12

12

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

Радиоэлектроника

ТОМ XIII
12
1970

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ 50-ЛЕТИЯ ВЕЛИКОЙ
ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ

УДК 621.391

А. П. ТРИФОНОВ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОЦЕНОК МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Для случая больших отношений сигнал/шум получено приближенное выражение, определяющее распределение оценки максимального правдоподобия произвольного параметра детерминированного сигнала, принимаемого на фоне стационарного нормального шума. Приведены примеры вычисления распределений оценок.

Задача определения характеристик оценки максимального правдоподобия параметра сигнала при оптимальном приеме в нормальном шуме рассматривалась в ряде работ [1, 2]. При этом, как правило, находились лишь первые два момента (смещение и дисперсия) оценки, в то время как наиболее полно оценка характеризуется своим распределением. В этой связи определение хотя бы приближенных выражений для распределения оценки максимального правдоподобия представляет интерес.

Известно [1, 2], что оценки максимального правдоподобия асимптотически нормальны. Следовательно, при больших отношениях сигнал/шум распределение оценки будет мало отличаться от нормального. Поэтому, определив первые четыре момента оценки, можно с достаточной точностью аппроксимировать ее распределение с помощью отрезка ряда Эджворта, который запишем в виде [1, 3]

$$W(x)=\sigma^{-1}\left[\Phi'\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)-\frac{\gamma_1}{3!}\,\Phi^{(4)}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)+\frac{\gamma_2}{4!}\,\Phi^{(5)}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right], \tag{1}$$

где

$$\Phi(u)=1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{u}\exp\left(-t^2/2\right)dt$$

— интеграл вероятности [1],

$$\Phi^{(n)}(u)=d^n\Phi(u)/du^n,$$

$m=\chi_1$ — среднее значение случайной величины x; $\sigma^2=\chi_2$ — дисперсия; $\gamma_1=\chi_3/\chi_2^{3/2}$ — коэффициент асимметрии; $\gamma_2=\chi_4/\chi_2^2$ — коэффициент эксцесса; $\chi_i\,(i=1\ldots4)$ — кумулянты (семиинварианты) [1, 3].

Таким образом, вычислив первые четыре кумулянта, можем с помощью формулы (1) найти распределение оценки максимального правдоподобия, если только отношение сигнал/шум не слишком мало.

Рассмотрим задачу определения распределения оценки максимального правдоподобия параметра детерминированного сигнала при оптимальном приеме на фоне стационарного нормального шума.

Положим, что на вход оптимального приемного устройства в течение времени $[0, T]$ поступает аддитивная смесь сигнала и помехи

$$x(t) = s(t, l_0) + n(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

Здесь $s(t, l_0)$ — полезный сигнал, содержащий неизвестный параметр l_0, подлежащий оценке; $n(t)$ — стационарный нормальный шум с нулевым средним значением $\langle n(t) \rangle = 0$ и функцией корреляции $K(t_1 - t_2) = \langle n(t_1) n(t_2) \rangle$.

Выходной сигнал оптимального приемного устройства определяется выражением [1, 2]

$$M(l) = \int_0^T x(t) v(t, l) dt - \frac{1}{2} Q(l), \tag{3}$$

где $v(t, l)$ находится из решения интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t - t_1) v(t_1, l) dt_1 = s(t, l), \tag{4}$$

а $Q(l) = \int_0^T s(t, l) v(t, l) dt$ — отношение сигнал/шум [1, 2].

Оценкой параметра l_0 является значение l_m, которое обращает (3) в максимум максиморум. Оценка l_m отыскивается как решение уравнения правдоподобия

$$[dM(l)/dl]_{l_m} = 0. \tag{5}$$

Подставим (2) в (3) и введем обозначения

$$S(l_0, l) = \int_0^T s(t, l_0) v(t, l) dt, \; N(l) = \int_0^T n(t) v(t, l) dt,$$

$$S(l) = S(l_0, l) - \frac{1}{2} Q(l), \;\; \delta = Q_0^{-1/2}, \;\; Q_0 = Q(l_0),$$

$$\hat{S}(l) = \delta^2 S(l), \;\; \hat{S}(l_1, l_2) = \delta^2 S(l_1, l_2), \;\; \hat{N}(l) = \delta N(l).$$

