(10) (10)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том XV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

11

МОСКВА · 1970

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1970 № 11

УДК 621.391.2.018.756

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ПРИ ПРИЕМЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ НА ФОНЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО ШУМА

А. П. Трифонов

Предполагается, что помехой является аддитивный шум, дисперсия которого, меняясь от одного периода повторения к другому, остается постоянной в течение времени приема одного импульса. Предложена схема квазиоптимального измерителя, определяющего дисперсии шума в каждом периоде повторения и формирующего на основании измеренных значений логарифм функционала отношения правдоподобия оцениваемого параметра. Задача решается в предположении, что период повторения импульсов значительно больше времени корреляции шума. Приведен пример расчета дисперсии оценки.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам оценки параметра сигнала при приеме последовательности импульсов в нормальном шуме посвящен ряд работ [1—3] и др. Однако в этих работах предполагается, что помехой является стационарный шум с известными статистическими характеристиками. В то же время в ряде прикладных задач помеху при приеме последовательности импульсов нельзя считать стационарным случайным процессом, хотя в течение времени приема одного импульса условия стационарности приближенно выполняются.

Простейшей моделью такого нестационарного шума может служить случайный процесс, дисперсия которого, меняясь от одного периода повторения импульсов к другому, остается постоянной в течение времени приема одного импульса. Если значения дисперсий такого шума в различных периодах повторения известны, то относительно просто можно получить оптимальную (по методу максимума функции правдоподобия) оценку параметра. Если значения дисперсий помехи являются неизвестными детерминированными величинами, то для получения оценки можно использовать устройство, оптимальное для приема на фоне стационарного шума. Однако такой приемник не будет оптимальным для шума с изменяющейся мощностью. Систему оценки параметра можно получить, если производить измерение дисперсии шума в каждом периоде повторения и на основании полученных значений формировать функцию правдоподобия оцениваемого параметра или ее логарифм — при дискретной обработке и логарифм функционала отношения правдоподобия — при непрерывной обработке принимаемого сигнала [4]. Очевидно возможно множество различных методов оценки параметра сигнала таким образом. Выбор между этими возможными методами зависит от требований, предъявляемых к качеству оценки, и от степени простоты технической реализации метода.

1. ПРИЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ИМПУЛЬСОВ

Пусть на вход приемного устройства в течение фиксированного времени T поступает сумма ν реализаций

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\nu-1}x_k(t)=s_0(t,l_0)+n(t), \tag{1}$$

где $s_0(t,l_0)=\sum\limits_{k=0}^{\nu-1}s_k(t,l_0)$; $n(t)=\sum\limits_{k=0}^{\nu-1}n_k(t)$.

Каждая реализация принимается в течение времени T_0 (T_0 — период повторения) и представляет собой аддитивную смесь

$$x_k(t)=s_k(t,l_0)+n_k(t). \tag{2}$$

Здесь $s_k(t,\ l_0)=s(t-kT_0,\ l_0)$ — элементарный k-й сигнал, неизвестный параметр l_0 которого подлежит оценке; $n_k(t)$ — нормальный шум с нулевым средним значением $\langle n_k(t)\rangle=0$ и функцией корреляции

$$\langle n_k(t_1)n_k(t_2)\rangle=\sigma_{Nk}^2K(t_1-t_2);\quad \sigma_{Nk}^2=\langle n_k^2(t)\rangle,$$

т. е. полагаем, что коэффициент корреляции помехи одинаков во всех периодах повторения, а дисперсия помехи, изменяясь от одного периода повторения к другому, остается постоянной в течение времени приема одного импульса. Будем считать, что период повторения импульсов много больше времени корреляции шума $\tau_k=\int\limits_0^\infty|K(\tau)|\,d\tau$ [5]:

$$T_0\gg\tau_k \tag{3}$$

и, следовательно, $\langle n_i(t_1)n_k(t_2)\rangle\simeq 0$ при $i\neq k$.

