(8)

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

Радиоэлектроника

ТОМ XIII
10
1970

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ 50-ЛЕТИЯ ВЕЛИКОЙ
ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ

УДК 621.391.6

Г. С. НАХМАНСОН, А. П. ТРИФОНОВ

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА РАДИОСИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ДИСКРИМИНАТОРА

Рассматривается способ получения оценки, основанный на формировании сигнала пропорционального отклонению оцениваемого параметра относительно некоторого фиксированного значения, известного наблюдателю.

Получены выражения для смещения и дисперсии оценки произвольного параметра радиосигнала.

Вопросы предельной точности оценки параметров сигналов, принимаемых на фоне стационарных нормальных коррелированных шумов, рассматривались в литературе [1—3]. Оптимальное (по методу максимума функции правдоподобия) приемное устройство по принятой реализации суммы сигнала и шума образует выходной эффект, пропорциональный функции правдоподобия оцениваемого параметра. За истинное значение параметра принимается то его значение, которое обращает функцию правдоподобия (или ее логарифм) в максимум максиморум. При этом предполагается, что находятся значения функции правдоподобия во всей априорной области измеряемого параметра, в результате чего можно найти точку максимального значения, являющуюся оценкой. Техническая реализация таких приемных устройств встречает большие трудности .В этой связи значительный интерес представляют различные квазиоптимальные приемные устройства, среди которых значительное место занимают дискриминаторы различного вида.

Целью данной работы является изучение статистических характеристик оценок, получаемых с помощью дискриминатора вида [1, 2]

$$l_m = l_\Phi - \left[\frac{dM(l)}{dl} \Big/ \frac{d^2M(l)}{dl^2}\right]_{l_\Phi}, \tag{1}$$

где $M(l)$ — логарифм функции правдоподобия оцениваемого параметра l (выходной сигнал оптимального приемника); l_Φ — некоторое фиксированное значение; l_m — оценка истинного значения параметра l_0.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА УЗКОПОЛОСНОГО РАДИОСИГНАЛА СО СЛУЧАЙНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

Пусть на вход дискриминатора типа (1) поступает в течение интервала времени $[0, T]$ аддитивная смесь узкополосного радиосигнала и нормального шума

$$x(t) = a_0 F(t, l_0) \cos[\omega_0 t + \Phi(t, l_0) - \varphi_0] + n(t). \tag{2}$$

Здесь a_0 — амплитуда, $F(t, l_0)$ и $\Phi(t, l_0)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции, в общем случае зависящие от оцениваемого параметра

l_0, φ_0 — случайная начальная фаза, распределенная равномерно на интервале $[0, 2\pi]$, $n(t)$ — стационарный, нормальный шум с нулевым средним значением и функцией корреляции $\langle n(t_1)\ n(t_2)\rangle = K(t_1 - t_2)$.

В этом случае логарифм функции правдоподобия параметра можно представить, как [1, 2]

$$M(l) = \ln I_0[a_0 R(l)] - \frac{a_0^2}{2} Q(l), \tag{3}$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента, нулевого порядка; $R(l)$ — огибающая процесса на выходе линейной части оптимального приемника

$$R(l) = \left| \int_0^T x(t)\, \vartheta(t, l)\, dt \right|, \tag{4}$$

$\vartheta(t, l)$ — опорный сигнал местного гетеродина оптимального приемника. Функция $\vartheta(t, l)$ определяется из решения интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t - t_1)\, \vartheta(t_1, l)\, dt_1 = F(t, l) \cos[\omega t + \Phi(t, l) - \varphi]$$

и для узкополосного радиосигнала может быть записана в виде [1]

$$\vartheta(t_1, l, \varphi) = V(t, l) \cos[\omega t + \Phi(t, l) - \varphi]. \tag{5}$$

Величина $Q(l)$, в правой части (3), равна (с учетом узкополосности сигнала)

$$Q(l) = \frac{1}{2} \int_0^T F(t, l)\, V(t, l)\, dt$$

и представляет собой отношение сигнал/шум для сигнала с единичной амплитудой при данном значении параметра.

