(2) (2)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том XIII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

12

МОСКВА · 1968

УДК 621.391

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМНИКА

Е. И. Куликов, А. П. Трифонов

При оптимальном приеме сигнала $s(t,\ l_0)$ с неизвестным неэнергетическим параметром l_0 на фоне аддитивного нормального шума с нулевым средним значением $\langle n(t)\rangle = 0$ и функцией корреляции $K(t_1 - t_2) = \langle n(t_1)\, n(t_2)\rangle$ одной из существенных операций является операция вида [1, 2, 3, 4, 5] и др.

$$M(l) = \int\limits_0^T x(t)\, v(t, l)\, dt. \tag{1}$$

Здесь

$$x(t) = s(t,\ l_0) + n(t),\quad 0 < t < T, \tag{2}$$

а функция $v(t,\ l)$ определяется из решения интегрального уравнения

$$\int\limits_0^T K(t_1 - t_2)\, v(t_2,\ l)\, dt_2 = s(t_1,\ l). \tag{3}$$

В дальнейшем будем полагать, что сигнал $s(t,\ l)$ и его производные по времени полностью расположены внутри интервала $[0,\ T]$.

Обычно выходной сигнал (1) представляют в виде суммы двух составляющих:

$$M(l) = \int\limits_0^T s(t, l_0)\, v(t, l)\, dt + \int\limits_0^T n(t)\, v(t, l)\, dt = S(l_0, l) + N(l), \tag{4}$$

где $S(l_0,\ l)$ и $N(l)$ — соответственно полезный сигнал (сигнальная функция) и шум (шумовая функция) на выходе линейной части оптимального приемника.

При анализе характеристик оптимального приемного устройства обычно предполагается, что

$$S(l_0,\ l) = S(l - l_0) = S(l_0 - l), \tag{5}$$

т. е. что сигнальная функция зависит только от модуля разности аргументов. Однако это предположение основано лишь на рассмотрении конкретных примеров. В связи с этим представляет интерес рассмотреть свойства сигнальной функции и определить условия, при которых выполняется соотношение (5). Эта задача интересна еще и потому, что функция корреляции шума на выходе оптимального приемника совпадает с сигнальной функцией, т. е. $\langle N(l_1) N(l_2)\rangle = S(l_1 - l_2)$.

Рассмотрим сигнальную функцию $S(l_1, l_2)$, переписав ее в виде [1, 2, 3]

$$S(l_1, l_2) = \int_0^T\int_0^T s(t_1, l_1) s(t_2, l_2) \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2, \tag{6}$$

где $\theta(t_1, t_2)$ — решение уравнения

$$\int_0^T K(t_1 - t) \theta(t, t_2)\, dt = \delta(t_1 - t_2). \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\theta(t_1, t_2) = \theta(t_2, t_1)$ и $S(l_1, l_2) = S(l_2, l_1)$. Поскольку l — неэнергетический параметр, то $S(l, l) = \text{const}$.

Разложим функцию $S(l_1, l_2)$ в ряд Тейлора по l_2 в окрестности точки l_1, предполагая при этом аналитичность сигнала по параметру l,

$$S(l_1, l_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(l_1)}{k!}(l_2 - l_1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(l_2 - l_1)^k}{k!} \int_0^T\int_0^T s(t_1, l_1) \frac{\partial^k s(t_2, l_1)}{\partial l^k} \theta(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 \tag{8}$$

и докажем следующее утверждение: если энергия m производных сигнала по параметру l не зависит от конкретного значения параметра l, т. е.

$$\frac{d}{dl} \int_0^T\int_0^T \frac{\partial^i s(t_1, l)}{dl^i} \frac{\partial^i s(t_2, l)}{dl^i} \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{9}$$

то

$$S(l_1, l_2) = \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p}{(2p)!} b_p (l_1 - l_2)^{2p} + Q. \tag{10}$$

Здесь

$$b_p = \int_0^T\int_0^T \frac{\partial^p s(t_1, l)}{\partial l^p} \frac{\partial^p s(t_2, l)}{\partial l^p} \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

— энергия p-й производной сигнала по параметру l, а Q — остаточный член:

$$Q \simeq \frac{(l_2 - l_1)^{2m+1}}{(2m+2)!} \int_0^T\int_0^T \frac{\partial^{m+1} s(t_1, l^*)}{\partial l^{m+1}} \frac{\partial^{m+1} s(t_2\ l^*)}{\partial l^{m+1}} \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2, \tag{11}$$

$$l_1 \leqslant l^* \leqslant l_2.$$

В этом случае выражение (5) будет справедливо с погрешностью, определяемой (11).

