(1Р) (11)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# РАДИОТЕХНИКА
# И
# ЭЛЕКТРОНИКА

Том XV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

12

МОСКВА · 1970

АПТрифонов

УДК 621.391.2

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ СУММЫ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА И НОРМАЛЬНОГО ШУМА

*С. И. Поздняк, В. Г. Радзиевский, А. П. Трифонов*

Применительно к круговому базису разложения поле принимаемого сигнала может быть представлено в виде суперпозиции двух циркулярно-поляризованных компонент противоположного (левого и правого) направления вращения [1]

$$\vec{s}\,(t) = \vec{k_1}\,[s_1(t) + n_1(t)] + \vec{k_2}\,[s_2(t) + n_2(t)], \tag{1}$$

где $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ — единичные орты, $s_i(t) = E_i(t)\cos[\omega_0 t - \varphi_i(t)]$ $(i = 1,\ 2)$ — регулярные составляющие компонент сигнала, $n_i(t)$ $(i = 1, 2)$ — флуктуирующие составляющие суммарного сигнала. Квадратурные составляющие сигнала (1) имеют вид

$$\begin{aligned} x_i(t) &= E_i(t)\cos\varphi_i(t) + n_{ci}(t), \\ y_i(t) &= E_i(t)\sin\varphi_i(t) + n_{si}(t) \qquad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{2}$$

Положим, что $n_{ci}(t)$ и $n_{si}(t)$ — нормальные случайные процессы с нулевыми средними и функциями корреляции вида

$$\begin{aligned} &\langle n_{ci}(t_1)n_{cj}(t_2)\rangle = K_{cij}(t_1, t_2), \\ &\langle n_{si}(t_1)n_{sj}(t_2)\rangle = K_{sij}(t_1, t_2), \\ &\langle n_{ci}(t_1)n_{sj}(t_2)\rangle = \langle n_{si}(t_1)n_{cj}(t_2)\rangle = 0 \qquad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \tag{3}$$

Будем считать сигнал слабо флуктуирующим, если выполняются условия

$$K_{cij}(t_1, t_2) / E_i(t_1)E_j(t_2) \ll 1, \qquad K_{sij}(t_1, t_2) / E_i(t_1)E_j(t_2) \ll 1. \tag{4}$$

Поляризационная структура принятого сигнала (1) достаточно полно характеризуется коэффициентом эллиптичности

$$K(t) = \frac{[x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{1/2} - [x_2^2(t) + y_2^2(t)]^{1/2}}{[x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{1/2} + [x_2^2(t) + y_2^2(t)]^{1/2}} \tag{5}$$

и углом ориентации поляризационного эллипса [1]

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{y_1(t)}{x_1(t)} - \operatorname{arctg}\frac{y_2(t)}{x_2(t)}\right], \tag{6}$$

которые из-за присутствия флуктуирующей составляющей будут носить случайный характер. Квадратурные составляющие (2) можно переписать в виде

$$x_i(t) = E_i(t)\left[\cos\varphi_i(t) + \frac{n_{ci}(t)}{E_i(t)}\right] = E_i(t)[\cos\varphi_i(t) + \xi_i(t)],$$

$$y_i(t) = E_i(t)\left[\sin\varphi_i(t) + \frac{n_{si}(t)}{E_i(t)}\right] = E_i(t)[\sin\varphi_i(t) + \xi_{i+2}(t)] \quad (i = 1, 2).$$

Величины $\xi_i$ подчиняются нормальному распределению с нулевым средним, причем в силу (3) и (4)

$$\begin{aligned} &\langle\xi_i(t_1)\xi_i(t_2)\rangle = R_{ii}(t_1, t_2) \ll 1,\\ &\langle\xi_j(t_1)\xi_{j+1}(t_2)\rangle = R_{jj+1}(t_1, t_2) \ll 1,\\ &\langle\xi_{j+1}(t_1)\xi_j(t_2)\rangle = R_{j+1j}(t_1, t_2) \ll 1 \qquad (i = 1, \ldots, 4), \ (j = 1, 3). \end{aligned} \tag{7}$$