Используя эти обозначения, перепишем уравнение (5) как

$$\frac{d}{dl} [\hat{S}(l) + \delta \hat{N}(l)]_{l_m} = 0. \tag{6}$$

При этом

$$\max \hat{S}(l) = \hat{S}(l_0) = 1/2, \quad \langle \hat{N}^2(l_0) \rangle = 1.$$

Если отношение сигнал/шум Q_0 велико, то $\delta \ll 1$ и решение уравнения (6) можно искать в виде ряда по степеням δ [1, 2]

$$l_m = l_0 + \delta l_1 + \delta^2 l_2 + \delta^3 l_3 + \ldots \tag{7}$$

Ошибка единичного измерения параметра l_0 будет равна

$$\Delta l = l_m - l_0 = \delta l_1 + \delta^2 l_2 + \delta^3 l_3 + \ldots \tag{8}$$

Используя известные формулы [1, 3], с помощью (8) нетрудно найти первые четыре кумулянта распределения случайной ошибки измерения Δl

$$\chi_1=\delta<l_1>+\delta^2<l_2>+\delta^3<l_3>,$$

$$\chi_2=\delta^2(<l_1^2>-<l_1>^2)+2\,\delta^3(<l_1 l_2>-<l_1><l_2>)+$$
$$+\delta^4[<l_2^2>-<l_2>^2+2(<l_1 l_3>-<l_1><l_3>)], \qquad (9)$$

$$\chi_3=\delta^3<l_1^3>+3\,\delta^4(<l_1^2 l_2>-<l_2><l_1^2>)+3\,\delta^5(<l_2^2 l_1>+$$
$$+<l_1^2 l_3>-2<l_2><l_1 l_2>),$$

$$\chi_4=\delta^4(<l_1^4>-3<l_1^2>^2)+4\,\delta^5(<l_1^3 l_2>-3<l_1^2><l_1 l_2>-$$
$$-<l_1^3><l_2>)+\delta^6[6<l_1^2 l_2^2>+4<l_1^3 l_3>-6<l_1^2><l_2^2>-$$
$$-12(<l_1^2><l_1 l_3>+<l_2><l_1^2 l_2>-<l_2^2><l_1^2>)].$$

Отметим, что формулы (8) и (9) имеют относительную погрешность порядка $\delta^3=1/Q_0^{3/2}$.

Для определения величин l_1, l_2, l_3 (7) разложим функцию в квадратных скобках в левой части уравнения (6) в ряд Тейлора в окрестности точки l_0 и приравняем нулю коэффициенты при δ в одинаковых степенях. Решая полученные таким образом уравнения относительно l_1, l_2, l_3, будем иметь:

$$l_1=-\left[\frac{d\,\widehat{N}(l)}{dl}\Big/\frac{d^2\,\widehat{S}(l)}{dl^2}\right]_{l_0},$$

$$l_2=-\left\{\left[\frac{d^2\,\widehat{N}(l)}{dl^2}\,l_1+\frac{1}{2}\,\frac{d^3\,\widehat{S}(l)}{dl^3}\,l_1^2\right]\Big/\frac{d^2\,\widehat{S}(l)}{dl^2}\right\}_{l_0},$$

$$l_3=-\left\{\left[\frac{d^2\,\widehat{N}(l)}{dl^2}\,l_2+\frac{1}{2}\,\frac{d^3\,\widehat{N}(l)}{dl^3}\,l_1^2+\frac{1}{6}\,\frac{d^4\,\widehat{S}(l)}{dl^4}\,l_1^3+\frac{d^3\,\widehat{S}(l)}{dl^3}\,l_1 l_2\right]\Big/\frac{d^2\,\widehat{S}(l)}{dl^2}\right\}_{l_0}.$$

