РАДИОТЕХНИКА

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

10

1969

РАДИОТЕХНИКА

ОРГАН
НАУЧНО-
ТЕХНИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА
РАДИОТЕХНИКИ,
ЭЛЕКТРОНИКИ
И СВЯЗИ
им. А. С. ПОПОВА

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Радиотехника, т. 24, № 10, 1969 г.

621.391.822

Е. И. КУЛИКОВ, А. П. ТРИФОНОВ
действительные члены Общества

КВАЗИОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ ПРИЕМЕ НА ФОНЕ НОРМАЛЬНЫХ ШУМОВ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ КОРРЕЛЯЦИИ

При решении задач оптимального приема сигналов на фоне шумов обычно полагают, что статистические характеристики шумов априори полностью известны. Вместе с тем в условиях, близких к реальным, полные сведения о характеристиках помех отсутствуют. Однако в подавляющем числе случаев можно считать, что эти помехи являются нормальными и в течение времени наблюдения сигнала $[0, T]$ их можно рассматривать квазистационарными.

Итак, пусть на вход приемного устройства в течение интервала времени $[0, T]$ поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t, l_0) + n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

состоящая из нормального шума $n(t)$ с нулевым средним значением $\langle n(t) \rangle = 0$ и детерминированного сигнала $s(t, l_0)$, значение параметра которого l_0 необходимо оценить с минимальной погрешностью. Будем полагать, что шум $n(t)$ дифференцируем необходимое число раз и в течение интервала $[0, T]$ его можно рассматривать как стационарный с некоторой функцией корреляции $\langle n(t)\, n(t+\tau) \rangle = K(\tau)$, которая априори неизвестна наблюдателю.

В дальнейшем ограничимся оценкой только неэнергетических параметров, т. е. параметров, от конкретных значений которых не зависит энергия принимаемого сигнала. В этом случае оптимальное приемное устройство должно образовать логарифм функции правдоподобия вида

$$M(l) = \int_0^T x(t)\, v(t, l)\, dt. \tag{2}$$

Здесь $v(t, l)$ представляет собой опорный сигнал местного гетеродина корреляционного приемного устройства и является решением интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t - t_1)\, v(t_1, l)\, dt_1 = s(t, l). \tag{3}$$

Если время наблюдения T значительно больше времени корреляции шума, то решение (3) можно получить с помощью преобразования Фурье [1]

$$v(t, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega, l)}{K(\omega)}\, e^{i \omega t}\, d\omega, \tag{4}$$

где $S(\omega, l)$ и $K(\omega)$ — преобразования Фурье соответственно от полезного сигнала $s(t, l)$ и функции корреляции шума $K(\tau)$. При этом предполагается, что отношение этих преобразований $S(\omega, l)/K(\omega)$ удовлетворяет условиям существования решения (3) в виде (4) [3].

Поскольку функция корреляции шума неизвестна, то систему оценки параметра сигнала можно получить, производя оценку функции корреляции шума и соответственно перестраивая опорный сигнал гетеродина. Для получения оценки функции корреляции шума воспользуемся разложением функции корреляции дифференцируемого случайного процесса по дисперсиям его производных

$$K(\tau) \approx K_{\nu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \sigma_k^2 \tau^{2k}/(2k)!, \tag{5}$$

где

$$\sigma_k^2 = \left< \left[\frac{d^k n(t)}{dt^k} \right]^2 \right> \tag{6}$$

— дисперсия k-й производной шума. Ряд (5) при $\nu \to \infty$ сходится к $K(\tau)$, если спектр шума ограничен и выполняется условие [4] $\int_0^{\infty} |K(\omega)\, e^{\alpha\omega}|\, d\omega < \infty$, $\alpha > 0$. Условие ограниченности спектра шума не является слишком жестким, так как любые реальные измерения случайных процессов возможны лишь в конечной полосе частот, обусловленной возможностями применяемой аппаратуры и различными физическими причинами.

