(16) (16)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1971

Трифонов

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
№ 4 1971

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ ГАУССОВОЙ ПОМЕХИ

А. П. ТРИФОНОВ

(*Воронеж*)

Получены предельные выражения для вероятностей ошибок первого и второго рода при обнаружении сигнала, содержащего случайный неэнергетический параметр.

Большой класс практически используемых сигналов составляют квазидетерминированные сигналы, под которыми понимаются сигналы точно известной формы, содержащие один или несколько случайных параметров [1, 2]. Проблема обнаружения таких сигналов рассматривалась, например, в [1–3], но полученные результаты в основном относятся к приему сигнала со случайными амплитудой и фазой. В то же время в ряде прикладных задач возникает необходимость в обнаружении сигнала, содержащего другие случайные параметры, такие, как время прихода сигнала, частота и т. д. В статье рассматривается обнаружение квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовой помехи в предположении, что сигнал содержит один случайный параметр.

Пусть на вход приемного устройства в течение времени $[0;\ T]$ поступает, если отсутствует сигнал, реализация случайного процесса $x(t) = n(t)$ и при наличии сигнала $x(t) = n(t) + s(t,\ l_0)$, где $n(t)$ — реализация стационарного случайного гауссова процесса с нулевым средним значением $\langle n(t)\rangle = 0$ и функцией корреляции $\langle n(t)n(t+\tau)\rangle = K(\tau)$, $s(t,\ l_0)$ — полезный сигнал, l_0 — значение случайного параметра l, который будем считать неэнергетическим [1, 4, 5] и распределенным с плотностью вероятности $W(l)$ на интервале $[L_1;\ L_2]$.

Оптимальная процедура обнаружения состоит в формировании функционала отношения правдоподобия и сравнении его с порогом, определяемым заданием критерия оптимальности [1, 2]. Обычно более удобным оказывается использование логарифма функционала отношения правдоподобия λ, который в рассматриваемом случае (с точностью до постоянных слагаемых) имеет вид [1, 2]

$$\lambda = \ln \int\limits_{L_1}^{L_2} W(l) \exp [M(l)]\, dl, \tag{1}$$

где $M(l) = \int\limits_0^T x(t) v(t, l)\, dt$ — логарифм функционала правдоподобия параметра l, $v(t, l)$ — решение интегрального уравнения $\int\limits_0^T K(t-\tau) v(\tau, l)\, d\tau = s(t, l)$. Если решение о наличии или отсутствии сигнала принимается путем сравнения (1) с порогом λ_0, то вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и ошибок 2-го рода (пропуска сигнала) β (по определению) можно выразить следующим образом: $\alpha = P(\lambda_N > \lambda_0)$ и $\beta = \int\limits_{L_1}^{L_2} W(l_0) P[\lambda_s(l_0) < \lambda_0]\, dl_0$. Индексы N и s указывают соответственно на отсутствие и наличие сигнала в принимаемой реализации $x(t)$.

Определить величины α и β в общем случае весьма затруднительно. Однако при некоторых ограничениях, наложенных на сигнал $s(t,\ l)$ и плотность вероятности

$W(l)$, оказывается возможным получение асимптотических оценок для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода.

Докажем следующее утверждение. Пусть сигнал $s(t, l)$ и его первые 5 производных по l непрерывны при $l \in [L_1; L_2]$ и $t \in [0; T]$; плотность вероятности $W(l)$ непрерывна и $W(l) > 0$ при $l \in [L_1; L_2]$; интервал возможных значений параметра l конечен, т. е. $0 < L_2 - L_1 < \infty$. Тогда при $z \to \infty$

