13 13

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

Радиоэлектроника

ТОМ XIV
2
1971

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ 50-ЛЕТИЯ ВЕЛИКОЙ
ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ

УДК 621.391.8

А. П. ТРИФОНОВ

О ЗАДАЧЕ РАЗЛИЧЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Рассматривается прием нескольких ортогональных сигналов на фоне нормальных помех. Предполагается, что энергия и априорная вероятность появления каждого из сигналов различны, а случайная начальная фаза каждого сигнала имеет априорное распределение вероятностей, отличное от равномерного.

Определены структура и характеристики оптимального приемного устройства.

В практике радиосвязи и телеуправления широкое применение находят методы передачи дискретной информации с использованием сложных по форме радиосигналов. Поскольку обычно прием производится в присутствии шумов, то представляет интерес определить ошибки, возникающие за счет этих шумов. Будем полагать, что передаваемое сообщение может иметь ν дискретных значений, которым в свою очередь соответствуют ν ортогональных радиосигналов. Поэтому задача приема дискретного сообщения сводится к задаче различения одного из ν ортогональных сигналов. Хотя этой задаче и посвящено достаточно большое число фундаментальных работ [1, 2, 3], однако, в этих работах, как правило, предполагается, что энергии всех сигналов одинаковы, а так же считается, что начальные фазы сигналов либо известны, либо случайны и распределены равномерно на интервале $[0; 2\pi]$. В то же время в ряде прикладных задач оказывается необходимым производить прием ортогональных сигналов, энергии которых различны, а начальные фазы имеют распределения отличные от равномерного. В связи с этим определим структуру и характеристики оптимального приемного устройства для различения таких сигналов.

Итак, пусть на вход приемного устройства в течение времени $[0: T]$ поступает аддитивная смесь одного из сигналов $s_k(t)$, $k=1, ..., \nu$ и стационарного нормального шума $n(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $K(t_1-t_2)$

$$x(t)=n(t)+s_k(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1}$$

узкополосный радиосигнал $s_k(t)$ можно представить в виде

$$s_k(t)=F_k(t)\cos[\omega_k t+\psi_k(t)-\varphi_k], \tag{2}$$

где $F_k(t)$ и $\psi_k(t)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции; ω_k— несущая частота, φ_k—начальная фаза κ-го сигнала.

В качестве априорного распределения неизвестной начальной фазы выберем функцию [1]

$$W_{pr}(\varphi_k) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left[A_k \cos\left(B_k - \varphi_k\right)\right]}{2\pi I_0\left(A_k\right)}, & \left|B_k - \varphi_k\right| \leqslant \pi, \\ 0, & \left|B_k - \varphi_k\right| > \pi. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $I_0(A_k)$ — функция Бесселя нулевого порядка, мнимого аргумента, B_k и A_k— параметры, характеризующие соответственно «положение и ширину пика» априорного распределения начальной фазы. Путем выбора значений B_k и A_k можно аппроксимировать большой класс унимодальных функций распределения. В частности при $A_k=0$ получаем равномерное априорное распределение начальной фазы. При больших значениях A_k распределение (3) приближается к нормальному с дисперсией A_k^{-1} и средним значением B_k. Если $A_k \to \infty$, то распределение (3) обращается в дельта-функцию, что соответствует приему сигнала с точно известной фазой.

Будем считать, так же как и в [2, 3], что на входе приемного устройства в любой момент времени присутствует один из ν сигналов вида (2). Тогда оптимальное приемное устройство должно вырабатывать коэффициенты правдоподобия или их логарифмы M_k для каждого из сигналов, а затем сравнивать величины M_k. Решение о наличии κ-го сигнала на входе приемного устройства принимается, если

$$M_k > M_i, \quad i \neq k, \; i, \; k = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{4}$$

Обобщая результаты [4] на случай приема сигнала на фоне коррелированных помех для логарифма коэффициента правдоподобия κ-го сигнала, получим

$$M_k = \ln I_0\left(R_k\right) - \frac{1}{2} Q_k + \ln p_k, \tag{5}$$

где:

$$R_k = \left[\left(X_k + A_k \cos B_k\right)^2 + \left(Y_k + A_k \sin B_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$X_k = \int_0^T x(t) \; V_k(t) \cos\left[\omega_k t + \psi_k(t)\right] dt,$$

$$Y_k = \int_0^T x(t) \; V_k(t) \sin\left[\omega_k t + \psi_k(t)\right] dt.$$

$Q_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T F_k(t) V_k(t)\, dt$ — отношение сигнал/шум для κ-го сигнала, $V_k(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^T K\left(t_1 - t\right) \; V_k\left(t_1\right) \cos\left[\omega_k t_1 + \psi_k\left(t_1\right) - \varphi_k\right] dt_1 = s_k(t),$$

а p_k — априорная вероятность появления κ-го сигнала$\left(\sum_{k=1}^{\nu} p_k = 1\right)$. Следовательно, оптимальный приемник должен состоять из ν параллельных каналов, вырабатывающих величины (5), и решающего устройства, производящего сравнение сигналов на выходе каналов.