Так как для любой функции корреляции стационарного случайного процесса существует такое значение τ_0, что $\int_{\tau_0}^{\infty} |K(\tau)|\, d\tau = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная малая величина, то $K(\tau)$ можно аппроксимировать так:

$$K(\tau) \simeq K_{\nu}(\tau) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\nu} (-1)^k \sigma_k^2 \tau^{2k}/(2k)! & \text{при } |\tau| \leqslant \tau_0, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_0 \end{cases} \tag{7}$$

и искать структуру приемного устройства для функции корреляции в виде (7). Следует отметить, что количество слагаемых в (7), необходимое для аппроксимации $K(\tau)$ с достаточной точностью, сравнительно невелико [4].

Полагая $T \gg \tau_0$ и используя [6], имеем

$$v_{\nu}(t, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega, l)}{K_{\nu}(\omega)}\, e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{8}$$

где

$$K_{\nu}(\omega) = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \sigma_k^2 F_k(i\omega), \tag{9}$$

$$F_k(i\omega) = \sum_{i=0}^{2k} \frac{\tau_0^{2k-i}}{(2k-i)!\,(i\omega)^{i+1}} \left[(-1)^i e^{i\omega\tau_0} - e^{-i\omega\tau_0} \right].$$

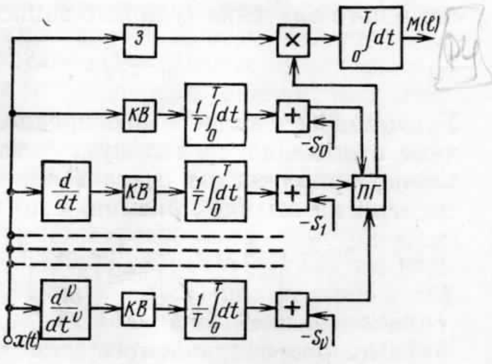
Для получения оценок дисперсий производных шума рассмотрим величины:

$$X_k = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]^2 dt, \quad S_k = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left[\frac{d^k s(t,\ l)}{dt^k}\right]^2 dt, \tag{10}$$

прямо пропорциональные мощности k-х производных соответственно принимаемой смеси $x(t)$ (1) и полезного сигнала $s(t,\ l)$. В качестве оценки дисперсии k-й производной шума примем величину

$$\sigma_k^2(T) = X_k - S_k. \tag{11}$$

В результате структуру приемного устройства для измерения параметра l можно представить в виде, показанном на рис. 1, где *3* — блок, осуществляющий задержку смеси сигнала и шума на величину длительности интервала наблюдения T; *КВ* — квадраторы; *ПГ* — подстраиваемый генератор, вырабатывающий оценку опорного сигнала $v_\nu(t,\ l)$ согласно (8), где σ_k^2 заменены их оценками $\sigma_k^2(T)$; остальные обозначения вполне понятны из надписей на рисунке.



Если количество слагаемых в (7) таково, что функция корреляции аппроксимируется с достаточной точностью, то приемное устройство, представленное на рисунке, отличается от оптимального лишь тем, что в выражении для опорного сигнала местного гетеродина (8) значения σ_k^2 заменены их оценками.

Рассмотрим свойства оценок σ_k^2. Учитывая введенные обозначения (6), (10) и (11), нетрудно показать, что $<\Delta\sigma_k^2> = <\sigma_k^2(T) - \sigma_k^2> = 0$, т. е. оценки дисперсий производных шума k-го порядка являются несмещенными. Кроме того, при выполнении условия $T \gg \tau_0$ согласно [5]

$$\frac{<[\Delta\sigma_k^2]^2>}{\sigma_k^4} \ll 1, \tag{12}$$

и $\Delta\sigma_k^2$ распределено асимптотически по нормальному закону.

Подставляя в (8) и (9) вместо точных значений дисперсий производных шума σ_k^2 их оценки $\sigma_k^2(T) = \sigma_k^2 + \Delta\sigma_k^2$, получим оценку для опорного сигнала $v_\nu(t,\ l)$: $\quad v_{\nu T}(t,\ l) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega,\ l)}{K_\nu(\omega) + \Delta K_\nu(\omega)} e^{i\omega t} d\omega.$

Здесь $\Delta K_\nu(\omega)$ определяется из выражения (9) при замене σ_k^2 на $\Delta\sigma_k^2$.

