3

3

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1969

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
№ 1 1969

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ ПРИЕМЕ НА ФОНЕ ШУМА С ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Е. И. КУЛИКОВ, А. П. ТРИФОНОВ

(Воронеж)

Получена рекуррентная формула, позволяющая вычислить апостериорную плотность вероятности оцениваемого параметра сигнала при приеме на фоне нестационарного некоррелированного шума, спектральная плотность которого представляет собой марковский случайный процесс с заданными коэффициентами сноса и диффузии.

В ряде задач радиотехники и автоматики возникает вопрос о построении оптимальной системы для приема сигнала на фоне помех с флуктуирующей интенсивностью. В связи с этим рассмотрим синтез подобной системы применительно к задаче оценки параметра сигнала на фоне нестационарного некоррелированного нормального шума с флуктуирующей спектральной плотностью.

Итак, пусть на входе синтезируемого приемного устройства имеется аддитивная смесь

$$y(t) = s(t, l_0) + n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь $s(t, l_0)$ — сигнал, содержащий оцениваемый параметр l_0; $n(t)$ — нестационарный нормальный шум с нулевым средним значением и функцией корреляции $K(t_1, t_2) = {}^1/_2\, N(t_1)\delta(t_1 - t_2)$, причем спектральная плотность $N(t)$ является марковским случайным процессом с коэффициентом сноса $a(N)$ и коэффициентом диффузии $b(N)$.

Примером подобного нестационарного некоррелированного нормального шума может служить процесс вида $n(t) = \sqrt{N(t)}\,\xi(t)$, где $\xi(t)$ — белый шум с единичной спектральной плотностью, а $N(t)$ — функция, описывающая флуктуации спектральной плотности процесса $n(t)$ и являющаяся реализацией марковского процесса.

Для оптимальной оценки параметра l_0 необходимо вычислить апостериорную плотность вероятности $W_{ps}(l)$. Разобьем интервал наблюдения $[0; T]$ на $m+1$ точек t_i так, что $\Delta = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. При этом Δ выберем значительно меньше времени корреляции процесса $N(t)$. Обозначим $y_i = y(t_i)$; $N_i = N(t_i)$; $W_{pr}(l)$ — априорное распределение параметра l; $W(y_0, y_1, \ldots, y_m / l)$ — функция правдоподобия. Тогда апостериорная плотность вероятности имеет вид

$$W_{ps}(l) = kW_{pr}(l)\, W(y_0, y_1, \ldots, y_m / l), \tag{2}$$

где k — постоянный нормирующий множитель.

Вероятность получить совокупность величин $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ зависит не только от значения параметра l, но и от соответствующих значений спектральной плотности $(N_0, N_1, \ldots, N_m)$. Следовательно,

$$W(y_0, y_1, \ldots, y_m) = \int \cdots \int W(y_0, y_1, \ldots, y_m / l; N_0, N_1, \ldots, N_m)\, W(N_0, N_1, \ldots, N_m) \times \\ \times dN_0 dN_1 \ldots dN_m, \tag{3}$$

где $W(N_0, N_1, \ldots, N_m)$ — $m+1$-мерная плотность вероятности спектральной плотности $N(t)$. Учитывая, что шум $n(t)$ дельта-коррелирован, получаем

$$W(y_0, y_1, \ldots, y_m / l; N_0, N_1, \ldots, N_m) = \\ = (\Delta / \pi)^{(m+1)/2} \prod_{i=0}^{m} \{N_i^{-1/2} \exp(-X_i^2 \Delta / N_i)\}, \tag{4}$$

где

$$X_i^2 = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} [y(t) - s(t, l)]^2 \, dt.$$

Так как $N(t)$ является марковским процессом, можно записать

$$W(N_0, N_1, \ldots, N_m) = W_0(N_0) W(N_1 / N_0) \ldots W(N_{i+1} / N_i) \ldots W(N_m / N_{m-1}), \qquad (5)$$

где $W_0(N_0)$ — начальное распределение $N(t)$; $W(N_m / N_{m-1})$ — вероятность перехода.

Поскольку непосредственно вычислить многомерный интеграл (3) не представляется возможным, рассмотрим вспомогательную функцию $F_{i+1}(N_{i+1})$, которую определим следующим образом:

$$F_{i+1}(N_{i+1}) = \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^{-(i+2)/2} \int \ldots \int W(y_0, y_1, \ldots, y_{i+1} / l;\ N_0, N_1, \ldots, N_{i+1}) W_0(N_0) \times$$
$$\times W(N_1 / N_0) \ldots W(N_{i+1} / N_i) \, dN_0 dN_1 \ldots dN_i. \qquad (6)$$

Выписав выражения для $F_{i+1}(N_{i+1})$ и $F_i(N_i)$ в явном виде, получим

$$F_{i+1}(N_{i+1}) = N_{i+1}^{-1/2} \exp(-X_{i+1}^2 \Delta / N_{i+1}) \int F_i(N_i) W(N_{i+1} / N_i) \, dN_i. \qquad (7)$$

Как показано в [1, 2], используя уравнение Фоккера — Планка при малых Δ, можем записать (7) при помощи дифференциального оператора

$$F_{i+1}(N) = N^{-1/2}(1 - Z_{i+1}^2 \Delta / N) F_i(N) +$$
$$+ N^{-1/2} \left\{ \frac{\Delta}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} [b(N) F_i(N)] - \Delta \frac{\partial}{\partial N} [a(N) F_i(N)] \right\}, \qquad (8)$$

где $Z_i^2 = [y(i\Delta) - s(i\Delta, l)]^2$, $F_0(N) = N^{-1/2}(1 - Z_0^2 \Delta / N) W_0(N)$.