Положим вначале значения дисперсий шума в каждом периоде повторения известными. Тогда выражение для логарифма функционала отношения правдоподобия (с точностью до постоянных слагаемых) можно записать как

$$M(l)=\sum_{k=0}^{\nu-1}\sigma_{Nk}^{-2}\int\limits_0^{T_0}x_k(t)v(t,l)\,dt, \tag{4}$$

$v(t,\ l)$ — элементарный опорный сигнал местного гетеродина оптимального приемника — определяется из интегрального уравнения

$$\int\limits_0^{T_0}K(t-t_1)v(t_1,l)\,dt_1=s(t,l). \tag{5}$$

Подставим (2) в (4) и введем обозначения

$$S(l_0,l)=\int\limits_0^{T_0}s(t,l_0)v(t,l)\,dt,\qquad N_k(l)=\int\limits_0^{T_0}n_k(t)v(t,l)\,dt, \tag{6}$$

$$N(l)=\sum_{k=0}^{\nu-1}\sigma_{Nk}^{-2}N_k(l),\qquad \sigma_\Sigma^{-2}=\sum_{k=0}^{\nu-1}\sigma_{Nk}^{-2}.$$

Выражение (4) примет вид

$$M(l)=\sigma_\Sigma^{-2}S(l_0,l)+N(l). \tag{7}$$

Оценка максимального правдоподобия l_m является решением уравнения

(8) $$[dM(l)\,/\,dl]_{lm}=0.$$

Поскольку предполагается, что результирующее отношение сигнал/шум для всей пачки импульсов достаточно велико, то, следовательно,

(9) $$[\sigma_\Sigma^{-2}S(l_0,l_0)]^2\gg\langle N^2(l_0)\rangle.$$

Значит, разлагая $M(l)$ (7) в ряд Тейлора в окрестности истинного значения l_0 и ограничиваясь использованием первых трех членов разложения, аналогично [1], получим из (8) выражение для случайной ошибки измерения

(10) $$\Delta l=l_m-l_0=-\left[\frac{dN(l)}{dl}\bigg/\sigma_\Sigma^{-2}\frac{d^2S(l_0,l)}{dl^2}\right]_{l_0}.$$

Здесь учтено, что для неэнергетических параметров [6]

(11) $$S(l_1,l_2)=S(l_1-l_2)=S(l_2-l_1).$$

Из формулы (10) следует, что оценка будет несмещенной, т. е. $\langle\Delta l\rangle=0$, а дисперсия оценки будет определяться выражением

(12) $$\sigma_0^2(l_0)=\frac{\left[\dfrac{\partial^2}{\partial l_1\,\partial l_2}\langle N(l_1)N(l_2)\rangle\right]_{l_0}}{[\sigma_\Sigma^{-2}\,d^2S(l_0,l)/dl^2]_{l_0}^2}.$$

Вычислим второй момент шумовой функции $N(l)$. При выполнении условия (3) помеховые составляющие $N_k(l)$ в различных периодах повторения слабо коррелированы, поэтому

(13) $$\langle N_k(l)N_i(l)\rangle\simeq\begin{cases}\langle N_k^2(l)\rangle & \text{при } k=i,\\ 0 & \text{при } k\neq i.\end{cases}$$

Используя (13) и (5), имеем

$$\langle N(l_1)N(l_2)\rangle=\sigma_\Sigma^{-2}S(l_1,l_2).$$

Следовательно, дисперсия оценки параметра l равна

(14) $$\sigma_0^2(l_0)=-\left[\sigma_\Sigma^{-2}\frac{d^2S(l_0,l)}{dl^2}\right]_{l_0}^{-1}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда значения дисперсий помехи в различных периодах повторения являются неизвестными детерминированными величинами.

Поскольку величины σ_{Nk}^2 неизвестны, то систему оценки параметра l можно получить, заменяя точные значения дисперсий в (4) некоторыми приближенными значениями $\hat\sigma_{Nk}^2$, измеряемыми в течение времени приема k-го импульса. В качестве оценок неизвестных дисперсий шума σ_{Nk}^2 используем величины

(15) $$\hat\sigma_{Nk}^2=(1/T_0)\left[\int_0^{T_0}x_k^2(t)\,dt-\int_0^{T_0}s^2(t,l)\,dt\right].$$

Рассмотрим свойства оценок $\hat\sigma_{Nk}^2$. Эти оценки несмещенные, так как

$$\langle\Delta\sigma_k^2\rangle=\langle\hat\sigma_{Nk}^2-\sigma_{Nk}^2\rangle=0.$$

При этом в силу условия (3) распределение величин $\Delta\sigma_k^2$ приближенно можно считать нормальным [7].

