15

15

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том XVI

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

8

МОСКВА · 1971

УДК 621.391.2

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО ШУМА

*А. П. Трифонов*

Положим, что на вход приемного устройства в течение интервала времени $[t_0; t_0+T]$ поступает реализация случайного процесса $x(t) = n(t)$ или $x(t) = n(t) + s(t, \vec{l}_0)$. Здесь $n(t)$ — реализация нормального случайного процесса с нулевым средним значением $\langle n(t) \rangle = 0$ и функцией корреляции $\langle n(t_1) n(t_2) \rangle = K(t_1, t_2)$, $s(t, \vec{l}_0)$ — полезный сигнал точно известной формы, содержащий $p$ неизвестных параметров (квазидетерминированный сигнал [1]). Неизвестные параметры $\vec{l}$ будем считать распределенными с плотностью вероятности $W(\vec{l})$ в некоторой области $L$.

Оптимальное приемное устройство вырабатывает функционал отношения правдоподобия $\Lambda$ и принимает решение путем сравнения $\Lambda$ с пороговым значением $\Lambda_0$, определяемым критерием оптимальности. В рассматриваемом случае [1, 2]

$$\Lambda = \int_L W(\vec{l}) \exp\left[\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, v(t, \vec{l})\, dt - \frac{1}{2} S(\vec{l}, \vec{l})\right] d\vec{l}, \tag{1}$$

где $v(t, \vec{l})$ — решение интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_0+T} K(t, \tau)\, v(\tau, \vec{l})\, d\tau = s(t, \vec{l});\ t \in [t_0;\ t_0+T], \tag{2}$$

а функция $S(\vec{l}_1, \vec{l}_2)$ равна

$$S(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \int_{t_0}^{t_0+T} s(t, \vec{l}_1)\, v(t, \vec{l}_2)\, dt. \tag{3}$$

Вероятности ложной тревоги $F$ и правильного обнаружения $D$ находятся из соотношений

$$F = P[\Lambda_N > \Lambda_0], \tag{4}$$

$$D = \int_L W(\vec{l}_0)\, D(\vec{l}_0)\, d\vec{l}_0. \tag{5}$$

Здесь $D(\vec{l}_0) = P[\Lambda_s > \Lambda_0]$ — вероятность обнаружения сигнала $s(t, \vec{l}_0)$, а индексы $N$ и $s$ указывают соответственно на отсутствие или наличие сигнала в принимаемой смеси сигнал / шум.

Для произвольных параметров $\vec{l}$ точное определение $F$ и $D$ весьма затруднительно, поэтому приходится использовать различные методы приближенного нахождения этих величин [1—4]. Большинство таких методов основано на аппроксимации точного распределения случайной величины $\Lambda$ каким-либо подходящим распределением.

Выбор аппроксимирующих функций для распределений $W(\Lambda_N)$ и $W(\Lambda_s)$ зависит от величины отношения сигнал / шум, которое характеризуется функцией $S(\vec{l}, \vec{l})$, и от соотношения между областью возможных значений параметров $\vec{l}$ и областью корреляции случайного процесса $N(\vec{l}) = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, v(t, \vec{l})\, dt$. Если отношение сигнал / / шум весьма мало, то в силу нормальности $N(\vec{l})$ можно аппроксимировать распределения величин $\Lambda_N$ и $\Lambda_s$ нормальным распределением, а затем находить $F$ и $D$ согласно (4), (5). Если же отношение сигнал / шум недостаточно мало, чтобы в разложении $\exp[N(\vec{l})]$ в степенно́й ряд ограничиться использованием первых двух членов, но область корреляции $N(\vec{l})$ значительно меньше области определения параметров $\vec{l}$, то в силу центральной предельной теоремы можно также использовать нормальную аппроксимацию. При этом точность аппроксимации ухудшается с ростом отношения сигнал / шум [5].

Возможна ситуация, в которой область корреляции процесса $N(\vec{l})$ окажется значительно больше области возможных значений $\vec{l}$. В этом случае можно предположить, что разумной будет аппроксимация $W(\Lambda_N)$ и $W(\Lambda_s)$ при помощи логарифмически нормального распределения.

Рассматривая $\Lambda$ в качестве сигнала на выходе нелинейной инерционной системы, на вход которой действует нестационарный случайный нормальный процесс $N(\vec{l})$, можно использовать соответствующие методы [6, 7] для нахождения распределения $\Lambda$. В общем случае, поскольку $\Lambda \geqslant 0$, можно аппроксимировать $W(\Lambda)$ при помощи ряда Лаггера [6, 7] или использовать для грубой оценки вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения неравенства типа неравенства Чебышева [4, 8].