Полагая, что отношение сигнал/шум для принимаемого сигнала $Q_0 = a_0^2 Q(l_0)$ достаточно велико для обеспечения надежной оценки [1], и учитывая асимптотическое поведение функции $I_0(x)$ при $x \gg 1$, выражение (1) перепишем, как

$$l_m = l_\Phi - \left[\frac{\dfrac{dR(l)}{dl} - \dfrac{a_0}{2} \dfrac{dQ(l)}{dl}}{\dfrac{d^2R(l)}{dl^2} - \dfrac{a_0}{2} \dfrac{d^2Q(l)}{dl^2}} \right]_{l_\Phi}. \tag{6}$$

Формула (6) непосредственно определяет структуру дискриминатора для оценки произвольного параметра узкополосного радиосигнала со случайной начальной фазой.

Для определения характеристик качества оценки l_m, введем в рассмотрение параметр

$$\varepsilon = Q_0^{-\frac{1}{2}}$$

[1, 3], который в условиях надежной оценки является малым. Подставляя (1) и (5) в (4), после несложных преобразований приходим к выражению для огибающей $R(l)$

$$R(l)=a_0^{-1}\varepsilon^{-2}\left[G^2(l,\ l_0)+2\,\varepsilon\, G(l,\ l_0)\ N(l)+\varepsilon^2\,\tilde{N}\ (l)\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Здесь обозначено:

$$G(l,\ l_0)=a_0^2\varepsilon^2\left\{\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^T F(t,\ l_0)\,V(t,\ l)\cos\left[\Phi(t,\ l_0)-\Phi(t,\ l)\right]dt\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^T F(t,\ l_0)\,V(t,\ l)\sin\left[\Phi(t,\ l_0)-\Phi(t,\ l)\right]dt\right]^2\right\}^{1/2};$$

$$N(l)=a_0\varepsilon\left\{\int\limits_0^T n(t)\,V(t,\ l)\cos\left[\omega_0 t+\Phi(t,\ l)\right]dt\cdot\cos\left[\varphi_0-\chi(l)\right]+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^T n(t)\,V(t,\ l)\sin\left[\omega\, t+\Phi(t,\ l)\right]dt\cdot\sin\left[\varphi_0-\chi(l)\right]\right\};$$

$$\chi(l)=\operatorname{arctg}\frac{\int\limits_0^T F(t,l_0)\ V(t,l)\sin\left[\Phi(t,l_0)-\Phi(t,l)\right]dt}{\int\limits_0^T F(t,l_0)\ V(t,l)\cos\left[\Phi(t,l_0)-\Phi(t,l)\right]dt};$$

$$\tilde{N}(l)=a_0^2\varepsilon^2\left\{\left[\int\limits_0^T n(t)\,V(t,\ l)\cos\left[\omega\, t+\Phi(t,\ l)\right]dt\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\int\limits_0^T n(t)\,V(t,\ l)\sin\left[\omega\, t+\Phi(t,\ l)\right]dt\right]^2\right\}.$$

Отметим, что все функции, входящие в (7), нормированы, так что:

$$G(l_0,\ l_0)=1;\quad \langle N^2(l_0)\rangle=1;\quad \langle\tilde{N}^2(l_0)\rangle-\langle\tilde{N}(l_0)\rangle^2=4.$$

Подставим (7) в (6) и, рассматривая полученное выражение для l_m, как функцию параметра ε, разложим $l_m(\varepsilon)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\varepsilon=0$. Будем иметь

$$l_m=l_\Phi-\left[\frac{dS(l)}{dl}\Big/\frac{d^2S(l)}{dl^2}\right]_{l_\Phi}+\varepsilon\left\{\left[\frac{dS(l)}{dl}\,\frac{d^2N(l)}{dl^2}-\frac{d^2S(l)}{dl^2}\,\frac{dN(l)}{dl}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{d^2S(l)}{dl^2}\right]^{-2}\right\}_{l_\Phi}+\varepsilon^2\ldots \tag{8}$$

