(6) (6)

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

Радиоэлектроника

ТОМ XIII
2
1970

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ 50-ЛЕТИЯ ВЕЛИКОЙ
ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ

УДК 621.391.8

Е. И. КУЛИКОВ, А. П. ТРИФОНОВ

ВЛИЯНИЕ АПРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗЫ ПРИ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРА УЗКОПОЛОСНОГО РАДИОСИГНАЛА НА ФОНЕ ШУМОВ

Рассматривается влияние априорного знания о распределении начальной фазы узкополосного радиосигнала при оптимальной оценке его неэнергетического параметра на фоне аддитивного стационарного нормального шума. Сравниваются дисперсии оценок параметра при приеме радиосигнала соответственно с известной, неизвестной детерминированной и случайной (с равномерным и неравномерным распределениями) начальными фазами. Предложена схема квазиоптимального приема. Полученные общие соотношения иллюстрируются на примере оценки частоты прямоугольного радиоимпульса на фоне белого шума.

В практике приема узкополосных радиосигналов в различных приложениях радиотехники (радиосвязь, радиолокация, радиотелеуправление и др.) представляет интерес определить влияние априорного знания о начальной фазе на точность оптимальной оценки параметров этих сигналов на фоне нормальных шумов. В связи с этим рассмотрим следующую задачу.

Пусть на вход приемного устройства в течение времени $[0; T]$ поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t, l_0, \varphi_0) + n(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

состоящая из узкополосного радиосигнала

$$s(t, l_0, \varphi_0) = F(t, l_0) \cos[\omega_0 t + \psi(t, l_0) - \varphi_0] \tag{2}$$

и стационарного нормального шума $n(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $\langle n(t_1)\, n(t_2) \rangle = K(t_1 - t_2)$. В (2) $F(t, l_0)$ и $\psi(t, l_0)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции, в общем случае зависящие от оцениваемого параметра l_0; φ_0 — начальная фаза.

В дальнейшем будем предполагать, что оцениваемый параметр l относится к классу неэнергетических параметров, то есть энергия полезного сигнала не зависит от конкретного значения параметра, а оценка параметра l_m производится по максимуму функции правдоподобия или ее логарифма.

При приеме сигнала (2) возможны три основных случая относительно априорного знания о начальной фазе φ_0.

1. Начальная фаза φ_0 известна точно.

2. а) начальная фаза φ_0 — детерминированная неизвестная величина, б) начальная фаза φ_0 предполагается случайной величиной с равномерным распределением на интервале $[0; 2\pi]$.

3. Начальная фаза φ_0 — случайная величина, имеющая известное априорное распределение, отличное от равномерного.

Рассмотрим эти случаи.

1. Структура оптимального приемного устройства определяется выражением [1] (логарифм функции правдоподобия параметра l)

$$M_1(l) = \int_0^T x(t)\, v(t, l, \varphi_0)\, dt, \tag{3}$$

где $v(t, l, \varphi_0)$ — решение уравнения

$$\int_0^T K(t_1 - t_2)\, v(t_1, l, \varphi_0)\, dt_1 = s(t_2, l, \varphi_0). \tag{4}$$

При этом доказывается, что среднее смещение оценки равно нулю, а дисперсия оценки определяется выражением

$$\sigma_1^2 = -\left[\frac{d^2}{dl^2} S(l)\right]_{l_0}^{-1}, \tag{5}$$

где

$$S(l) = \int_0^T s(t, l_0, \varphi_0)\, v(t, l, \varphi_0)\, dt.$$

Для рассматриваемого класса узкополосных радиосигналов решение уравнения (4) можно представить в виде [2]

$$v(t, l, \varphi_0) = V(t, l) \cos[\omega_0 t + \psi(t, l) - \varphi_0]. \tag{6}$$

Тогда, пренебрегая интегралом от члена с удвоенной частотой в выражении для $S(l)$, (5) можно записать в виде

$$\sigma_1^2 = -\left[\frac{d^2}{dl^2} S_c(l)\right]_{l_0}^{-1}, \tag{7}$$

где

$$S_c(l) = \frac{1}{2}\int_0^T F(t, l_0)\, V(t, l) \cos[\psi(t, l) - \psi(t, l_0)]\, dt. \tag{8}$$