Выходной сигнал приемной системы, которая использует приближенные значения дисперсий помехи (15), будет иметь вид

$$M_1(l) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \hat{\sigma}_{Nk}^{-2} \int_0^{T_0} x_k(t)\, v(t, l)\, dt. \tag{16}$$

За оценку параметра l_0 примем значение $l = l_{m1}$, которое обращает (16) в абсолютный максимум. Отметим, что, как видно из структуры приемного устройства (16), для образования выходного сигнала необходимо время $T_0 + T = (\nu + 1) T_0$. Полагая, что выполняется неравенство

$$\langle [\Delta\sigma_k^2]^2 \rangle / \sigma_{Nk}^4 \ll 1, \tag{17}$$

при помощи формулы бинома перепишем (16) как

$$M_1(l) = \sigma_\Sigma^{-2} S(l_0, l) - \Delta S(l_0, l) + N(l) - \Delta N(l), \tag{18}$$

где

$$\Delta S(l_0, l) = S(l_0, l) \sum_{k=0}^{\nu-1} \Delta\sigma_k^2 / \sigma_{Nk}^4; \quad \Delta N(l) = \sum_{k=0}^{\nu-1} N_k(l)\, \Delta\sigma_k^2 / \sigma_{Nk}^4.$$

Так как для неэнергетического параметра $[d\Delta S(l_0, l) / dl]_{l_0} = 0$, то можем аналогично (10) и (12) получить выражения для смещения и дисперсии оценки l_{m1}

$$\langle \Delta l_1 \rangle = \langle l_{m1} - l_0 \rangle = - \frac{\left\langle \dfrac{d}{dl} [N(l) - \Delta N(l)] \right\rangle_{l_0}}{\sigma_\Sigma^{-2} [d^2 S(l_0, l) / dl^2]_{l_0}} \tag{19}$$

$$\sigma_1^2(l_0) = \frac{\left[\dfrac{\partial^2}{\partial l_1\, \partial l_2} \langle [N(l_1) - \Delta N(l_1)]\, [N(l_2) - \Delta N(l_2)] \rangle \right]_{l_0}}{\left[\sigma_\Sigma^{-2} \dfrac{d^2 S(l_0, l)}{dl^2} \right]_{l_0}^2}. \tag{20}$$

Вычислим моменты помеховых составляющих в числителях (19) и (20):

$$\langle \Delta N(l) \rangle = (2/T)\, \sigma_\Sigma^{-2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} K(t_1 - t_2)\, s(t_1, l_0)\, v(t_2, l)\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= (2/T_0)\, \sigma_\Sigma^{-2} \int_0^{T_0} s(t, l_0)\, s(t, l)\, dt.$$

Следовательно, согласно (11)

$$\left[\frac{d}{dl} \langle \Delta N(l) \rangle \right]_{l_0} = 0$$

и, так же, как при оптимальном приеме, оценка несмещенная $\langle \Delta l_1 \rangle = 0$.

$$\langle [N(l_1) - \Delta N(l_1)]\, [N(l_2) - \Delta N(l_2)] \rangle = \langle N(l_1) N(l_2) \rangle +$$
$$+ \langle \Delta N(l_1)\, \Delta N(l_2) \rangle = \sigma_\Sigma^{-2} S(l_0, l) + \langle \Delta N(l_1)\, \Delta N(l_2) \rangle,$$

так как $\langle N(l_1)\Delta N(l_2)\rangle = 0$. Используя (13) и формулу для моментов четвертого порядка нормального случайного процесса, можем записать

$$\langle \Delta N(l_1)\Delta N(l_2)\rangle = \sum_{k=0}^{\nu-1}\sum_{i=0}^{\nu-1} \langle N_k(l_1)N_i(l_2)\Delta\sigma_k^2\Delta\sigma_i^2\rangle/\sigma_{Nk}^4\sigma_{Ni}^4 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu-1} \langle N_k(l_1)N_k(l_2)\rangle\langle\Delta\sigma_k^4\rangle \Big/ \sigma_{Nk}^8 + \sum_{k=0}^{\nu-1}\sum_{i=0}^{\nu-1}\langle N_k(l_1)\Delta\sigma_k^2\rangle\times$$

$$\times\langle N_i(l_2)\Delta\sigma_i^2\rangle \Big/ \sigma_{Nk}^4\sigma_{Ni}^4 + \sum_{k=0}^{\nu-1}\langle N_k(l_1)\Delta\sigma_k^2\rangle\langle N_k(l_2)\Delta\sigma_k^2\rangle/\sigma_{Nk}^8,$$