Используя формулу бинома и условие (12), после преобразований получим

$$K\ v_{\nu T}(t,\ l) = v_\nu(t,\ l) - \Delta v(t,\ l),$$

где

(-1) $\qquad$ $(-1)^K$

$$\Delta v(t,\ l) = \sum_{k=0}^{\nu} \Delta\sigma_k^2 \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega,\ l)\, F_k(i\omega)}{K_\nu^2(\omega)} e^{i\omega t} d\omega = \sum_{k=0}^{\nu} \Delta\sigma_k^2 G_k(t,\ l).$$

Функция $\Delta v(t,\ l)$ является случайной, так как входящие в нее величины $\Delta\sigma_k^2$ тоже случайны; в соответствии с ранее сказанным она имеет нулевое среднее значение и распределена по нормальному закону.

Вводя новые обозначения, выходной сигнал приемного устройства (2) можно представить так:

$$M(l)=\int_0^T [s(t,\ l_0)+n(t)]\,[v_\nu(t,\ l)-\Delta v(t,\ l)]\,dt.$$

Пусть оценка параметра l осуществляется по положению максимума максиморума выходного сигнала приемника $M(l)$, т. е. оценка l_m является решением уравнения правдоподобия $[dM(l)/dl]_{l_m}=0$. Тогда, полагая отношение сигнал/шум достаточно большим и ограничиваясь в первом приближении тремя членами разложения функции $M(l)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $l=l_0$, отклонение оценки l_m относительно истинного значения l_0 можно записать в виде [2]

$$l_m-l_0=-\left[\frac{dM(l)}{dl}\Big/\frac{d^2M(l)}{dl^2}\right]_{l_0}. \tag{13}$$

Учитывая сделанное выше предположение о достаточно большой величине отношения сигнал/шум, а также условие (12), знаменатель (13) можно приближенно считать равным второй производной от полезного сигнала на выходе приемника по параметру l в точке l_0:

$$\left[\frac{d^2M(l)}{dl^2}\right]_{l_0}\approx\left[\frac{\partial^2}{\partial l^2}\int_0^T s(t,\ l_0)\,v_\nu(t,\ l)\,dt\right]_{l_0}=S''(l_0).$$

Для рассматриваемого класса неэнергетических параметров полезный сигнал (сигнальная функция) $S(l)$ является четной функцией относительно точки $l=l_0$ и зависит лишь от модуля разности $|l-l_0|$ [7].

Усреднив числитель (13), получаем, что оценка параметра l по максимуму максиморуму выходного сигнала приемного устройства, показанного на рисунке, в первом приближении является несмещенной, т. е. $<l_m-l_0>=0$.

Выражение для дисперсии оценки параметра при этом имеет вид

$$\sigma_T^2(l)=<(l_m-l_0)^2>=\frac{\left[\dfrac{\partial^2}{\partial l_1\,\partial l_2}<M(l_1)\,M(l_2)>\right]_{l_0}}{[S''(l_0)]^2}. \tag{14}$$

Для вычисления дисперсии оценки (14) необходимо найти второй смешанный момент выходного сигнала приемника $M(l)$. Опуская весьма громоздкие, но несложные преобразования, необходимые для вычисления момента $<M(l_1)\,M(l_2)>$, а также произведя дифференцирование согласно (14), выражение для дисперсии оценки параметра можно представить в виде $\sigma_T^2(l)=\sigma^2(l)+\Delta\sigma^2(l)$, где $\sigma^2(l)=-[S''(l_0)]^{-1}$ — дисперсия оценки параметра сигнала при оптимальном его приеме в нормальном шуме с известной функцией корреляции, а $\Delta\sigma^2(l)$ [ν достаточно большое и ошибка за счет аппроксимации (6) пренебрежимо мала] определяется выражением