Определим теперь вероятность правильного решения D_k, т. е. вероятность того, что при наличии сигнала $s_k(t)$ на входе приемника, выполняются неравенства (4), учитывая, что в силу ортогональности сигналов величины M_i и M_j независимы при $j \neq i$. Для вычисления D_k необходимо знать распределение величин M_k и M_i и, следовательно, необходимо решить трансцендентные уравнения (5) относительно R_k, что в общем случае не представляется возможным. Поэтому точные значения M_k и M_i заменим приближенными, справедливыми при больших значениях R_k [5]

$$M_k \simeq R_k - \frac{1}{2} Q_k + \ln p_k. \tag{6}$$

Следует отметить, что (6) переходит в точное равенство, если выполняется одно из условий:

а) начальные фазы сигналов известны точно, т. е. $A_k \to \infty$;

б) все сигналы равновероятны и имеют одинаковую энергию.

Теперь определим плотность распределения вероятности величины R_k. Для этого в выражение для R_k подставим $x(t)$ из (1) и $s_k(t)$ из (2). После несложных тригонометрических преобразований получим

$$R_k = [(\alpha_k + \alpha_{0k})^2 + (\beta_k + \beta_{0k})^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

где:

$$\alpha_k = \int_0^T n(t)\, V_k(t) \cos[\omega_k t + \psi_k(t)]\, dt,$$

$$\beta_k = \int_0^T n(t)\, V_k(t) \sin[\omega_k t + \psi_k(t)]\, dt,$$

$$\alpha_{0k} = A_k \cos B_k + Q_k \cos \varphi_k, \tag{8}$$

$$\beta_{0k} = A_k \sin B_k + Q_k \sin \varphi_k.$$

Так как α_k и β_k в (7) являются независимыми нормально распределенными случайными величинами, средние значения которых равны нулю, а дисперсии — Q_k, распределение величины R_k с учетом (3) можем записать как

$$W(R_k) = \frac{R_k}{2\pi I_0(A_k) Q_k} \exp\left[-\frac{A_k^2 + Q_k^2 + R_k^2}{2Q_k}\right] \int_0^{2\pi} \left[\frac{R_k}{Q_k}(A_k^2 + Q_k^2 + 2A_k Q_k^2 \cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\right] d\varphi \tag{9}$$

при $R_k > 0$ и $W(R_k) = 0$ — при $R_k \leqslant 0$.

Аналогично, положив вторые слагаемые в правой части (8) равными нулю, получим для плотности распределения вероятности величины R_i:

$$W(R_i) = \frac{R_i}{Q_i} \exp\left[-\frac{R_i^2 + A_i^2}{2Q_i}\right] I_0\left(\frac{R_i A_i}{Q_i}\right) \tag{10}$$

при $R_i > 0$ и $W(R_i) = 0$ при $R_i \leqslant 0$.

Используя (6), (9), (10) для вероятности правильного решения D_k, имеем

$$D_k = \frac{1}{2\pi I_0(A_k)} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{y}{Q_k} e^{-\frac{y^2+A_k^2+Q_k^2}{2Q_k}} I_0\left[\frac{y}{Q_k}(Q_k^2+A_k^2+2A_kQ_k\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\right] \times$$

$$\times \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\nu} \left[\int_0^{y+E_{ik}} \frac{u}{Q_i} e^{-\frac{u^2+A_i^2}{2Q_i}} I_0\left[\frac{uA_i}{Q_i}\right] du\right] d\varphi\, dy, \qquad (11)$$

где $E_{ik} = \frac{1}{2}(Q_k - Q_i) + \ln\frac{p_k}{p_i}$.

Так как формула (11) получена на основании приближенного равенства (6), то следует отметить, что точность этой формулы возрастает с увеличением Q_i или A_i.

Рассмотрим несколько частных следствий из формулы (11). Положим, что все сигналы равновероятны и энергии их одинаковы:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_\nu = \frac{1}{\nu}; \quad Q_1 = Q_2 = \ldots Q_\nu = Q_0. \qquad (12)$$

Тогда, если начальные фазы сигналов известны, то переходя к пределу при $A_k \to \infty$ получим

$$D = \frac{1}{2\sqrt{2\pi Q_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-Q_0)^2}{2Q_0}} \left[\frac{1+\Phi(y/\sqrt{Q_0})}{2}\right]^{\nu-1} dy, \qquad (13)$$

где $\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — интеграл вероятности [5]. Если же начальные фазы сигналов случайны и распределены равномерно на интервале $[0;\ 2\pi]$ то, положив $A_1 = A_2 = \ldots A_\nu = 0$ из (11), имеем

$$D = \int_0^{\infty} \frac{y}{Q_0} e^{-\frac{y^2+Q_0^2}{2Q_0}} I_0(y) \left[1 - e^{-\frac{y^2}{2Q_0}}\right]^{\nu-1} dy. \qquad (14)$$

Формулы (13), (14) полностью совпадают с аналогичными формулами в [2, 3].

Таким же образом можно определить вероятность D_k и в других случаях — например, если часть сигналов полностью известна, а у других сигналов фаза случайна и так далее.

Как и результаты [3], формула (11) может быть использована для приближенного вычисления надежности оценки параметра сигнала при приеме на фоне нормальных шумов, причем, в отличие от [3], формула (11) справедлива и при оценке энергетического параметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, Изд-во «Советское радио», 1966.

2. Котельников В. А., Теория потенциальной помехоустойчивости, Госэнергоиздат, 1956.

3. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д., Выделение сигналов на фоне случайных помех, Изд-во «Советское радио», 1960.

4. Roberts, On the detection of a signal known except for phase, IEEE Trans. Inform. Theory, 1965, **11**, № 1, 76.

5. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
27 IV 1970 г.