(21) $$\langle\Delta\sigma_k^4\rangle = (2/T_0^2)\,\sigma_{Nk}^4\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} K^2(t_1-t_2)\,dt_1\,dt_2 + (4/T_0^2)\times$$

$$\times\,\sigma_{Nk}^2\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} K(t_1-t_2)\,s(t_1,l_0)\,s(t_2,l_0)\,dt_1\,dt_2 = 2\sigma_{Nk}^4 A + 4\sigma_{Nk}^2 B,$$

$$\langle N_k(l)\,\Delta\sigma_k^2\rangle = (2/T_0)\,\sigma_{Nk}^2\int_0^{T_0} s(t,l_0)\,s(t,l)\,dt.$$

Подставив значения моментов в (20), получим

(22) $$\sigma_1^2(l_0) = -\left[\sigma_\Sigma^{-2}\frac{d^2S(l_0,l)}{dl^2}\right]_{l_0}^{-1}\left[1+2A+4B\sigma_\Sigma^{-4}/\sigma_\Sigma^{-2}\right] =$$
$$= \sigma_0^2(l_0)\left[1+2A+4B\sigma_\Sigma^{-4}/\sigma_\Sigma^{-2}\right].$$

Здесь $\sigma_0^2(l_0)$ — дисперсия оптимальной оценки (14), а

$$\sigma_\Sigma^{-4} = \sum_{k=0}^{\nu-1}\sigma_{Nk}^{-4}.$$

Уточним условия выполнения неравенства (17), на основании которого получена формула (22). Относительная дисперсия оценки $\widehat{\sigma}_{Nk}^2$ (15) равна $\langle[\Delta\sigma_k^2]^2\rangle / \sigma_{Nk}^4 = 2A + 4B / \sigma_{Nk}^2$ (21). В силу (3) можем записать [5]

$$A \simeq (2/T_0)\int_0^\infty K^2(\tau)\,d\tau \leqslant 2\tau_k/T_0, \quad B \simeq (1/4\pi T_0^2)\int_{-\infty}^\infty K(\omega)\,|s(\omega,l_0)|^2\,d\omega.$$

$K(\omega)$ и $s(\omega, l_0)$ — преобразования Фурье соответствующих функций. При фиксированной энергии сигнала $E = \int_{-\infty}^\infty s^2(t,l_0)\,dt$ величина B максимальна, если $|s(\omega, l_0)|^2 = \mathrm{const}\cdot K(\omega)$, при этом максимальное значение $B \simeq (E/T_0^2)\int_{-\infty}^\infty K^2(\tau)\,d\tau \leqslant E\tau_k/T_0^2$. Следовательно, если выполняется (3), то соотношение (17) справедливо при условии

(23) $$4E / m_1T_0 \ll \sigma_{Nk}^2(1 - 4 / m_1),$$

где $m_1 = T_0 / \tau_k$.

Из (22) следует, что всегда $\sigma_1^2(l_0) \geqslant \sigma_0^2(l_0)$. Однако если $E<\infty$, а $\sigma_{Nk}^2>0$, то $\lim\limits_{T_0\to\infty} A = \lim\limits_{T_0\to\infty} B = 0$, значит $\lim\limits_{T_0\to\infty} \sigma_1^2(l_0) = \sigma_0^2(l_0)$, т. е. приемное устройство (16) является асимптотически оптимальным.

В случае, когда хотя бы одно значение $\sigma_{Ni}^2=0$, формула (22) неверна, так как (23) не выполняется. Но если $\sigma_{Ni}^2=0$, то согласно (15) $\hat{\sigma}_{Ni}^2=0$ и в выражениях (4) и (16) можно отбросить k-е слагаемые ($k\neq i$). Следовательно, оценка будет производиться только по i-му импульсу, принимаемому в отсутствие шума, что приводит к точному измерению параметра $l_0: \sigma_1^2(l_0) = \sigma_0^2(l_0)=0$.