Здесь обозначено

$$S(l)=G(l,\ l_0)-\frac{1}{2}\,\frac{Q(l)}{Q(l_0)}.$$

Используя формулу (8), получаем, что смещение $\langle\Delta\, l\rangle=\langle l_m-l_0\rangle$ и дисперсия $\sigma^2(l)=\langle(l_m-\langle l_m\rangle)^2\rangle$ оценки параметра l, равны соответственно

$$<\Delta l> = l_\Phi - l_0 - \left[\frac{dS(l)}{dl} \Big/ \frac{d^2S(l)}{dl^2}\right]_{l_\Phi}; \tag{9}$$

$$\sigma^2(l) = \varepsilon^2 \left[\frac{d^2S(l)}{dl^2}\right]_{l_\Phi}^{-2} \left\{\frac{\partial^2 G_1(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} + \left[\frac{\frac{dS(l)}{dl}}{\frac{d^2S(l)}{dl^2}}\right]^2 \frac{\partial^4 G_1(l_1, l_2)}{\partial l_1^2 \partial l_2^2} - \right.$$

$$\left. - 2\,\frac{\frac{dS(l)}{dl}}{\frac{d^2S(l)}{dl^2}}\,\frac{\partial^3 G_1(l_1, l_2)}{dl_1^2 dl_2}\right\}_{l_\Phi}, \tag{10}$$

где

$$G_1(l_1, l_2) = \frac{a_0^2\varepsilon^2}{2} \int_0^T F(t, l_1)\, V(t_1\ l_2) \cos[\Phi(t, l_1) -$$

$$- \Phi(t, l_2) + \chi(l_2) - \chi(l_1)]\,dt.$$

Рассмотрим связь полученной оценки с эффективной оценкой, возможной в классе оценивающих устройств со смещением (9). Для этого вычислим эффективность оценки, получаемой с помощью дискриминатора (1). Эффективность оценки e определяется выражением [4]

$$e = \frac{<(l_m - l_0)^2>_{\text{эф}}}{<(l_m - l_0)^2>} = \frac{\sigma^2_{\text{эф}}(l) + <\Delta l>^2}{\sigma^2(l) + <\Delta l>^2}. \tag{11}$$

Дисперсия эффективности оценки $\sigma^2_{\text{эф}}(l)$ находится из формулы Рао — Крамера [4]

$$\sigma^2_{\text{эф}}(l) = -\frac{\left[1 + \frac{d}{dl_0}<\Delta l>\right]^2}{<\frac{d^2M(l)}{dl^2}>}. \tag{12}$$

Так как при $\varepsilon \ll 1$, $<\frac{d^2M(l)}{dl^2}> \simeq \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{d^2S(l)}{dl^2}\right]_{l_0}$, то, используя (9), (10) и (12), нетрудно получить выражение для эффективности оценки в явном виде

$$e = \frac{\varepsilon^2\alpha_1 + <\Delta l>^2}{\varepsilon^2\alpha_2 + <\Delta l>^2}, \tag{13}$$

где

$$\alpha_1 = -\left[\frac{d^2S(l)}{dl^2}\right]_{l_0}^{-1} \left\{\frac{d}{dl_0}\left[\frac{dS(l)}{dl} \Big/ \frac{d^2S(l)}{dl^2}\right]_{l_\Phi}\right\}^2,$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma^2(l)}{\varepsilon^2},$$

$<\Delta l>$ определяется из (9).