$$\beta \to \Phi\,[(\lambda_0 - z^2) / z]. \tag{2}$$

Если к тому же $\lambda_0 / z \to \infty$, то

$$\alpha \to 1 - \exp\,[-\exp\,(B - \lambda_0^2 / 2z^2)], \tag{3}$$

где $z = \left[\int\limits_0^T s(t,l)\,v(t,l)\,dt\right]^{1/2}$ — отношение сигнал / шум на выходе линейной части оптимального приемника, $\Phi(u) = (1/\sqrt{2\pi}) \int\limits_{-\infty}^{u} \exp(-u^2/2)\,du$ — интеграл вероятности [1], $B = \ln\,[(L_2 - L_1)\,d / 2\pi]$,

$$d^2 = [\partial^2 S\,(l_1, l_2)/\partial l_1 \partial l_2]_{l_1 = l_2 = l}, \qquad S\,(l_1, l_2) = z^{-2} \int\limits_0^T s\,(t, l_1)\,v\,(t, l_2)\,dt.$$

Поскольку параметр l предполагается неэнергетическим, величины z и d не зависят от значения параметра l.

Рассмотрим вначале выражение для вероятности ошибок 1-го рода (3). Если сигнал на входе приемника отсутствует, то

$$\lambda_N = \ln \int\limits_{L_1}^{L_2} W(l) \exp\,[zN(l)]\,dl, \tag{4}$$

где $N(l) = z^{-1} \int\limits_0^T n(t)\,v(t,l)\,dt$ — реализация стационарного случайного гауссового процесса, причем [4, 5] $\langle N(l) \rangle = 0$, $\langle N(l_1) N(l_2) \rangle = S(l_1, l_2) = S(l_1 - l_2)$, $\max S(l_1, l_2) = 1$. Вследствие ограничений, наложенных на сигнал $s(t, l)$, используя формулу Тейлора, можем записать

$$S\,(l_1, l_2) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k S\,(l_1, l_2)}{\partial l^k_1}\right]_{l_1 = l_2} (l_1 - l_2)^k + \frac{1}{5!} \left[\frac{\partial^5 S\,(l_1, l_2)}{\partial l_1^5}\right]_{l_1 = l^*} (l_1 - l_2)^5,$$
$$l^* \in [l_1; l_2]. \tag{5}$$

Преобразуя слагаемые под знаком суммы в (5) аналогично [4], при $|l_1 - l_2| \to 0$ имеем

$$S(l_1, l_2) = 1 - \frac{d^2}{2!}(l_1 - l_2)^2 + \frac{d_1^2}{4!}(l_1 - l_2)^4 + O\,\{|l_1 - l_2|^5\},$$
$$d_1^2 = \left[\frac{\partial^4 S(l_1, l_2)}{\partial l_1^2 \partial l_2^2}\right]_{l_1 = l_2}. \tag{6}$$

Следовательно, реализация случайного процесса $N(l)$ дважды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1 и с той же вероятностью интеграл в (4) существует как обычный интеграл Римана от реализации случайного процесса [6]. Положим, что реализация $N(l)$ достигает абсолютного максимума при $l \in [L_1; L_2]$ в точке l_m, и введем функцию $\Delta(l) = N(l_m) - N(l)$. Тогда

$$\lambda_N = zN(l_m) + \ln \int\limits_{L_1}^{L_2} W(l) \exp\,[-z\Delta(l)]\,dl. \tag{7}$$

Функция $\Delta(l)$ с вероятностью 1 имеет две непрерывные производные, причем $\Delta(l_m) = 0$ и $\Delta(l) > 0$ при $l \neq l_m$. Подынтегральная функция в (7) абсолютно интегрируема при любых $z > 0$, так как

$$\int\limits_{L_1}^{L_2} |W(l)\exp[-z\Delta(l)]|\,dl \leqslant 1.$$

Поскольку $\Delta'(l_m) = 0$ и $\Delta''(l_m) > 0$, то интеграл в (7) с вероятностью 1 удовлетворяет условиям применимости асимптотической формулы Лапласа [7], согласно которой при $z \to \infty$

$$\int\limits_{L_1}^{L_2} W(l)\exp[-z\Delta(l)]\,dl = W(l_m)\left[\frac{\varepsilon\pi}{z\Delta''(l_m)}\right]^{1/2} + O(z^{-1/2}), \tag{8}$$