2. а) Если априорная информация о фазе отсутствует и в процессе приема сигнала в качестве априорного значения φ_0 используется ее оценка по максимуму правдоподобия, то оптимальное приемное устройство должно образовать функцию [3]

$$M_{2a}(l) = R(l), \tag{9 a}$$

где

$$R(l) = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$X = \int_0^T x(t)\, V(t, l) \cos[\omega_0 t + \psi(t, l)]\, dt, \tag{10}$$

$$Y = \int_0^T x(t)\, V(t, l) \sin[\omega_0 t + \psi(t, l)]\, dt.$$

б) Если начальная фаза предполагается случайной и равномерно распределенной на интервале $[0;\ 2\pi]$, то оптимальный приемник вырабатывает сигнал вида [2]

$$M_{2б}(l) = \ln I_0[R\ (l)], \tag{9 б}$$

где $I_0\ (R)$ — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента.

Так как $I_0\ (R)$ — монотонная функция, то оценки по (9а) и (9б) совпадают. Соответственно в обоих случаях оценка будет несмещенной, а дисперсия определяется выражением

$$\sigma_2^2 = -\left[\frac{d}{dl^2}\sqrt{S_c^2 + S_s^2}\right]_{l_0}, \tag{11}$$

где S_c находится из (8), а

$$S_s = S_s(l) = \frac{1}{2}\int_0^T F\ (t,\ l_0)\ V\ (t,\ l)\ \sin\left[\psi\ (t,\ l) - \psi\ (t,\ l_0)\right] dt. \tag{12}$$

3. При рассмотрении третьего случая положим, что начальная фаза φ имеет априорное распределение вероятности вида [1]

$$w_{pr}\ (\varphi) = \begin{cases} \exp\left[A \cos\ (B - \varphi)\right] / \left[2\pi I_0\ (A)\right], & |B - \varphi| \leqslant \pi, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, & |B - \varphi| > \pi, \end{cases}$$

где A и B — известные параметры, определяющие «ширину» и положение пика априорного распределения начальной фазы. При этом можно показать, что структура оптимального приемного устройства будет определяться выражением

$$M_3\ (l) = \ln I_0[F\ (l)],$$

где

$$F\ (l) = \sqrt{(X + A\cos B)^2 + (У + A\sin B)^2}, \tag{14}$$

а X и $У$ определяются из (10).

Оценка неэнергетического параметра и в этом случае оказывается несмещенной, а дисперсия оценки может быть определена как

$$\sigma_3^2 = -\left[\frac{d^2}{dl^2}\sqrt{S_c^2 + S_s^2 + 2AS_cI_1(A)/I_0(A) + A^2}\right]_{l_0}^{-1}. \tag{15}$$

Здесь S_c и S_s находятся соответственно из (8) и (12), $I_1\ (A)$ — функция Бесселя первого порядка мнимого аргумента.

Следует отметить, что формулы (7), (11) и (15) являются лишь первыми приближениями для дисперсии оценки, т. е. они справедливы лишь с точностью до величины, обратной отношению сигнал/шум

$$Q = \int_0^T s\ (t,\ l,\ \varphi)\ v\ (t,\ l,\ \varphi)\ dt.$$

Сравним полученные значения дисперсий σ_1^2, σ_2^2 и σ_3^2, т. е. определим влияние априорной информации о начальной фазе радиосигнала на дисперсию оценки неэнергетического параметра. Для того, чтобы можно было провести такое сравнение, выполним операции дифференцирования в знаменателе (11) и (15), учитывая, что [2]

$$\left[\frac{dS}{dl}\right]_{l_0} = \left[\frac{d}{dl}\sqrt{S_c^2 + S_s^2}\right]_{l_0} = 0,\ S_s(l_0) = 0.$$

В результате имеем

$$\sigma_2^2 = -\left\{\frac{d^2S_c}{dl^2} + \frac{1}{S_c}\left[\frac{dS_s}{dl}\right]^2\right\}_{l_0}^{-1} \tag{16}$$

или, вынося вторую производную от S_c за скобки и учитывая (7),

$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2\ \alpha_1, \tag{17}$$

где

$$\alpha_1 = \left[1 + \frac{(dS_s/dl)^2}{S_c\,(d^2S_c/dl^2)}\right]_{l_0}^{-1}.$$

Так как для неэнергетического параметра всегда выполняется условие $[d^2S_c/dl^2]_{l_0} < 0$, то $\alpha_1 \geqslant 1$ и $\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$.