Все упомянутые способы аппроксимации основаны на вычислении моментов функционала отношения правдоподобия (1). Выражение для начального момента $k$-го порядка можно записать в виде

$$\langle \Lambda^k \rangle = \int\limits_L \dots \int\limits_L \left\langle \exp\left[\sum_{i=1}^{k} N(\vec{l}_i)\right]\right\rangle \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} S(\vec{l}_i, \vec{l}_i)\right] \prod_{i=1}^{k} W(\vec{l}_i)\, d\vec{l}_i. \tag{6}$$

Вследствие нормальности $N(\vec{l})$ имеем

$$\left\langle \exp\left[\sum_{i=1}^{k} N(\vec{l}_i)\right]\right\rangle = \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \langle N(\vec{l}_i)\rangle + \frac{1}{2}\left\langle\left[\sum_{i=1}^{k}\{N(\vec{l}_i) - \langle N(\vec{l}_i)\rangle\}\right]^2\right\rangle\right) \tag{7}$$

Если сигнал на входе приемника отсутствует, то

$$\langle N(\vec{l}_i)\rangle = 0, \qquad \langle N(\vec{l}_i)\, N(\vec{l}_j)\rangle = S(\vec{l}_i, \vec{l}_j).$$

Значит,

$$N_k = \langle {\Lambda_N}^k \rangle = \int\limits_L \dots \int\limits_L \exp\left[\sum\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} S(\vec{l}_i, \vec{l}_j)\right] \prod_{i=1}^{k} W(\vec{l}_i)\, d\vec{l}_i. \tag{8}$$

При наличии сигнала

$$\langle N(\vec{l}_i)\rangle = S(\vec{l}_0, \vec{l}_i), \ \langle [N(\vec{l}_i) - \langle N(\vec{l}_i)\rangle]\, [N(\vec{l}_j) - \langle N(\vec{l}_j)\rangle]\rangle = S(\vec{l}_i, \vec{l}_j).$$

Подставляя эти значения моментов в (7), а (7) в (6), получаем

$$\langle {\Lambda_s}^k \rangle = \int\limits_L \dots \int\limits_L \exp\left[\sum\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} S(\vec{l}_i, \vec{l}_j) + \sum_{i=1}^{k} S(\vec{l}_0, \vec{l}_i)\right] \prod_{i=1}^{k} W(\vec{l}_i)\, d\vec{l}_i. \tag{9}$$

Формула (9) получена в предположении, что на входе приемника присутствует сигнал $s(t, \vec{l}_0)$. Усредняя (9) по всевозможным значениям $\vec{l}_0$, приходим к выражению

$$S_k = \int\limits_L W(\vec{l}_0) \langle {\Lambda_s}^k \rangle\, d\vec{l}_0 = \int\limits_L \dots \int\limits_L \exp\left[\sum\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} S(\vec{l}_i, \vec{l}_j)\right] \prod_{i=1}^{k+1} W(\vec{l}_i)\, d\vec{l}_i \tag{10}$$

Из (8) и (10) следует, что моменты функционала отношения правдоподобия при наличии и отсутствии сигнала связаны простым соотношением $S_k = N_{k+1}$, причем всегда $N_1 = \langle \Lambda_N \rangle = 1$.

Вычисление даже моментов низших порядков по формулам (8) и (10) может оказаться весьма трудоемким. Поэтому естественно использовать такую аппроксимацию распределения $\Lambda$, чтобы достаточная точность обеспечивалась небольшим числом моментов. Если подобную аппроксимацию подобрать невозможно, то для оценки $F$ и $D$ можно воспользоваться неравенством Чебышева [4]. В частности, всегда можем указать верхнюю границу вероятности ложной тревоги

$$F \leqslant \Lambda_0^{-1}. \tag{11}$$

Это неравенство справедливо в самом общем случае. Действительно, переходя для простоты к дискретной обработке наблюдаемых данных, выражение для отношения правдоподобия запишем в виде [1, 2]

$$\Lambda = \frac{\langle w(\vec{x}/\vec{s})\rangle_{\vec{s}}}{w(\vec{x}/0)}, \tag{12}$$

где $\vec{x}$ и $\vec{s}$ — соответственно выборки наблюдаемых данных и сигнала, $w(\vec{x}/\vec{s})$ — условная многомерная плотность вероятности принятых данных $\vec{x}$ при сигнале $\vec{s}$, $w(\vec{x}/0)$ — то же в отсутствие сигнала, индекс $\vec{s}$ в числителе (12) указывает, что усреднение выполняется по множеству сигналов. В отсутствие сигнала $\vec{x} = \vec{n}$ и

$$\langle\Lambda_N\rangle = \int \frac{\langle w(\vec{n}/\vec{s})\rangle_{\vec{s}}}{w(\vec{n}/0)}\, w(\vec{n})\, d\vec{n},$$

где $w(\vec{n})$ — многомерная плотность вероятности шума $\vec{n}$, который, комбинируясь некоторым образом с сигналом $\vec{s}$, образует выборку наблюдаемых данных $\vec{x}$.

Учитывая, что $w(\vec{n}/0) = w(\vec{n})$ и меняя в последней формуле порядок усреднения, получаем $\langle\Lambda_N\rangle = 1$, что доказывает справедливость (11) для любой ситуации.

В заключение отметим, что, вычислив моменты $\Lambda_N$ выше первого и используя приведенный в [8] метод построения нетривиальных неравенств типа неравенства Чебышева, можем найти более точные, чем (11) оценки для вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения квазидетерминированного сигнала.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, 2, Изд. Советское радио, 1968.
2. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, 2, Изд. Советское радио, 1962.
3. Н. Д. Гладштейн, Радиотехника и электроника, 1970, 15, 1, 198.
4. В. В. Быков, Радиотехника и электроника, 1970, 15, 2, 400.
5. А. К. Морозов, Ю. Г. Тратас, Радиотехника, 1970, 25, 1, 25.
6. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, Изд. Советское радио, 1966.
7. Р. Деч, Нелинейные преобразования случайных процессов, Изд. Советское радио, 1965.
8. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2, Изд. Мир, 1967.


Поступило в редакцию
24 VIII 1970