Хотя приемное устройство (16), производящее измерение мощности шума в каждом периоде повторения, асимптотически оптимально, реализация его относительно сложна, и применение (16) ведет к увеличению времени обработки принимаемой смеси сигнал/помеха на время T_0, что не всегда желательно. Поэтому в некоторых случаях (при неизвестных σ_{Nk}^2) может оказаться более выгодным использование для получения оценки параметра l_0 приемного устройства, оптимального для приема пачки импульсов на фоне стационарного шума. Выходной сигнал такого приемника будет иметь вид

$$M_2(l) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \int_0^{T_0} x_k(t)\, v(t,l)\, dt. \tag{24}$$

Если суммарное отношение сигнал/шум достаточно велико и выполняется условие (3), то, повторяя выкладки, проделанные при выводе (10), (12) и (14), получим выражения для смещения и дисперсии оценки l_{m2}. Оценку l_{m2} будем находить по положению абсолютного максимума (24).

$$\langle\Delta l_2\rangle = \langle l_{m2} - l_0\rangle = 0, \quad \sigma_2^2(l_0) = -\sigma_\Sigma^2 / \nu^2 [d^2S(l_0,\ l)\ /\ dl^2]_{l_0}. \tag{25}$$

Здесь обозначено $\sigma_\Sigma^2 = \sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \sigma_{Nk}^2$. Из (14) и (25) следует, что в случае стационарного шума $\sigma_2^2(l_0) = \sigma_0^2(l_0)$.

Для иллюстрации основных соотношений рассмотрим конкретный пример. Вычислим дисперсию оценки временно́го положения ε_0 при приеме последовательности ν колокольных импульсов

$$s_k(t,\varepsilon_0) = a_0 \exp\left\{-\frac{\left[t-\left(k+\frac{1}{2}\right)T_0-\varepsilon_0\right]^2}{\tau_0^2}\right\} \tag{26}$$

на фоне шума с коэффициентом корреляции

$$K(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|),$$

полагая, что дисперсия шума в k-м периоде повторения определяется выражением

$$\sigma_{Nk}^2 = \sigma_{N0}^2[1-q\cos\pi k], \quad 0\leqslant q<1.$$

Будем считать, что количество импульсов ν — четное, а каждый импульс «полностью» расположен внутри периода повторения, т. е. $T_0 \gg \tau_0$ и $T_0 \gg \varepsilon_0$. Для величин, входящих в (14), (22) и (25), получаем $\sigma_\Sigma^2 = \nu\sigma_{N0}^2$, $\sigma_\Sigma^{-2} = \nu/\sigma_{N0}^2(1-q^2)$, $\sigma_\Sigma^{-4} = \nu(1+q^2)/\sigma_{N0}^4(1-q^2)^2$,

$$A \simeq 1/\alpha T_0, \quad B \simeq \frac{\pi a_0^2 \tau_0^2}{2T_0^2}[1-\Phi(\alpha\tau_0/\sqrt{2})]\exp(\alpha^2\tau_0^2/2),$$

где $\Phi(x)=(2/\sqrt{\pi})\int\limits_0^x \exp(-t^2)\,dt$ — интеграл вероятности. Подставляя эти значения в (14), (22) и (25), имеем

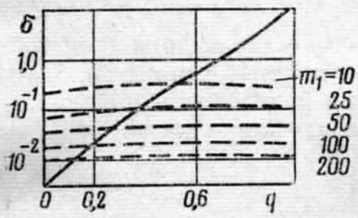
$$\begin{aligned}
&\sigma_0^2(l_0)=\sigma_{10}^2(1-q^2),\\
(27)\qquad &\sigma_1^2(l_0)=\sigma_{10}^2(1-q^2)\left[1+\frac{2}{m_1}+\frac{Q_0(1+q^2)}{m_1^2(1-q^2)}\beta(m_2)\right],\\
&\sigma_2^2(l_0)=\sigma_{10}^2.
\end{aligned}$$

Здесь обозначено: $\sigma_{10}^2=-\sigma_{N0}^2/\nu[d^2S(\varepsilon,\ \varepsilon_0)/d\varepsilon^2]_{\varepsilon_0}$ — дисперсия оптимальной оценки временного положения ε_0 при приеме на фоне стационарного шума с дисперсией σ_{N0}^2; $Q_0=a_0^2\alpha\tau_0\sqrt{2\pi}/2\sigma_{N0}^2$ — отношение удвоенной энергии сигнала к энергии шума с дисперсией σ_{N0}^2 в эквивалентной полосе частот $\alpha/2$ [5];

$$\beta(m_2)=2m_2\sqrt{2\pi}[1-\Phi(m_2/\sqrt{2})]\exp(m_2^2/2);$$

$m_2=\alpha\tau_0=\tau_0/\tau_k$ — отношение длительности сигнала ко времени корреляции шума.