Коэффициент α_1 в (17) показывает увеличение дисперсии оценки неэнергетического параметра, вызванное отсутствием априорной информации о начальной фазе.

Для σ_3^2 после дифференцирования по l будем иметь

$$\sigma_3^2 = \left\{\frac{\sqrt{S_c^2 + A^2 + 2AS_c\cdot I_1(A)/I_0(A)}}{-S_c\left[\frac{dS_c}{dl^2} + \frac{1}{S_c}\left(\frac{dS_c}{dl}\right)^2\right] - \frac{d^2S_c}{dl^2}\,AI_1(A)/I_0(A)}\right\}_{l_0}. \tag{18}$$

С учетом (16) и (17) можем переписать (18) в виде

$$\sigma_3^2 = \sigma_1^2\cdot\alpha_1\left[\frac{\sqrt{S_c^2 + A^2 + 2AS_cI_1(A)/I_0(A)}}{S_c + \alpha_1 AI_1(A)/I_0(A)}\right]_{l_0}. \tag{19}$$

Преобразуя выражение в фигурных скобках, получаем

$$\sigma_3^2 = \sigma_1^2\alpha_2 = \sigma_1^2\alpha_1\gamma = \sigma_2^2\gamma, \tag{20}$$

где

$$\gamma = \left[1 - \frac{2S_cA\,(\alpha_1 - 1)\,I_1(A)/I_0(A) + A^2\,[\alpha_1^2I_1^2(A)/I_0^2(A) - 1]}{S_c^2 + 2S_cA\alpha_1I_1(A)/I_0(A) + \alpha_1^2A^2I_1^2(A)/I_0^2(A)}\right]_{l_0}^{\frac{1}{2}}.$$

При этом $\gamma \leqslant 1$. Нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{A\to 0}\gamma = 1$, т. е. если априорное распределение становится равномерным, то $\sigma_3^2 = \sigma_2^2$. При $A \to \infty$ априорное распределение фазы (13) вырождается в дельта-функцию, $\lim\limits_{A\to 0}\gamma = 1/\alpha_1$ и $\sigma_3^2 = \sigma_1^2$.

В общем случае можно записать

$$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_3^2 \leqslant \sigma_2^2. \tag{21}$$

Таким образом, отсутствие априорной информации о начальной фазе радиосигнала ведет к определенным потерям при оценке неэнергетического параметра, которые можно уменьшить, если известно неравномерное распределение фазы. В частности коэффициент γ показывает уменьшение дисперсии оценки параметра при учете неравномерности априорного распределения начальной фазы, так как $\sigma_3^2 = \sigma_2^2\gamma$, $\gamma \leqslant 1$.

Очевидно, найдя величины α_1 и γ в конкретных задачах, можно определить, имеет ли смысл учитывать величину начальной фазы при оценке параметра, т. е. можно ли получить, например, заметный выигрыш, если использовать сигналы с известной начальной фазой или учитывать неравномерность априорного распределения фазы.

Определенный интерес представляет также следующий случай: начальная фаза случайна и распределена неравномерно, причем «ширина» пика априорного распределения фазы относительно мала, т. е. велика величина параметра A. Для этой ситуации можно предложить квазиоптимальную оценку параметра l, а именно, находить оценку параметра по максимуму максиморуму величины

$$M_4(l) = \int_0^T x(t)\, v(t, l, B)\, dt, \tag{22}$$

где $v(t, l, B)$ — решение уравнения (4) при $\varphi_0 = B$.