Если отношение сигнал/шум неограниченно возрастает, т. е. $\varepsilon \to 0$, то, как следует из (13),

$$\lim_{\varepsilon \to 0} e = 1$$

и оценка, получаемая с помощью дискриминатора (1), является эффективной. С другой стороны, если фиксированное значение параметра $l_ф$ выбрано равным истинному, то согласно (9), (10)

$$<\Delta l>=0, \quad \text{а} \quad \alpha_1=\alpha_2 \quad \text{и}$$

$$\lim_{l_ф \to l_0} e=1.$$

Таким образом, при достаточно больших величинах отношения сигнал/шум и малых величинах разности $|l_ф - l_0|$, оценка с помощью дискриминатора (6) будет близка к эффективной оценке.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА УЗКОПОЛОСНОГО РАДИОСИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ АМПЛИТУДОЙ И СЛУЧАЙНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

Положим, что амплитуда a_0 принимаемого сигнала (2) является неизвестной детерминированной величиной, такой, что условие $Q_0 \gg 1$ выполняется.

Функция правдоподобия параметров l, a и φ может быть записана, как [1, 2].

$$L(l,\ a,\ \varphi)=k\exp\left\{a\int_0^T x(t)\,V(t,\ l)\cos[\omega t+\Phi(t,\ l)-\varphi]dt-\frac{a^2}{2}Q(l)\right\}.$$

Максимизируя последнее выражение по a, получаем, что функция правдоподобия параметров l и φ равна

$$L(l,\ \varphi)=k\exp\frac{1}{2\,Q(l)}\left\{\int_0^T x(t)\,V(t,\ l)\cos[\omega t+\Phi(t,\ l)-\varphi]dt\right\}^2.$$

Усредняя это выражение по начальной фазе φ, имеем

$$L(l)=<L(l,\ \varphi)>_\varphi=kI_0\left[\frac{R^2(l)}{4\,Q(l)}\right]\exp\frac{R^2(l)}{4\,Q(l)}.$$

Так как функция правдоподобия параметра l монотонно зависит от величины

$$M(l)=\frac{R^2(l)}{Q(l)}. \tag{14}$$

то оптимальный приемник должен вырабатывать сигнал, пропорциональный (14).

В соответствии с (14) и (1) структура дискриминатора определяется выражением

$$l_m=l_ф-\left\{Q(l)R(l)\left[2\,Q(l)\frac{dR(l)}{dl}-R(l)\frac{dQ(l)}{dl}\right]\right\}_{l_ф}\left\{2\,Q^2(l)\left[\frac{dR(l)}{dl}\right]^2+\right.$$

$$+2\,R(l)\,Q^2(l)\frac{d^2R(l)}{dl^2}-4\frac{dQ(l)}{dl}Q(l)\frac{dR(l)}{dl}-Q(l)\,R^2(l)\frac{d^2Q(l)}{dl^2}+$$

$$\left.+2\,R^2(l)\left[\frac{dQ(l)}{dl}\right]^2\right\}_{l_ф}^{-1}. \tag{15}$$

Подставим в последнее выражение значение $R(l)$ из (7) и опять разложим получаемую функцию $l_m=l_m(\varepsilon)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\varepsilon=0$. Будем иметь

$$l_m = l_\Phi - \left[\frac{dS_1(l)}{dl} \Big/ \frac{d^2S_1(l)}{dl^2}\right]_{l_\Phi} + \varepsilon\left[\frac{dS_1(l)}{dl}\,\frac{d^2N_1(l)}{dl^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{d^2S_1(l)}{dl^2}\,\frac{dN_1(l)}{dl}\right]_{l_\Phi}\left[\frac{d^2S_1(l)}{dl^2}\right]^{-2}_{l_\Phi} + \varepsilon^2 \ldots \qquad (16)$$

Здесь

$$S_1(l) = \frac{G^2(l,\ l_0)}{Q(l)},\ N_1(l) = 2\,\frac{G(l,\ l_0)}{Q(l)}\,N(l).$$