Для принятого закона изменения дисперсии шума неравенство (23) можно переписать как $4Q_0\ll(1-q)(1-4/m_1)m_1^2$, откуда следует, что, например, при $Q_0\leqslant 1$ и $m_1\geqslant 50$ формулу (27) можно использовать вплоть до значений $q\simeq 0{,}99$.



На рисунке приведена зависимость относительного увеличения дисперсии оценки по сравнению с оптимальной при использовании приемного устройства (24) $\delta_2=[\sigma_2^2(l_0)-\sigma_0^2(l_0)]/\sigma_0^2(l_0)$ (сплошная линия) от величины q, характеризующей изменение мощности шума. Пунктиром нанесены зависимости относительного увеличения дисперсии оценки, получаемой при помощи (16), по сравнению с дисперсией оптимальной оценки $\delta_1=[\sigma_1^2(l_0)-\sigma_0^2(l_0)]/\sigma_0^2(l_0)$ от величины q при различных значениях отношения $m_1=T_0/\tau_k$. Зависимости $\delta_1(q)$ построены для значений $Q_0=0{,}5$ и $m_2=1$.

При помощи кривых рисунка можно определить условия, при которых целесообразно усложнение структуры приемного устройства путем введения блока измерения мощности шума. Например, при $m_1\geqslant 50$ относительное увеличение дисперсии неоптимальной оценки $\sigma_1^2(l_0)$ не превышает 5%, в то время как использование приемного устройства (24) приводит к увеличению дисперсии оценки $\sigma_2^2(l_0)$ в 1,5 раза по сравнению с оптимальной уже при $q\simeq 0{,}6$.

2. КОГЕРЕНТНЫЙ ПРИЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАДИОИМПУЛЬСОВ

Пусть элементарные сигналы являются узкополосными радиоимпульсами. Тогда k-й сигнал может быть записан в виде

$$(28)\qquad s_k(t,\,l_0)=F(t-kT_0,\,l_0)\cos[\omega_0(t-kT_0)+\psi(t-kT_0,\,l_0)-\varphi_{0k}].$$

Здесь $F(t,\ l_0)$ и $\psi(t,\ l_0)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции; φ_{0k} — начальные фазы, которые будем считать распределенными равномерно в интервале $[0;\,2\pi]$.

При когерентном приеме $\varphi_0=\varphi_1=\ldots=\varphi_{\nu-1}$, и выходной эффект оптимального приемника (если известны величины σ_{Nk}^2) определяется выражением

$$M(l) = \ln I_0[R(l)], \tag{29}$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента; $R(l)$ — огибающая на выходе линейного сумматора:

$$R(l) = \left| \sum_{k=0}^{\nu-1} \sigma_{Nk}^{-2} \int_0^{T_0} x_k(t) v_1(t, l)\, dt \right|, \tag{30}$$

$v_1(t, l)$ находится из решения интегрального уравнения (5) при замене его правой части на (28). Для узкополосного радиосигнала функция $v_1(t, l)$ может быть представлена в виде [1]

$$v_1(t, l) = V(t, l) \cos[\omega_0 t + \psi(t, l)]. \tag{31}$$

В силу монотонности функции $\ln I_0$ оптимальную оценку параметра l можно определить из решения уравнения

$$[dR(l) / dl]_{l_m} = 0.$$

Используя комплексное представление для опорного (31) и полезного (28) сигналов, введем обозначения

$$\dot{S}(l_0, l) = {}^1/_2 \int_0^{T_0} F(t, l_0) V(t, l) \exp j[\psi(t, l_0) - \psi(t, l)]\, dt,$$

$$\dot{N}_k(l) = \int_0^{T_0} n_k(t) V(t, l) \exp j[\omega_0 t + \psi(t, l)]\, dt.$$

Подставим $x_k(t)$ (2) в (30). Получим

$-j\varphi_0$

$$R(l) = \left| \sigma_\Sigma^{-2} \dot{S}(l_0, l) + \sum_{k=0}^{\nu-1} \sigma_{Nk}^{-2} \dot{N}_k(l) \right|.$$