При помощи рекуррентной формулы (8) можем вычислить функцию $F_m(N)$. Тогда выражение для апостериорной плотности вероятности (2) примет вид

$$W_{ps}(l) = k_1 W_{pr}(l) \int F_m(N) \, dN. \qquad (9)$$

Для $s(t, l) = 0$ непосредственно получаем апостериорную плотность вероятности для значений спектральной плотности N в точке $t = T$

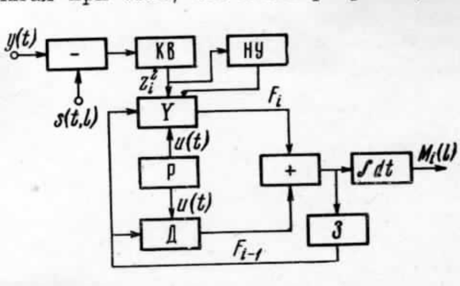
$$W_{ps}(N_m) = k_2 W_{pr}(N_m) F_m(N_m). \qquad (10)$$

В выражениях (8) и (9) k_1 и k_2 — несущественные постоянные; $W_{pr}(N_m)$ — априорное распределение N_m. Если $N(t)$ — стационарный процесс, то $W_{pr}(N_m) = W_0(N)$.

Пусть оценка параметра сигнала производится по методу максимума функции правдоподобия. Тогда, воспользовавшись методом, изложенным в [3], можем найти дисперсию оценки параметра $\sigma^2(l)$, предполагая при этом, что апостериорное распределение $W_{ps}(l)$ при достаточно больших отношениях сигнал / шум (выполняются условия надежной оценки) является гауссовым распределением. В этом случае

$$\sigma^2(l) = -\left\langle \left[\frac{\partial^2 \ln W_{ps}(l)}{\partial l^2} \right]_{l_0}^{-1} \right\rangle, \qquad (11)$$

где усреднение производится по всем возможным значениям $n(t)$.



Последовательность функций $F_{i+1}(N)$, входящих в выражение для апостериорной плотности вероятности (9), можно получить как функции времени при помощи структурной схемы, приведенной на фигуре. Генератор развертки P вырабатывает пилообразное напряжение

$$u(t) = (u_0 / \Delta)(i\Delta - t) \qquad (i-1)\Delta < t < i\Delta$$

где u_0 — выбирается из условия $\int\limits_0^{u_0} W_{st}(N) \, dN = 1 - \varepsilon$; причем ε — достаточно малая величина, задаваемая из допустимой погрешности моделирования, а $W_{st}(N)$ — стационарное априорное распределение $N(t)$; квадратор *КВ* вырабатывает импульсы длительностью Δ и амплитудой Z_i^2; блок ввода начальных условий *НУ* работает в течение интервала $[0; \Delta]$, а затем выключается; *З* — блок задержки на величину Δ:

У — усилитель с коэффициентом усиления $[u(t)]^{-1/2}[1 - Z_{i+1}{}^2\Delta / u(t)]$; *Д* — блок дифференцирования, выполняющий операцию $\Delta [u(t)]^{-1/2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta}{u_0} \right]^2 \frac{d^2}{dt^2} \left[b(u(t))\, F_i(t) \right] + \right.$ $\left. + \frac{\Delta}{u_0} \frac{d}{dt} \left[a(u(t))\, F_i(t) \right] \right\}$; *В* — выходной блок, производящий интегрирование по времени, что равносильно интегрированию по N в (9) (с точностью до постоянного множителя); $M_i(l) = \text{const}\, W(y_0, y_1, \ldots, y_i / l)$.

Если схема, приведенная на фигуре, используется для оптимального измерения мгновенного значения спектральной плотности рассматриваемого типа шума по методу максимума апостериорной вероятности, то нетрудно получить и выражение для дисперсии оценки спектральной плотности (в гауссовом приближении). Для этого достаточно разложить логарифм апостериорной плотности вероятности (10) в ряд Тейлора в окрестностях N_m до второй производной.

Таким образом, синтезированная структурная схема приема сигнала на фоне аддитивного нестационарного некоррелированного нормального шума с флуктуирующей спектральной плотностью дает возможность производить не только оптимальную оценку неизвестного параметра сигнала, но и оптимальную оценку спектральной плотности. Кроме этого, приведенная схема может быть использована и для обнаружения сигнала.

Следует также отметить, что все изложенное выше можно обобщить на совместную оценку нескольких параметров сигнала, а также на оценку параметров при приеме радиосигналов со случайными амплитудами и начальными фазами.

Поступило 18 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. «Сов. радио», 1966.
2. Стратонович Р. Л. Применение процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов. Радиотехника и электроника, 1960, 5, вып. 11.
3. Стратонович Р. Л. Оптимальные нелинейные системы, осуществляющие выделение сигнала с постоянными параметрами из шума. Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика, 1959, 11, № 6.