Интуитивно ясно, что при малом разбросе φ_0 относительно B такое приемное устройство должно давать оценку с дисперсией, близкой к дисперсии оценки параметра сигнала с точно известной начальной фазой. Определим характеристики оценки при использовании (22). Для этого подставим в (22) значения $x(t)$ из (1) и $v(t, l, \varphi_0)$ из (6) с заменой φ_0 на B. Тогда получим

$$M_4(l) = S(l) + N(l), \tag{23}$$

где

$$S(l) = \int_0^l s(t, l_0, \varphi_0)\, v(t, l, B)\, dt = S_c \cos(B - \varphi_0) + S_s \sin(B - \varphi_0),$$

$$N(l) = \int_0^T n(t)\, V(t, l) \cos[\omega_0 t + \psi(t, l) - B]\, dt.$$

Полагая, что отношение сигнал/шум велико и $A > 2 \div 3$, можно записать $[< S(l_0) >]^2 \gg [< N^2(l) >]$. Угловые скобки здесь означают усреднение по $n(t)$ и φ_0.

Определим среднее смещение оценки l_m. Разлагая (23) в ряд Тейлора в окрестности l_0 и ограничиваясь первыми тремя членами, из уравнения $[dM_4(l) / dl]_{l_m} = 0$ получаем

$$\Delta l = l_m - l_0 = -\left\{ \frac{\dfrac{dN}{dl} - \dfrac{dS_s}{dl} \sin(B - \varphi_0)}{\dfrac{d^2 S_c}{dl^2} \cos(B - \varphi_0)} \right\}_{l_0}. \tag{24}$$

Здесь учтено, что

$$\left\{ < \left[\frac{d^2 S(l)}{dl^2}\right]_{l_0} > \right\}^2 \gg \left\{ < \left[\frac{dN(l)}{dl}\right]^2 > \right\}, \quad \left[\frac{dS_c}{dl}\right]_{l_0} = \left[\frac{d^2 S_s}{dl^2}\right]_{l_0} = 0.$$

Учитывая априорное распределение начальной фазы (13), для первого и второго моментов величины (24) можно записать: $< \Delta l > = 0$,

$$\sigma_4^2(l) = <\Delta l^2> = \sigma_1^2 \left\{ 1 + \left[1 - \frac{(dS_s/dl)^2}{d^2S_c/dl^2} \right]_{l_0} \frac{1}{2\pi I_0(A)} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tg}^2\, \varphi \cdot e^{A \cos \varphi}\, d\varphi \right\}. \quad (25)$$

Вычислить интеграл в правой части последнего выражения в общем случае не представляется возможным. Однако, учитывая [4], что при $A \gg 1$ $I_0(A) \simeq \exp(A) / \sqrt{2\pi A}$, из (13) получим

$$w_{pr}(\varphi_0) \simeq \sqrt{\frac{A}{2\pi}} \exp\left[-A \sin^2 \frac{(B - \varphi_0)}{2} \right]. \quad (26)$$

С возрастанием разности $|B - \varphi_0|$ функция (26) быстро убывает и при $A > 25 \div 30$ эта функция будет значительно отличаться от нуля лишь при $|B - \varphi_0| < 0{,}3 \div 0{,}4$. Но при этих значениях разности $|B - \varphi_0|$ тангенс в (25) и синус в (26) можно заменить на их аргументы. Тогда для величины (25) будем иметь

$$\sigma_4^2 = \sigma_1^2 \left\{ 1 + \left[1 - \frac{(dS_s/dl)^2}{d^2S_c/dl^2} \right]_{l_0} \cdot \frac{1}{A} \right\}$$

или, используя обозначения (17),

$$\sigma_4^2 = \sigma_1^2 \left[1 + \frac{\alpha_1 + S_c(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1 A} \right]_{l_0}. \quad (27)$$

Вводя обозначение

$$\alpha_3 = \left[1 + \frac{\alpha_1 + S_c(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1 A} \right]_{l_0},$$

получаем

$$\sigma_4^2 = \sigma_1^2 \cdot \alpha_3 \geqslant \sigma_1^2.$$

При этом $\lim\limits_{A \to \infty} \alpha_3 = 1$ для любых конечных отношений сигнал/шум, и, следовательно, для достаточно больших значений величины A квазиоптимальная оценка в соответствии с (22) будет иметь дисперсию, близкую к дисперсии оптимальной оценки параметра сигнала с точно известной начальной фазой.