Используя разложение (16), аналогично (9) и (10), для смещения и дисперсии оценки параметра сигнала с неизвестной амплитудой и случайной начальной фазой получим:

$$\langle \Delta l \rangle = l_\Phi - l_0 - \left\{\frac{dS_1(l)}{dl} \Big/ \frac{d^2S_1(l)}{dl^2}\right\}_{l_\Phi}, \qquad (17)$$

$$\sigma^2(l) = \varepsilon^2\left[\frac{d^2S_1(l)}{dl^2}\right]^{-4}_{l_\Phi}\left\{\left[\frac{d^2S_1(l)}{dl^2}\right]^2 \frac{\partial^2 G_2(l_1,\ l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} + \left[\frac{dS_1(l)}{dl}\right]^2 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^4 G_2(l_1,\ l_2)}{\partial l_1^2 \partial l_2^2} - 2\,\frac{dS_1(l)}{dl}\,\frac{d^2S_1(l)}{dl^2}\,\frac{\partial^3 G_2(l_1,\ l_2)}{\partial l_1^2 d l_2}\right\}_{l_\Phi}. \qquad (18)$$

В последнем выражении введено обозначение

$$G_2(l_1,\ l_2) = 4\,\frac{G(l_1,\ l_0)\ G(l_2,\ l_0)}{Q(l_1)\ Q(l_2)}\,G_1(l_1,\ l_2).$$

Эффективность оценки при приеме сигнала с неизвестной амплитудой определяется аналогично (11), (13). Нетрудно показать, что и в этом случае:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} e = 1, \qquad \lim_{l_\Phi \to l_0} e = 1, \qquad (19)$$

т. е. при достаточно малых ε и достаточно малой разности $|l_\Phi - l_0|$ оценка с помощью дискриминатора (16) будет близка к эффективной.

Для иллюстрации основных соотношений рассмотрим конкретный пример.

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ РАДИОИМПУЛЬС~~ОВ~~а С ГАУССОВОЙ ОГИБАЮЩЕЙ

Вычислим характеристики качества оценки длительности сигнала

$$s(t,\tau_0) = a_0 \exp\{-t^2/\tau_0^2\}\cos(\omega_0 t - \varphi) \qquad -\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} \qquad (20)$$

при приеме на фоне белого шума со спектральной плотностью N_0. Для этого вида шума функция $v(t,\ \tau)$ имеет вид

$$v(t,\ \tau) = \frac{2}{N_0}\,S(t,\ \tau).$$

Полагая, что импульс полностью расположен внутри интервала наблюдения, т. е. $\tau_0 \ll T$, для функции $G(\tau_1,\ \tau_2)$ имеем

$$G(\tau_1,\ \tau_2) = \frac{\tau_1\tau_2\sqrt{2}}{\tau_0\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}}.$$

Вычислим необходимые производные для определения смещения и дисперсии оценки:

$$\left[\frac{dS(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau_\phi} = \frac{\sqrt{2}}{\tau_0}(1+k^2)^{-3/2}\left[1-\left(\frac{1+k^2}{2}\right)^{3/2}\right];$$

$$\left[\frac{d^2S(\tau)}{d\tau^2}\right]_{\tau_\phi} = -\frac{3\sqrt{2}k}{\tau_0^2(1+k^2)^{5/2}}; \quad \left[\frac{\partial^2 G(l_1, l_2)}{\partial\tau_1\partial\tau_2}\right]_{\tau_\phi} = \frac{3}{4k\tau_0^2};$$

$$\left[\frac{\partial^3 G(\tau_1, \tau_2)}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2}\right]_{\tau_\phi} = -\frac{3}{8k^2\tau_0^3}; \quad \left[\frac{\partial^4 G(\tau_1, \tau_2)}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2^2}\right]_{\tau_\phi} = \frac{33}{16k^3\tau_0^4};$$