Учитывая введенные выше обозначения, выражения (5) и (6) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{E_1(t)\{[\cos\varphi_1(t) + \xi_1(t)]^2 + [\sin\varphi_1(t) + \xi_3(t)]^2\}^{1/2} - E_2(t)\{[\cos\varphi_2(t) + \xi_2(t)]^2 + [\sin\varphi_2(t) + \xi_4(t)]^2\}^{1/2}}{E_1(t)\{[\cos\varphi_1(t) + \xi_1(t)]^2 + [\sin\varphi_1(t) + \xi_3(t)]^2\}^{1/2} + E_2(t)\{[\cos\varphi_2(t) + \xi_2(t)]^2 + [\sin\varphi_2(t) + \xi_4(t)]^2\}^{1/2}}\\ \theta(t) &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi_1(t) + \xi_3(t)}{\cos\varphi_1(t) + \xi_1(t)} - \operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi_2(t) + \xi_4(t)}{\cos\varphi_2(t) + \xi_2(t)}\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, эти и любые другие поляризационные параметры можно представить в виде некоторой функции $F(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = F(t, \xi_i)$, где $\xi_i$ — безразмерные нормально распределенные случайные величины, средние значения которых равны нулю, а все вторые моменты меньше единицы.

Для определения среднего значения и функции корреляции разложим $F(t, \xi_i)$ в ряд Тейлора по $\xi_i$ в окрестности точки $\xi_i = 0$:

$$F(t, \xi_i) = F(t, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta^m F(t, \xi_i)}{m!}\Bigg|_{\xi_i = 0}, \tag{9}$$

где использовано символическое обозначение

$$\Delta = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial}{\partial\xi_k}\xi_k. \tag{10}$$

Среднее значение функции (9) запишется как

$$\langle F(t, \xi_i)\rangle = F(t, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle\Delta^m F(t, \xi_i)\rangle}{m!}\Bigg|_{\xi_i = 0}. \tag{11}$$

Найдем моменты в правой части выражения (11), учитывая, что $\Delta$ (10) распределена нормально с нулевым средним и дисперсией

(12) $$\langle\Delta^2\rangle = \left\langle \sum_{k,m=1}^{4} \boxed{\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\,\partial\xi_m}\xi_k\xi_m} \right\rangle = \sum_{k,m=1}^{4} \boxed{\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\,\partial\xi_m}\sigma_{km}{}^2},$$

где

$$\sigma^2{}_{km} = R_{km}(t, t).$$

Соответственно для произвольного члена ряда имеем

(13) $$\Delta^m\sigma^2 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m = 2k+1, \\ 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(m-1)\Delta^k\sigma^2 & \text{при} \quad m = 2k, \end{cases}$$

где

$$\Delta^k\sigma^2 = \left[\sum_{k,m=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial\xi_k\,\partial\xi_m}\sigma_{km}{}^2\right]^k.$$

Подставляя (13) в (11), получим

(14) $$\langle F(t, \xi_i)\rangle = \left\{\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta^k\sigma^2}{(2k)!!}\right] F(t, \xi_i)\right\}\Bigg|_{\xi_i=0}.$$

При выполнении условия (7) можно ограничиться использованием конечного отрезка ряда (14). Погрешность может быть приближенно оценена при помощи величины

$$Q_{m+1} = \Delta^{m+1}\sigma^2 F(t, \xi_i)\ /\ (2m+2)!!,$$

имеющей порядок малости $\xi_{m+1} \sim (\sigma_{\nu k}{}^2)^{m+1}$ $(\nu, k = 1, \ldots, 4)$.

(15) $$B_F(t_1, t_2) = \langle F(t_1, \xi_i)F(t_2, \xi_k)\rangle - \langle F(t_1, \xi_i)\rangle\langle F(t_2, \xi_k)\rangle.$$

Производя соответствующие подстановки, получим

(16) $$B_F(t_1, t_2) = \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{\langle\Delta^m F(t_1, \xi_i)\Delta^k F(t_2, \xi_k)\rangle}{m!k!} - \sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{\Delta^m\sigma^2 F(t_1, \xi_i)\Delta^k\sigma^2 F(t_2, \xi_k)}{(2m)!!(2k)!!}\Bigg|_{\xi_i=0};$$

для моментов в правой части (16) согласно [2] можно записать

$$\langle\Delta^m F(t_1, \xi_i)\Delta^k F(t_2, \xi_k)\rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} N_{m,\nu}N_{k,\nu}\times$$

$$\times\frac{\Delta^\nu R(t_1, t_2)F(t_1, \xi_i)F(t_2, \xi_k)\Delta^{(m-\nu)/2}R_0(t_1)\Delta^{(k-\nu)/2}R_0(t_2)}{\nu!},$$

