]$
```

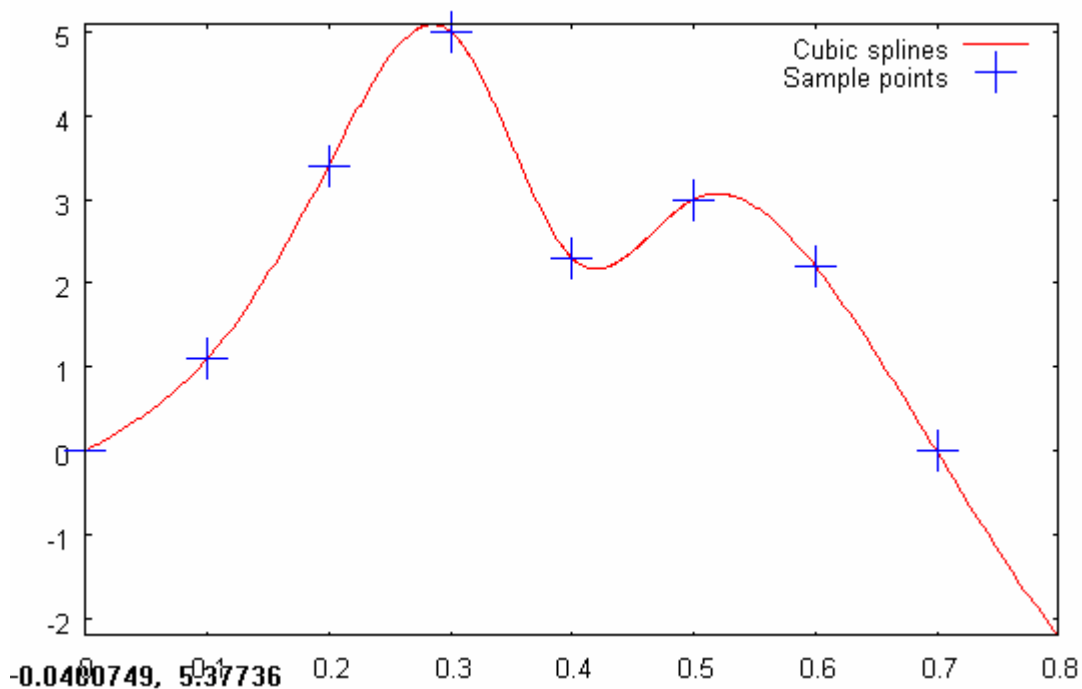
График данной функции, построенный по заданным отсчетам, а также его сплайн-аппроксимация приведены ниже. Объяснение процедур `cspline()` и `interp()` см. ранее на стр. 12. Используем пакет интерполяции и функцию кубического сплайна из него

```
load(interpol)$
```

```
cspline(S)$
```

```
Z(x) :=' '$
```

В результате получаем функцию  $Z(x)$ , задающую кубический сплайн, интерполирующий данные  $S$ , изображенный на рисунке.



Далее, в соответствии с заданием вычислим энергию этого сигнала, пользуясь временным (см. формулу (2.6)) и частотным (см. формулу (2.7)) представлениями сигнала. Энергия сигнала, вычисленная по формуле (2.6), равна

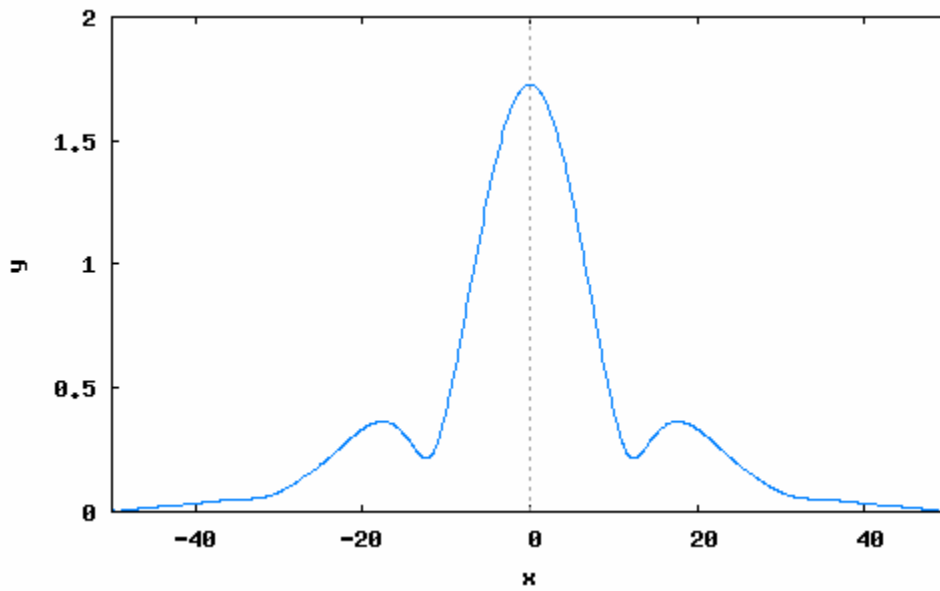
```
Et:=quad_qags (Z (t) ^2 , t , 0 , T0 , 'epsrel=1d-2) [1] ;
5.633361162825864
```

Для вычисления энергии сигнала по формуле (2.7) вначале необходимо определить его спектральную плотность. Для этого можно воспользоваться определением (2.1). Как и в предыдущем пункте вычислим косинусную и синусную компоненты действительного спектра сигнала, комплексный спектр, его модуль и построим соответствующий график

```
SS_c (w) :=quad_qawo (Z (t) , t , 0 , T0 , w , cos , 'epsabs=1d-2) [1] $
SS_s (w) :=quad_qawo (Z (t) , t , 0 , T0 , w , sin , 'epsabs=1d-2) [1] $
SS (w) :=SS_c (w) +%i*SS_s (w) $
```

```
n:50$
a1 (x) :=cabs (SS (x) ) $
wxplot2d (a1 (x) , [x , -n , n] , [y , 0 , 2] ) $
```

В результате график амплитудно-частотного спектра анализируемого сигнала принимает вид



Окончательно, используя формулу (2.7), находим значение энергии сигнала, которое, очевидно, совпадает со значением, полученным ранее с использованием формулы (2.6):

```
Ef: 1/%pi/2*quad_qags(a1(x)^2,x,-n,n,'epsrel=1d-2')[1];
5.633239884803196
```