В качестве примера, иллюстрирующего полученные выше основные соотношения, рассмотрим оценку частоты узкополосного радиосигнала с прямоугольной огибающей при приеме на фоне белого шума со спектральной плотностью N_0.

Пусть сигнал задан в виде

$$s(t, \omega_0, \varphi_0) = \begin{cases} a_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & t < 0,\ t > T. \end{cases}$$

Тогда решение уравнения (4) можно записать

$$v(t, \omega, \varphi) = \begin{cases} \frac{2a_0}{N_0} \cos(\omega t - \varphi), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & t < 0,\ t > T. \end{cases}$$

Соответственно из (8) и (12) получаем

$$S_c \simeq \frac{a_0^2}{N_0}\int_0^T \cos(\omega-\omega_0)\, t dt, \quad S_s \simeq \frac{a_0^2}{N_0}\int_0^T \sin(\omega-\omega_0)\, t\, dt$$

и, следовательно,

$$\sigma_1^2 = 3/Q_0T^2,\ \alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = 4\gamma,\ \alpha_3 = 1 + \frac{4+3Q_0}{4A},$$

$$\gamma = \left[1 - \frac{6Q_0AI_1(A)/I_0(A) + A^2[16I_1^2(A)/I_0^2(A) - 1]}{Q_0^2 + 8Q_0AI_1(A)/I_0(A) + 16A^2I_1^2(A)/I_0^2(A)}\right]^{1/2}, \qquad (28)$$

где $Q_0 = a_0^2T/N_0$ — отношение удвоенной энергии сигнала к спектральной плотности белого шума.

Так как $\alpha_1 = 4$, то значит, что отсутствие априорной информации о начальной фазе сигнала ведет к увеличению дисперсии оценки частоты в четыре раза.

На рис. 1 приведены зависимости $\alpha_2 = \sigma_3^2/\sigma_1^2$ (сплошные линии) и $\alpha_3 = \sigma_4^2/\sigma_1^2$ (пунктирные линии) от величины A при различных отношениях сигнал/шум Q_0.

Зависимости $\alpha_2(A)$ и $\alpha_3(A)$ показывают, что, чем больше отношение сигнал/шум, тем большим должен быть параметр A (т. е. тем меньше должна быть ширина пика априорного распределения начальной фазы), чтобы получить оценку частоты с дисперсией, близкой к дисперсии оценки частоты радиоимпульса с известной начальной фазой. Из рис. 1 также следует, что уже при $A > 0{,}5 \div 0{,}6$ приемное устройство (14) дает заметное уменьшение дисперсии оценки (зависящее от величины отношения сигнал/шум) по сравнению с дисперсией оценки по (9 а, б) ($\alpha_1 = 4$). При этом для $A > 25 \div 30$ квазиоптимальная оценка по (22) имеет дисперсию, близкую к дисперсии оптимальной оценки. Кривые рис. 1 означают: *1* — $Q_0 = 32$; *2* — 16; *3* — 8; *4* — 4.

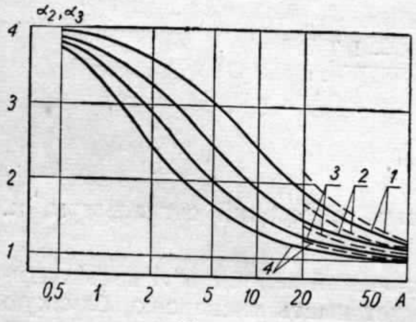

Рис. 1.

Если априорное распределение начальной фазы неравномерно и отличается от (13), но является унимодальным и близким к симметричному, то соотношения (14), (15), (20) и (27) будут также приблизительно верны и могут быть использованы для вычисления соответствующих величин при замене A на A'

$$A' = \frac{\ln 2}{1-\cos(\Delta\varphi/2)},$$

где $\Delta\varphi$ — ширина пика априорной плотности вероятностей начальной фазы по уровню 0,5 от максимального значения плотности вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, Изд-во «Советское радио», 1966.

2. Куликов Е. И., Предельная точность оценки параметра сигнала при приеме в нормальном шуме, Радиотехника, 1962, **17**, № 7, 3.

3. Хелстром К., Статистическая теория обнаружения сигналов, Изд-во ин. лит-ры, 1963.

4. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
20 I 1969 г.