Поскольку суммарное отношение сигнал / шум предполагается достаточно большим, последнее выражение можно переписать как

$$R(l) = \sigma_\Sigma^{-2} S_1(l_0, l) + N_1(l).$$

Здесь

$$S_1(l_0, l) = {}^1/_2 \left| \int_0^{T_0} F(t, l_0) V(t, l) \exp j[\psi(t, l_0) - \psi(t, l)]\, dt \right|,$$

$$N_1(l) = {}^1/_2 S_1^{-1}(l_0, l) \sum_{k=0}^{\nu-1} \sigma_{Nk}^{-2} [\dot{S}(l_0, l) \dot{N}_k^*(l) e^{-j\varphi_0} +$$

$$+ \dot{S}^*(l_0, l) \dot{N}_k(l) e^{j\varphi_0}].$$

Учитывая (5) и (13), воспользуемся результатами работы [1] и аналогично (10) и (11) получим выражения для смещения и дисперсии оценки параметра l при оптимальном приеме когерентной последовательности радиоимпульсов

$$\langle \Delta l \rangle = 0, \quad \sigma_0^2(l_0) = -\left[\sigma_\Sigma^{-2} \frac{d^2 S_1(l_0, l)}{dl^2} \right]_{l_0}^{-1}. \tag{32}$$

Если величины σ_{Nk}^2 неизвестны, то оценку параметра l будем определять по положению максимума величины

$$(33) \qquad R_1(l) = \left| \sum_{k=0}^{\nu-1} \hat{\sigma}_{Nk}^{-2} \int_0^{T_0} x_k(t) v_1(t, l)\, dt \right|,$$

где теперь

$$(34) \qquad \hat{\sigma}_{Nk}^2 = (1/T_0) \left[\int_0^{T_0} x_k^2(t)\, dt - {}^1/_2 \int_0^{T_0} F^2(t, l)\, dt \right].$$

Опять полагая, что условие (17) выполняется, перепишем (33) в виде

$$R_1(l) = \sigma_\Sigma^{-2} S_1(l_0, l) - \Delta S_1(l_0, l) + N_1(l) - \Delta N_1(l),$$

$$\Delta S_1(l_0, l) = S_1(l_0, l) \sum_{k=0}^{\nu-1} \Delta\sigma_k^2 / \sigma_{Nk}^4,$$

$$\Delta N_1 = \frac{1}{2} S_1^{-1}(l_0, l) \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\Delta\sigma_k^2}{\sigma_K^4} [\mathcal{S}(l_0, l) N_k^*(l) e^{-j\varphi_0} +$$

$$+ \mathcal{S}^*(l_0, l) N_k(l) e^{j\varphi_0}].$$

Так как для неэнергетического параметра $[d\Delta S_1(l_0, l) / dl]_{l_0} = 0$, то, вычисляя моменты $\langle N_1(l_1) \Delta N_1(l_2) \rangle$ и $\langle \Delta N_1(l_1) \Delta N_1(l_2) \rangle$, аналогично (19), (20), (22) и (32), получим выражения для смещения и дисперсии оценки, определяемой при помощи устройства (33),

$$(35) \qquad \langle \Delta l_1 \rangle = 0,\ \sigma_1^2(l_0) = \sigma_0^2(l_0) [1 + 2(A + B_1 \sigma_\Sigma^{-4} / \sigma_\Sigma^{-2})],$$

здесь

$$B_1 = (1/T_0^2) \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} F(t_1, l_0) F(t_2, l_0) K(t_1 - t_2) \cos \omega_0 (t_1 - t_2)\, dt_1\, dt_2,$$

а $\sigma_0^2(l_0)$ — дисперсия оптимальной оценки (32).

Таким образом, оценка параметра при приеме когерентной пачки радиоимпульсов при помощи устройства (33), производящего измерение мощности помехи в каждом периоде повторения, будет несмещенной и асимптотически оптимальной, поскольку

$$(36) \qquad \lim_{T_0 \to \infty} \sigma_1^2(l_0) = \sigma_0^2(l_0).$$

3. НЕКОГЕРЕНТНЫЙ ПРИЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАДИОИМПУЛЬСОВ

При некогерентном приеме последовательности узкополосных радиоимпульсов с независимыми начальными фазами выходной эффект оптимального приемника (для известных значений σ_{Nk}^2) можно записать как

$$(37) \qquad M(l) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \ln I_0 [\sigma_{Nk}^{-2} R_k(l)],$$