Подставляя эти выражения в (9) и выполняя усреднение, получим:

$$\chi_1=-\frac{\delta^2}{2}\left[\frac{\partial^3\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1^2\partial l_2}\right]_{l_0}\left[\frac{\partial^2\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1\partial l_2}\right]_{l_0}^{-2};$$

$$\chi_2=\delta^2\left[\frac{\partial^2\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1\partial l_2}\right]_{l_0}^{-1}\left\{1-\delta^2\left(\frac{\dfrac{\partial^4\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1^3\partial l_2}}{\left[\dfrac{\partial^2\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1\partial l_2}\right]^2}-\frac{7}{2}\,\frac{\left[\dfrac{\partial^3\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1^2\partial l_2}\right]^2}{\left[\dfrac{\partial^2\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1\partial l_2}\right]^3}\right)\right\}_{l_0},$$

$$\chi_3=-3\,\delta^4\left[\frac{\partial^3\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1^2\partial l_2}\right]_{l_0}\left[\frac{\partial^2\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1\partial l_2}\right]_{l_0}^{-3}, \qquad (10)$$

$$\chi_4=4\,\delta^6\left[\frac{\partial^2\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1\partial l_2}\right]_{l_0}^{-5}\left\{6\left[\frac{\partial^3\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1^2\partial l_2}\right]^2-\frac{\partial^4\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1^3\partial l_2}\,\frac{\partial^2\,\widehat{S}(l_1,\,l_2)}{\partial l_1\partial l_2}\right\}_{l_0}.$$

При выводе этих формул были использованы соотношения [1, 2]

$$<\widehat{N}(l)>=0, \quad <\widehat{N}(l_1)\widehat{N}(l_2)>=\widehat{S}(l_1,\ l_2), \quad \widehat{S}(l,\ l)=\delta^2 Q(l).$$

Возвращаясь к ненормированной функции $S\ (l_1,\ l_2)$ для характеристик плотности распределения оценки, можем записать:

$$m=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^3 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1^2 \partial l_2}\right]_{l_0} \Big/ \left[\frac{\partial^2 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}\right]^2_{l_0},$$

$$\sigma=\left(D^{1/2}/\sqrt{2}\right)\left[\frac{\partial^2 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}\right]^{2}_{l_0}, \quad -2$$

$$\gamma_1=-6\sqrt{2}\ \left[\frac{\partial^3 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1^2 \partial l_2}\right]_{l_0}\left[\frac{\partial^2 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}\right]^3_{l_0} \Big/ D^{3/2}, \qquad (11)$$

$$\gamma_2=16\left\{6\left[\frac{\partial^3 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1^2 \partial l_2}\right]^2-\frac{\partial^4 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1^3 \partial l_2}\,\frac{\partial^2 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1\, \partial l_2}\right\}_{l_0}\left[\frac{\partial^2 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}\right]^3_{l_0} \Big/ D^2,$$

$$D=\left\{2\left[\frac{\partial^2 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}\right]^3-2\,\frac{\partial^4 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1^3 \partial l_2}\,\frac{\partial^2 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}+7\left[\frac{\partial^3 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1^2 \partial l_2}\right]^2\right\}_{l_0}.$$

Эти формулы применимы при оценке произвольного параметра l. Если оцениваемый параметр является неэнергетическим, т. е. величина отношения сигнал/шум не зависит от l, то $S\ (l_1,\ l_2)$ будет функцией модуля разности своих аргументов [4]

$$S(l_1,\ l_2)=S(|l_1-l_2|)$$

и формулы (11) несколько упрощаются. Они принимают вид:

$$m=\gamma_1=0, \quad \sigma=\left[-\frac{d^2 S(l_0,\ l)}{dl^2}\right]^{-1/2}_{l_0}\left\{1+\frac{\dfrac{d^4 S(l_0,\ l)}{dl^4}}{\left[\dfrac{d^2 S(l_0,\ l)}{dl^2}\right]^2}\right\}^{1/2}_{l_0};$$

$$\gamma_2=\frac{4\left[\dfrac{d^4 S(l_0,\ l)}{dl^4}\right]_{l_0}\left[\dfrac{d^2 S(l_0,\ l)}{dl^2}\right]^2_{l_0}}{\left\{\left[\dfrac{\partial^2 S\ (l_0,\ l)}{dl^2}\right]^2+\dfrac{d^4 S(l_0,\ l)}{dl^4}\right\}^{2}_{l_0}}. \qquad (12)$$

Следовательно, распределение оценки неэнергетического параметра всегда симметрично и обладает положительным эксцессом.