$$\Delta\sigma^2(l)=[S''(l_0)]^{-2}\left\{\sum_{k,\ i=0}^{\nu}\frac{\partial^2}{\partial l_1\,\partial l_2}\int_0^T\!\!\int_0^T A_{ki}(t_1,\ t_2)\,G_k(t_1,\ l_1)\,G_i(t_2,\ l_2)\,dt_1\,dt_2-\right.$$

$$-2\sum_{k=0}^{\nu}\frac{\partial^2}{\partial l_1\,\partial l_2}\int_0^T\!\!\int_0^T b_k(t_1)\,\boxed{b_k(t_2)\,[s(t_1,\ l_0)\,G_k(t_1,\ l_1)\,v_\nu(t_2,\ l_2)}\,*$$

$$\left.*\,s(t_2,\ l_0)\,G_k(t_2,\ l_2)\,v_\nu(t_1,\ l_1)]\,dt_1\,dt_2,\right\}_{l_0}$$

где

$$A_{ki}(t_1, t_2) = a_{ki}[K(t_1 - t_2) + s(t_1, l_0)\, s(t_2, l_0)] + 2b_k(t_1)\, b_i(t_2),$$

$$a_{ki} = \frac{2}{T^2}\int_0^T\!\!\int_0^T \frac{\partial^{k+i} K(t_1 - t_2)}{\partial t_1^k\, \partial t_2^i}\left[\frac{\partial^{k+i} K(t_1 - t_2)}{\partial t_1^k\, \partial t_2^i} + 4\,\frac{\partial^k s(t_1, l_0)}{\partial t_1^k}\,\frac{\partial^i s(t_2, l_0)}{\partial t_2^i}\right] dt_1\, dt_2,$$

$$b_k(t) = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{\partial^k K(t_1 - t)}{\partial t_1^k}\,\frac{\partial^k s(t_1, l_0)}{\partial t_1^k}\, dt_1.$$

Величина $\Delta\sigma^2(l)$ показывает ухудшение качества оценки за счет ошибок измерения априори неизвестной функции корреляции шума.

Для рассматриваемого квазистационарного шума при $T \to \infty$ $\lim a_{ki} = 0$ и $\lim b_{ki} = 0$. Поэтому можно сделать вывод, что структура рассматриваемого приемного устройства асимптотически оптимальна.

Определение среднего смещения и дисперсии оценки параметра сигнала для произвольных значений интервала наблюдения $[0, T]$ в достаточно простой форме не представляется возможным в связи с трудностями, возникающими при решении ур-ния (3) и усреднении случайного отклонения оценки.

В рассмотренной структуре приемного устройства (см. рисунок) предполагается задержка принимаемой смеси сигнала и шума на величину длительности T (блок *3*) для получения более точных оценок дисперсий производных шума. Если подобная задержка нежелательна, то в качестве оценок дисперсий производных шума можно использовать величины $\sigma_k^2(t)$, равные

$$\sigma_k^2(t) = X_k(t) - S_k(t),$$

где

$$X_k(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]^2 dt, \quad S_k(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \left[\frac{d^k s(t, l)}{dt^k}\right]^2 dt.$$

Соответственно изменится и блок-схема приемного устройства. Однако и в этом случае приемное устройство будет асимптотически оптимальным, но скорость сходимости его к оптимальному будет меньшей, чем при использовании оценок $\sigma_k^2(T)$.

Если необходимо оценивать параметр сигнала с неизвестной начальной фазой, то схема устройства незначительно усложнится (аналогично оптимальному приему в нормальных шумах с известной функцией корреляции).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Хелстром. Статистическая теория обнаружения сигналов. ИЛ, 1963.
2. Е. И. Куликов. «Радиотехника», т. 17, 1962, № 7.
3. Е. И. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.
4. В. И. Савельев. «Автоматика и телемеханика», т. 28, 1967, № 7.
5. Статья в сборнике «Определение параметров случайных процессов». Пер. с англ. Гостехиздат УССР, 1962.
6. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
7. Е. И. Куликов и А. П. Трифонов. «Радиотехника и электроника», т. XIII, 1968, № 11.

Статья поступила 23 апреля 1968 г., после доработки — 10 декабря 1968 г.