где $\varepsilon = {}^1/_2$ при $l_m = L_1$ или $l_m = L_2$ и $\varepsilon = 2$ при $L_1 < l_m < L_2$. Подставив (8) в (7), получим, что при $z \to \infty$

$$\lambda_N = zN(l_m) + o(z). \tag{9}$$

Случайная величина $N(l_m)$ представляет собой максимум максиморум реализации стационарного случайного гауссова процесса с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Предельное распределение максимумов максиморумов реализацией такого процесса при $u \to \infty$ можно записать как [8]

$$P[N(l_m) < u] \to \exp[-\exp(-y)], \tag{10}$$

где $u^2 = 2(B + y)$.

Переходя в (10) к случайной величине (9) и полагая, что $\lambda_0 / z \to \infty$, получим

$$1 - \alpha = P(\lambda_N < \lambda_0) \to \exp[-\exp(B - \lambda_0^2 / 2z^2)].$$

Последнее выражение доказывает справедливость соотношения (3).

Докажем теперь справедливость (2). При наличии сигнала на входе приемника

$$\lambda_s = \ln\int\limits_{L_1}^{L_2} W(l)\exp[z^2S(l_0, l) + zN(l)]\,dl. \tag{11}$$

Обозначая через l_m положение максимума максиморума показателя экспоненты под интегралом в (11) и рассуждая так же, как при выводе (9), получим выражение

$$\lambda_s = z^2S(l_0, l_m) + zN(l_m) + o(z). \tag{12}$$

Величина l_m является условной оценкой максимального правдоподобия параметра l_0 и, следовательно, при $z \to \infty$ $l_m = l_0 + \xi / z$ (ξ — случайная величина, первые два момента которой ограничены [5]). Воспользовавшись формулой Тейлора, перепишем (12) в виде

$$\lambda_s = z^2 + zN(l_0) + {}^1/_2S''(l_0, l_0 + \eta\xi / z)\xi^2 + N'(l_0 + \gamma\xi / z)\xi + o(z), \quad |\gamma| \leqslant 1, \quad |\eta| \leqslant 1,$$

откуда при $z \to \infty$ будем иметь $\lambda_s = z^2 + zN(l_0) + o(z)$. Поскольку величина $N(l_0)$ подчиняется гауссовому распределению с параметрами (0; 1), убеждаемся в справедливости (3).

Заметим, что ограничения, наложенные на сигнал, могут быть ослаблены, если функция корреляции помехи при $\tau \to 0$ имеет вид

$$K(\tau) = K(0)[1 - O\{|\ln|\tau / T||^{-\alpha_1}\}] \qquad (\alpha_1 > 1). \tag{13}$$

Тогда реализация шума $n(t)$ непрерывна с вероятностью 1 и с той же вероятностью интеграл $\int\limits_0^T n(t)v(t, l)\,dt$ существует как обычный интеграл Римана от реализации случайного процесса [8]. Покажем, что в этом случае из непрерывности по l сигнала $s(t, l)$ следует с вероятностью 1 непрерывность реализации $N(l)$. Действительно, для почти всех реализаций шума $n(t)$

$$\lim_{l \to l_1}[N(l) - N(l_1)] = \lim_{l \to l_1}\int\limits_0^T n(t)[v(t, l) - v(t, l_1)]\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^T n(t)\theta(t, \tau)\lim_{l \to l_1}[s(\tau, l) - s(\tau, l_1)]\,d\tau\,dt = 0,$$

где $\theta(t, \tau)$ — решение интегрального уравнения $\int\limits_0^T K(t_1 - \tau)\theta(\tau, t_2)\,d\tau = \delta(t_1 - t_2)$, $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Аналогичным образом получаем, что при сигнале $s(t, l)$, дважды непрерывно дифференцируемом по l, реализация случайного процесса $N(l)$ дважды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1.