Найдем теперь моду распределения оценки произвольного параметра. Обозначая моду распределения (1) через z и учитывая, что в рассматриваемом случае $(z-m)^2 \ll \sigma^2$, выразим в (1) производные интеграла вероятности через полиномы Эрмита [1, 3]. Отбрасывая в полученном выражении для $W(x)$ степени $(x-m)$ выше второй и решая уравнение $[dW\ (x)/dx]_z=0$ при условии $[d^2 W(x)/dx^2]_z<0$, будем иметь, что мода распределения (1) приближенно равна

$$z=\chi_1-\frac{4\,\chi_3\chi_2}{5\,\chi_4+8\,\chi_2^2}.$$

Подставив в это выражение значения кумулянтов (10), убеждаемся, что при больших отношениях сигнал/шум, т. е. при $\delta \to 0$ справедливо равенство

$$z \simeq -2\,m. \tag{13}$$

Отсюда следует, что у распределения случайной ошибки измерения смещенной оценки ($m \neq 0$), мода и среднее значение всегда расположены по разные стороны от истинного значения параметра l_0, в то время как у распределения несмещенной оценки мода всегда совпадает с истинным значением оцениваемого параметра.

Формулы (10) и (11) имеют относительную погрешность порядка δ^3. Если ограничиться рассмотрением лишь первого приближения, т. е. положить $\Delta\, l = \delta\, l_1$, то эти формулы примут вид:

$$m = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \sigma = \left[\frac{\partial^2 S\ (l_1,\ l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}\right]_{l_0}^{-1/2}. \tag{14}$$

Значит распределение и дисперсия рассмотренной оценки в первом приближении совпадают с распределением и дисперсией несмещенной эффективной оценки [1, 2].

Для иллюстрации основных соотношений рассмотрим два конкретных примера.

1. Определим распределение оценки временного положения ε_0 колокольного импульса

$$s(t, \varepsilon_0) = a_0 e^{-\frac{(t-\varepsilon)^2}{\tau_0^2}}, \qquad -T/2 \leqslant t \leqslant T/2, \tag{15}$$

при приеме на фоне белого шума со спектральной плотностью N_0.

Решение уравнения (4) в этом случае будет равно

$$v(t,\ \varepsilon) = \frac{2\,a_0}{N_0}\, e^{-\frac{(t-\varepsilon)^2}{\tau_0^2}}.$$

Полагая, что сигнал (15) полностью расположен внутри интервала наблюдения, т. е. $\varepsilon_0 \ll T$, $\tau_0 \ll T$, для функции $S_*\ (\varepsilon_0,\ \varepsilon)$ получим

$$S(\varepsilon_0, \varepsilon) = Q_0 e^{-\frac{(\varepsilon_0-\varepsilon)^2}{2\tau_0^2}},$$

где $Q_0 = \dfrac{a_0^2 \sqrt{2\,\pi}}{N_0}\tau_0$ — отношение удвоенной энергии сигнала к спектральной плотности белого шума.

Вычислив производные, входящие в (12), можем записать

$$\sigma = \frac{\tau_0}{Q_0}\sqrt{3+Q_0}, \ \ \gamma_2 = \frac{12\,Q_0}{[3+Q_0]^2}. \tag{16}$$

Укажем, что дисперсия эффективной оценки временного положения ε_0 равна $\sigma^2 = \tau_0^2/Q_0$ (14).