Для доказательства (10) рассмотрим коэффициенты разложения (8) $a_k(l)$. Пусть $k = 2p + 1$. Тогда

$$a_k(l) = \int_0^T\int_0^T s(t_1, l) \frac{\partial^k s(t_2, l)}{\partial l^k} \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = \frac{d}{dl} \int_0^T\int_0^T s(t_1, l) \frac{\partial^{k-1} s(t_2, l)}{\partial l^{k-1}} \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 -$$

$$- \int_0^T\int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial^{k-1} s(t_2, l)}{\partial l^{k-1}} \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2. \tag{12}$$

В свою очередь

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial s(t_1,l)}{\partial l}\frac{\partial^{k-1}s(t_2,l)}{\partial l^{k-1}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 = \frac{d}{dl}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial s(t_1,l)}{\partial l}\frac{\partial^{k-2}s(t_2,l)}{\partial l^{k-2}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 -$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial^2 s(t_1,l)}{\partial l^2}\frac{\partial^{k-2}s(t_2,l)}{\partial l^{k-2}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

Повторяя преобразование (12) p раз, получаем

$$a_{2p+1}(l) = \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\frac{d}{dl}\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial^{i-1}s(t_1,l)}{\partial l^{i-1}}\frac{\partial^{k-i}s(t_2,l)}{\partial l^{k-i}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2\right]+$$

$$+(-1)^p\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial^{p}s(t_1,l)}{\partial l^{p}}\frac{\partial^{p+1}s(t_2,l)}{\partial l^{p+1}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2. \tag{13}$$

Последнее слагаемое в правой части (13) при $p \leqslant m$ с учетом (9) может быть представлено в виде

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial^{p}s(t_1,l)}{\partial l^{p}}\frac{\partial^{p+1}s(t_2,l)}{\partial l^{p+1}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dl}\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial^{p}s(t_1,l)}{\partial l^{p}}\frac{\partial^{p}s(t_2,l)}{\partial l^{p}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2\right] = 0. \tag{14}$$

Слагаемые в квадратных скобках суммы (13) также приводятся при помощи тождественного преобразования вида (12) либо к соотношению типа (14), либо к виду

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial^{n}s(t_1,l)}{\partial l^{n}}\frac{\partial^{n}s(t_2,l)}{\partial l^{n}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2. \tag{15}$$

В результате, учитывая (9), из (13) получаем $a_k(l) = 0$ при $k = 2p+1$ и $p \leqslant m$.

Положим теперь $k = 2p$ и, рассуждая аналогично (12), имеем

$$a_{2p}(l) = \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\frac{d}{dl}\left[\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial^{i-1}s(t_1,l)}{\partial l^{i-1}}\frac{\partial^{k-i}s(t_2,l)}{\partial l^{k-i}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2\right]+$$

$$+(-1)^p\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial^{p}s(t_1,l)}{\partial l^{p}}\frac{\partial^{p}s(t_2,l)}{\partial l^{p}}\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2. \tag{16}$$

Аналогично показанному выше слагаемые суммы равны нулю. В результате имеем $a_k(l) = (-1)^p\cdot b_p$ при $k = 2p$ и $p \leqslant m$, что и подтверждает справедливость выражения (10).

Остаточный член Q в (10) определяется как остаточный член обычного разложения Тейлора.

Из выражения (10) следует, что сигнальная функция неэнергетического параметра может быть представлена в виде степенного ряда по четным степеням разности аргументов, коэффициентами которого являются энергии производных сигнала по параметру l.

Таким образом, при довольно общих условиях, которые, как правило, выполняются для практически используемых сигналов и неэнергетических параметров, сигнальная функция зависит только от модуля разности аргументов и, следовательно, шумовая составляющая на выходе оптимального приемника будет стационарной случайной функцией параметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, 2, Изд. Советское радио, 1962.
2. К. Хелстром, Статистическая теория обнаружения сигналов, ИЛ, 1963.
3. П. А. Бакут и др., под ред. Г. П. Тартаковского, Вопросы статистической теории радиолокации, 2, Изд. Советское радио, 1964.
4. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, Изд. Советское радио, 1966.
5. Е. И. Куликов, Радиотехника, 1962, 17, 7, 3.

Поступило в редакцию
28 III 1968

1. Кремер И. Я, Владимиров В.И, Карпухин В.И. „Модулирующие помехи и приём радиосигналов". „Сов. радио" 1972