где

$$N_{m,\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m\Phi^{(\nu+1)}(x)\,dx, \qquad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\,dt,$$

$$\Delta^\nu R(t_1, t_2)F(t_1, \xi_i)F(t_2, \xi_k) =$$

$$= \left\{\left[\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial\xi_{i1}\,\partial\xi_{k2}}R_{ik}(t_1, t_2)\right]^\nu F(t_1, \xi_i)F(t_2, \xi_k)\right\}\Bigg|_{\xi_i=\xi_k=0},$$

$F(t_i\,\xi_i)$

$$\Delta^{(\lambda-\nu)/2}R_0(t_i) = \left\{\left[\sum_{k,n=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\,\partial\xi_n}\sigma_{kn}{}^2\right]^{(\lambda-\nu)/2} F(t_i, \xi_k)\cancel{F(t_i, \xi_n)}\right\}\Bigg|_{\xi_i=\xi_n=0}.$$

Если использовать конечное число членов ряда (16), то погрешность можно оценить по величине первого отброшенного члена.

В качестве примера рассмотрим случай, когда детерминированная часть сигнала (1) представляет отрезок синусоидального колебания длительностью $T$.

$$s_i(t) = E_i \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \qquad (i = 1, 2). \tag{17}$$

Считая шумы стационарными, положим равными коэффициенты автокорреляции $\rho_1(\tau)$ и $\rho_2(\tau)$ квадратур поляризационно-ортогональных компонент

$$\rho_1(\tau) = \rho_2(\tau) = \rho(\tau)$$

и обозначим через $\rho_{12}(\tau)$ коэффициент взаимной корреляции квадратур между каналами; $\sigma_i^2$ — дисперсию квадратур помехи в каждом канале и $z_i = E_i / \sigma_i$ — отношение сигнал / шум в каждом канале.

Тогда, используя первые два члена выражений (14) и (16) и учитывая, что поляризационные параметры $K_0$ и $\theta_0$ детерминированного сигнала (17), а также отношение сигнал / шум не зависят от времени, получим для среднего значения и соответственно функции корреляции исследуемых параметров

$$\langle K(t) \rangle = K_0 \left\{ 1 + (1 - K_0^2) \left[ \frac{2\rho_{12}(0)}{z_1 z_2} \cos 2\theta_0 - \frac{1}{4} \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} \right] \right\}, \tag{18}$$

$$\langle \theta(t) \rangle = \theta_0 - \frac{1}{8} \frac{\rho_{12}(0)}{z_1 z_2} \cos 2\theta_0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} B_K(t_1 - t_2) = \frac{1 - K_0^2}{4} \Bigg\{ & \rho(t_1 - t_2) \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} - 2\rho_{12}(t_1 - t_2) \frac{1}{z_1 z_2} \cos 2\theta_0 + \\ & + \frac{K_0^2}{2} \Bigg[ \rho^2(t_1 - t_2) \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} - 16 \frac{\rho(t_1 - t_2)\rho_{12}(t_1 - t_2)}{z_1 z_2} \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} \cos 2\theta_0 + \\ & + 64\rho_{12}^2(t_1 - t_2) \frac{1}{z_1^2 z_2^2} \cos^2 2\theta_0 \Bigg] \cancel{+ \frac{(1 - K_0^2)^2}{16} \left[ \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} - 2 \frac{\rho_{12}(0)}{z_1 z_2} \cos 2\theta_0 \right]^2 -} \\ & \cancel{- K_0^2 \left[ \frac{4\rho_{12}(0)}{z_1 z_2} \cos 2\theta_0 - \frac{1}{2} \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} \right]^2} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} B_\theta(t_1 - t_2) = \frac{1}{4} \Bigg\{ & \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} \rho(t_1 - t_2) - 2 \frac{\rho_{12}(t_1 - t_2)}{z_1 z_2} \cos 2\theta_0 + \\ & + \frac{1}{8} \rho_{12}^2(t_1 - t_2) \frac{1}{z_1^2 z_2^2} \cos^2 2\theta_0 \cancel{+} \\ & \cancel{+ \frac{1}{16} \left\{ \left[ \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} - 2 \frac{\rho_{12}(0)}{z_1 z_2} \cos 2\theta_0 \right]^2 - \frac{\rho_{12}^2(0)}{z_1^2 z_2^2} \cos^2 2\theta_0 \right\}} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Полученные выражения (18) — (21) имеют вид, удобный для непосредственных расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. С. И. Поздняк, Поляризация электромагнитных волн и ее анализ, Изд. ХВАИВУ, 1961.
2. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, Изд. Советское радио, 1966.


Поступило в редакцию
2 II 1970