На рис. 1 приведены кривые плотности распределения случайной ошибки измерения $\Delta\varepsilon = \varepsilon_m - \varepsilon_0$, отнесенной к длительности сигнала (15) τ_0. Кривые построены для различных отношений сигнал/шум по формулам (1) и (16). На этом же рисунке для сравнения пунктиром нанесены плотности распределения случайной ошибки измерения $\Delta\varepsilon/\tau_0$ для эффективной оценки. Из рассмотрения кривых рис. 1 следует, что вычисленное распределение оценки незначительно отличается от распределения эффективной оценки, хотя при отношении сигнал/шум порядка 10 дисперсия оценки, определяемая из формулы (16), оказывается на 30% больше

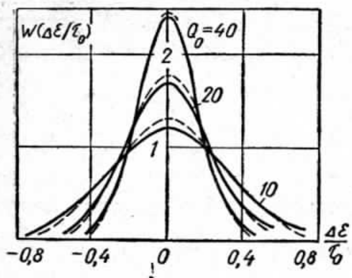

Рис. 1.

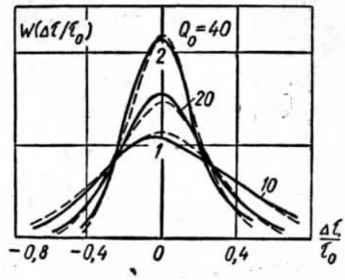

Рис. 2.

дисперсии эффективной оценки. Увеличение дисперсии при не очень больших отношениях сигнал/шум по сравнению с эффективной оценкой вызывает «расширение» пика плотности распределения, однако наличие положительного эксцесса частично компенсирует это «расширение» и обуславливает близость распределения оценки максимального правдоподобия к распределению эффективной оценки.

2. Найдем распределение оценки длительности τ_0 сигнала (15) при приеме на фоне белого шума.

Полагая по-прежнему, что $\tau_0 \ll T$ для функции $S(\tau_1, \tau_2)$ имеем

$$S(\tau_1, \tau_2) = \frac{Q_0}{\tau_0} \frac{\tau_1 \tau_2 \sqrt{2}}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}}.$$

Дифференцируя это выражение и подставляя в (11), можем записать:

$$m = \frac{\tau_0}{3 Q_0}, \quad \sigma = \frac{\tau_0}{Q_0} \sqrt{\frac{2}{3}} (7 + 2 Q_0)^{1/2},$$

$$\gamma_1 = 6 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{Q_0}{(7 + 2 Q_0)^{3/2}}, \quad \gamma_2 = \frac{208}{3} \frac{Q_0}{(7 + 2 Q_0)^2}. \tag{17}$$

Дисперсия эффективной оценки в этом случае равна

$$\sigma^2 = 4 \tau_0^2 / 3 Q_0.$$

По формулам (1) и (17) на рис. 2 построены кривые плотности вероятности относительной ошибки единичного измерения длительности $\Delta\tau/\tau_0$ для различных значений отношения сигнал/шум (штриховой линией нанесены плотности распределения для относительной ошибки эффективной оценки). В этом примере увеличение дисперсии оценки по сравнению с эффективной, так же как и в предыдущем случае, компенсируется положительным эксцессом. Однако в отличие от оценки временного положения, распределение оценки длительности несимметрично. Поскольку коэффициент асимметрии этого распределения положителен, максимум плотности вероятности смещен влево от среднего значения, но среднее значение расположено справа от истинного значения параметра τ_0.

В результате мода распределения близка к истинному значению оцениваемого параметра, а само распределение незначительно отличается от распределения эффективной оценки.

Таким образом, в рассмотренных ситуациях, распределение эффективной оценки довольно удовлетворительно аппроксимирует распределение оценки максимального правдоподобия, хотя числовые характеристики распределения оценки максимального правдоподобия могут заметно отличаться от соответствующих характеристик распределения эффективной оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, Изд-во «Советское радио», 1966.
2. Куликов Е. И., Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, Изд-во «Советское радио», 1969.
3. Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, Изд-во «Наука», 1966.
4. Куликов Е. И., Трифонов А. П., О некоторых свойствах сигнала на выходе оптимального приемника, Радиотехника и электроника, 1968, 13, № 12, 2254.

Поступила в редакцию
6 II 1970 г.