Следовательно, если выполняется (13), то предельные выражения (2) и (3) справедливы при условии, что сигнал $s(t, l)$ дважды непрерывно дифференцируем по l при $l \in [L_1; L_2]$, $t \in [0; T]$.

Из рассмотрения формул (2) и (3) следует, что значения вероятностей ложной тревоги и пропуска асимптотически инвариантны по отношению к плотности вероятности параметра l и фактически при $z \to \infty$ функция $W(l)$ используется только для формирования выходного сигнала оптимального приемника (1). Такие же предельные характеристики можно получить и в случае, когда плотность вероятности $W(l)$ неизвестна. В этом случае приемное устройство должно формировать логарифм функционала отношения правдоподобия $M(l)$ на всем интервале возможных значений параметра l, а затем сравнивать абсолютный максимум $M(l)$ с порогом λ_0. Согласно (9) и (12) подобное устройство будет асимптотически оптимально, т. е. для построения приемника, имеющего асимптотически оптимальные характеристики обнаружения, достаточно знания интервала возможных значений параметра l.

Оценим и сравним потери при обнаружении квазидетерминированного и детерминированного сигналов. Если значение параметра l_0 известно, то оптимальное приемное устройство должно вырабатывать величину $M(l_0)$ и сравнивать ее с порогом λ_0. Вероятности ошибок пропуска β_0 и ложной тревоги α_0 для детерминированного сигнала имеют вид [1, 2]

$$\beta_0 = \Phi\left(\frac{\lambda_0 - z^2}{z}\right), \tag{14}$$

$$\alpha_0 = 1 - \Phi(\lambda_0 / z). \tag{15}$$

Выражение (14) полностью совпадает с (2), т. е. предельная вероятность ошибки пропуска сигнала при обнаружении квазидетерминированного сигнала инвариантна по отношению к неэнергетическому случайному параметру.

Полагая $(\lambda_0^2 / 2z^2 - B) \gg 1$ и используя выражение для $\Phi(u)$ при $u \to \infty$ [8], запишем формулы (3) и (15) в виде

$$\alpha \to \exp\left[B - \frac{\lambda_0^2}{2z^2}\right], \quad \alpha_0 \to \frac{z}{\lambda_0\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda_0^2}{2z^2}\right),$$

учитывая, что (3) справедливо при $\lambda_0 / z \to \infty$. При $\beta = \beta_0$ имеем

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} \to \frac{\lambda_0(L_2 - L_1)\,d}{\sqrt{2\pi}\cdot z}.$$

Значит, относительные потери в качестве обнаружения возрастают с увеличением интервала возможных значений случайного параметра и с уменьшением требуемого уровня ложных тревог, так как $\alpha \to 0$ при $\lambda_0 / z \to \infty$. С другой стороны, эти потери уменьшаются с ослаблением зависимости сигнала от случайного параметра l.

Таким образом, если квазидетерминированный сигнал содержит один случайный неэнергетический параметр, то для довольно широкого класса сигналов и плотностей вероятности случайного параметра можно получить асимптотические оценки характеристик оптимального обнаружения. Аналогичные характеристики имеет приемное устройство, не использующее априорной плотности вероятности параметра. При этом предельное качество приема существенно зависит от величины интервала возможных значений параметра.

Поступило 27 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. «Сов. радио», 1966.
2. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 2, «Сов. радио», 1968.
3. Деменин А. Н. Оптимальное обнаружение сигнала со случайной фазой на фоне гауссовой помехи. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1969, № 5.
4. Куликов Е. И., Трифонов А. П. О некоторых свойствах сигнала на выходе оптимального приемника. Радиотехника и электроника, 1968, 13, № 12.
5. Куликов Е. И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. «Сов. радио», 1969.
6. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. «Мир», 1969.
7. Копсон Э. Асимптотические разложения. «Мир», 1966.
8. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.