$$\left[\frac{dS_1(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau_\phi} = \tau_0 k^3\frac{1-k^2}{(1+k^2)^3}; \quad \left[\frac{d^2S_1(\tau)}{d\tau^2}\right]_{\tau_\phi} + 2k^4\frac{k^2-3}{(1+k^2)^3};$$

$$\left[\frac{\partial^2 G_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial\tau_1\partial\tau_2}\right]_{\tau_\phi} = \frac{\tau_0^2 k^5}{2}\,\frac{3k^4+2k^2+3}{(1+k^2)^3};$$

$$\left[\frac{\partial^3 G_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2}\right]_{\tau_\phi} = -\tau_0\frac{k^4}{4(1+k^2)^4}(9k^6+k^4+10k^2+3);$$

$$\left[\frac{\partial^4 G_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2^2}\right]_{\tau_\phi} = \frac{3k^3}{8(1+k^2)^5}\{43k^8+40k^6-31k^4+8k^2+11\}.$$

Здесь

$$k = \frac{\tau_\phi}{\tau_0}.$$

Используя значения производных, из (9) и (10) получаем, что смещение и дисперсия оценки длительности сигнала (20) (если a_0 известна, а φ_0 — случайна) равны соответственно:

$$<\Delta\tau> = \tau_0\left[k-1+\frac{1-\left(\frac{1+k^2}{2}\right)^{3/2}}{3}\left(k+\frac{1}{k}\right)\right],$$

$$\sigma^2(\tau) = \frac{4\tau_0^2}{3Q_0}\left(\frac{1+k^2}{2k}\right)^5\left\{k^2-k\left(k+\frac{1}{k}\right)\frac{1-\left(\frac{1+k^2}{2}\right)^{3/2}}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{11}{4}\left[\left(k+\frac{1}{k}\right)\frac{1-\left(\frac{1+k^2}{2}\right)^{3/2}}{3}\right]^2\right\}.$$

В случае, когда амплитуда сигнала (20) априори неизвестна, согласно (17), (18) имеем, что смещение и дисперсия оценки длительности равны

$$<\Delta\tau> = \tau_0\left[k-1+\frac{1-k^4}{2k(3-k^2)}\right],$$

$$\sigma^2(\tau) = \frac{2\tau_0}{Q_0}\,\frac{(1+k^2)^3}{(2k)^7(3-k^2)^4}\{33k^{12}+42k^{10}+111k^8+140k^6+111k^4+42k^2+33\}.$$

На рис. 1 нанесены зависимости эффективности оценки длительности от величины $k=\frac{\tau_ф}{\tau_0}$ для различных значений отношения сигнал/шум. Сплошной линией нанесена зависимость эффективности оценки длительности сигнала с известной амплитудой и случайной начальной фазой. Пунктиром нанесена зависимость эффективности оценки длительности сигнала с неизвестной амплитудой и случайной начальной фазой.

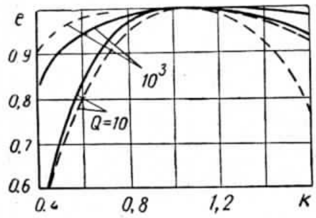

Рис. 1.

Из рассмотрения кривых рис. 1 следует, что при малых значениях разности $|\tau_ф-\tau_0|$ (т. е. при $k\simeq 1$) вне зависимости от величины отношения сигнал/шум, эффективность оценки близка к единице. В то же время, с ростом отношения сигнал/шум область значений разности $|\tau_ф-\tau_0|$, при которой эффективность велика, расширяется.

Таким образом, полученные результаты позволяют определить целесообразность использования рассмотренного типа дискриминаторов в конкретных ситуациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Е. И., Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, Изд-во «Советское радио», 1969.

2. Фалькович С. Е., Прием радиолокационных сигналов на фоне флюктуирующих помех, Изд-во «Советское радио», 1961.

3. Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, Изд-во «Советское радио», 1966.

4. Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, Изд-во «Советское радио», 1962, 2.

Поступила в редакцию
27 X 1969 г.