где

$$R_k(l) = \left| \int_0^{T_0} x_k(t) v_1(t, l)\, dt \right|.$$

Если отношение сигнал / шум для одного импульса мало, то оптимальный детектор с характеристикой $\ln I_0$ достаточно хорошо аппроксимируется квадратичной зависимостью [1, 2, 3]. Следовательно, с точностью до постоянного множителя выражение (37) можно переписать в виде

$$M(l) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{R_k^2(l)}{\sigma_{NK}^4} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \left| \frac{\dot{N}_k(l)}{\sigma_{NK}^2} + \frac{\dot{S}(l_0, l)}{\sigma_{NK}^2} e^{-j\varphi_{0k}} \right|^2 =$$

$$= \sigma_\Sigma^{-4} S_1^2(l_0, l) + N_2(l),$$

$$N_2(l) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \sigma_{Nk}^{-4} [\dot{N}_k(l) \dot{N}_k^*(l) + \dot{N}_k(l) \dot{S}^*(l_0, l) e^{j\varphi_{0k}} +$$

$$+ \dot{S}(l_0, l) \dot{N}_k^*(l) e^{-j\varphi_{0k}}].$$

Вычисляя первый и второй моменты помеховой составляющей $N_2(l)$, учитывая (13), (5) и неэнергетичность оцениваемого параметра, при помощи результатов работы [1] можем записать, повторяя выкладки, проделанные при выводе (10) и (12), что смещение и дисперсия оптимальной оценки параметра l при некогерентном приеме равны

$$\langle \Delta l \rangle = 0, \quad \sigma_0^2(l_0) = -\frac{\sigma_\Sigma^{-6}/\sigma_\Sigma^{-4} + \cancel{2}Q_1}{\sigma_\Sigma^{-4} [d^2 S_1(l_0, l)/dl^2]_{l_0}} \tag{39}$$

$$Q_1 = S_1(l_0, l_0), \quad \sigma_\Sigma^{-6} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \sigma_{Nk}^{-6}.$$

В случае неизвестных значений дисперсий помехи оценку параметра l будем определять по максимуму величины

$$M_1(l) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \hat{\sigma}_{Nk}^{-4} R_k^2(l). \tag{40}$$

Здесь $\hat{\sigma}_{Nk}^2$ находится согласно (34).

В силу условия (17) можем переписать (40) как

$$M_1(l) = \sigma_\Sigma^{-4} S_1^2(l_0, l) - 2\Delta S_2(l_0, l) + N_2(l) - 2\Delta N_2(l),$$

$$\Delta S_2(l_0, l) = S_1^2(l_0, l) \sum_{k=0}^{\nu-1} \Delta\sigma_k^2/\sigma_{Nk}^6,$$

$$\Delta N_2(l) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\Delta\sigma_k^2}{\sigma_{Nk}^6} [\dot{N}_k(l) \dot{N}_k^*(l) + \dot{N}_k(l) \dot{S}^*(l_0, l) e^{j\varphi_{0k}} +$$

$$+ \dot{S}(l_0, l) \dot{N}_k^*(l) e^{-j\varphi_{0k}}].$$

Опуская довольно громоздкие выкладки, аналогично (19), (20) получим выражения для смещения и дисперсии оценки, определяемой из (40),

$$\langle \Delta l_1 \rangle = 0, \quad \sigma_1^2(l_0) = \tag{41}$$

$$= \sigma_0^2(l_0)\left[1 + 8\left(A + B_1 \frac{2\sigma_\Sigma^{-6} + Q_1\sigma_\Sigma^{-8}}{2\sigma_\Sigma^{-4} + Q_1\sigma_\Sigma^{-6}}\right)\right]$$

где $\sigma_0^2(l_0)$ — дисперсия оптимальной оценки (39), а $\sigma_\Sigma^{-8} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \sigma_{Nk}^{-8}$.

Из выражения (41) следует, что при некогерентном приеме выполняется соотношение (36) и, следовательно, приемное устройство (40) является асимптотически оптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Куликов, Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, Изд. Советское радио, 1969.
2. С. Е. Фалькович, Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуирующих помех, Изд. Советское радио, 1961.
3. К. Хелстром, Статистическая теория обнаружения сигналов, ИЛ, 1963.
4. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, 2, Изд. Советское радио, 1968.
5. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, Изд. Советское радио, 1966.
6. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1968, **13**, 12, 2254.
7. Определение параметров случайных процессов, Сб. статей, перев. с англ., ГТИ УССР, Киев, 1962.

Поступила в редакцию
7 X 1969