ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

# Радиоэлектроника

ТОМ XIV
8
1971

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ 50-ЛЕТИЯ ВЕЛИКОЙ
ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ

УДК 621.391.161

*Е. И. КУЛИКОВ, А. П. ТРИФОНОВ*

# ОЦЕНКА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПАРАМЕТРА УЗКОПОЛОСНОГО РАДИОСИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ АМПЛИТУДОЙ И НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ ПРИ ПРИЕМЕ В НОРМАЛЬНЫХ ШУМАХ

Рассматривается оценка произвольного параметра узкополосного радиосигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой при приеме на фоне аддитивного стационарного нормального шума. Алгоритм оценки использует процедуру выбора значений неизвестных амплитуды и фазы, максимизирующих выходной сигнал приемника, пропорциональный функции правдоподобия параметров. Получены аналитические выражения для смещения и дисперсии оценки. Приведен пример оценки длительности колокольного радиоимпульса в белом шуме.

Рассмотрим задачу оценки некоторого произвольного параметра радиосигнала $l_0$, несущего информацию, когда прием радиосигнала осуществляется на фоне аддитивного стационарного нормального шума, а амплитуда $a_0$ и начальная фаза $\varphi_0$ принимаемого сигнала неизвестны. Эти условия наиболее характерны для реальных радиолиний передачи информации, параметры которых меняются достаточно медленно по сравнению с длительностью сигнала [1, 2, 3].

Поскольку неизвестные параметры, амплитуда и начальная фаза в данном случае для наблюдателя являются несущественными, то оптимальная процедура состоит в формировании апостериорного распределения всех неизвестных параметров и последующем его усреднении по всевозможным значениям амплитуды и фазы. Однако для формирования апостериорного распределения параметров $l$, $a$, $\varphi$ и последующего усреднения по всем возможным значениям $a$ и $\varphi$ необходимо знание априорных законов распределения амплитуды и фазы, чем обычно не располагает наблюдатель. В связи с этим рассмотрим оценку параметра сигнала на основе формирования лишь функции правдоподобия параметров $l$, $a$, $\varphi$. Здесь также возможны два пути решения: формирование выходного сигнала, позволяющего производить совместную оценку трех его параметров $l$, $a$ и $\varphi$, и формирование выходного сигнала, при котором неизвестные параметры $a_0$ и $\varphi_0$ берутся такими, чтобы выходной сигнал был максимален [1]. В дальнейшем будем интересоваться последним способом формирования выходного сигнала.

Итак, пусть на вход приемного устройства в течение времени $T$ поступает аддитивная смесь

$$x(t) = s(t, a_0, \varphi_0, l_0) + n(t), \tag{1}$$

где $n(t)$ — стационарный нормальный шум с нулевым средним значением и функцией корреляции $\langle n(t_1)\, n(t_2)\rangle = K(t_1 - t_2)$; $s(t, a_0, \varphi_0, l_0)$ — узкополосный радиосигнал, который можно записать в виде

$$s(t, a_0, \varphi_0, l_0) = a_0 F(t, l_0) \cos[\omega_0 t + \Psi(t, l_0) - \varphi_0]. \tag{2}$$

Здесь $F(t, l_0)$ и $\Psi(t, l_0)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции; $l_0$ — параметр, подлежащий оценке, причем будем считать, что в общем случае энергия сигнала $s(t, a_0, \varphi_0, l_0)$ зависит от конкретного значения параметра $l_0$.

Функцию правдоподобия параметров $a$, $\varphi$, $l$ можно записать в виде [1, 3]

$$L(a, \varphi, l) = \text{const}\exp\left\{\int_0^T\left[x(t) - \frac{1}{2}s(t, a, \varphi, l)\right]v(t, a, \varphi, l)\,dt\right\}, \quad (3)$$

где $v(t, a, \varphi, l)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t_1 - t)\,v(t_1, a, \varphi, l)\,dt_1 = s(t, a, \varphi, l). \quad (4)$$

Так как сигнал $s(t, a, \varphi, l)$ предполагается узкополосным, то решение уравнения (4) можно представить в виде [3]

$$v(t, a, \varphi, l) = aV(t, l)\cos[\omega_0 t + \Psi(t, l) - \varphi], \quad \left(\frac{dV}{dt} \ll \omega_0 V\right). \quad (5)$$

Подставляя (2) и (5) в (3), после несложных тригонометрических преобразований и пренебрежения интегралами от членов с удвоенной частотой, получим

$$L(a, \varphi, l) = \text{const}\exp\left[aR(l)\cos(\varphi - \zeta) - \frac{1}{2}a^2 Q(l)\right], \quad (6)$$

где

$$R(l) = \sqrt{X^2(l) + Y^2(l)},\ \zeta = \zeta(l) = \operatorname{arctg}[Y(l)/X(l)], \quad (7)$$

$$X(l) = \int_0^T x(t)\,V(t, l)\cos[\omega_0 t + \Psi(t, l)]\,dt,$$

$$Y(l) = \int_0^T x(t)\,V(t, l)\sin[\omega_0 t + \Psi(t, l)]\,dt,$$

$$Q(l) = \frac{1}{2}\int_0^T F(t, l)\,V(t, l)\,dt. \quad (8)$$

Величина $Q(l)$ играет роль отношения сигнал/шум при $a = 1$ и данном значении параметра $l$.

Так как (6) обращается в максимум при

$$a = \frac{R(l)\cos(\varphi - \zeta)}{Q(l)}, \quad (9)$$

то, подставляя это значение $a$ в (6), получаем выражение для функции правдоподобия параметров $l$ и $\varphi$

$$L(l, \varphi) = \text{const}\exp\left[\frac{R^2(l)}{2Q(l)}\cos^2(\varphi - \zeta)\right]. \quad (10)$$

В свою очередь, выражение (10) обращается в максимум при $\varphi=\zeta$. Поэтому для логарифма функции правдоподобия параметра $l$ имеем

$$M\ (l)=R^2\ (l)/Q\ (l). \tag{11}$$

Оценка параметра $l_m$ находится из решения уравнения правдоподобия

$$\left\{\frac{d}{dl}\left[\frac{R^2\ (l)}{Q\ (l)}\right]\right\}_{l_m}=0. \tag{12}$$

Если искать совместную оценку трех параметров $a$, $\varphi$, $l$ путем решения системы уравнений:

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\ln L\ (a,\ \varphi,\ l)\right]_{a_m,\ \varphi_m,\ l_m}=0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln L\ (a,\ \varphi,\ l)\right]_{a_m,\ \varphi_m,\ l_m}=0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial l}\ln L\ (a,\ \varphi,\ l)\right]_{a_m,\ \varphi_m,\ l_m}=0,$$

то, решая первые два уравнения и подставляя их решения в третье уравнение, получим (12). Однако следует отметить, что значения $a$ в (9) и $\varphi$, максимизирующие (10), при произвольных $l$ не являются оценками амплитуды и фазы. Несмотря на это, оценка параметра $l$, как при совместной оценке трех параметров, так и при оценке с помощью (11) является решением одного и того же уравнения.

Поскольку под оценкой параметра $l$ понимается то его значение $l_m$, которое обращает (11) в максимум максиморум, то приемное устройство должно образовать на основе принятой реализации $x\ (t)$ выходной сигнал, пропорциональный или монотонно зависящий от (11), при различных значениях $l$. Учитывая, что надежная оценка по максимуму функции правдоподобия возможна только при достаточно больших отношениях сигнал/шум [3], то в дальнейшем при определении характеристик качества оценки полагается отношение сигнал/шум достаточно большим, т. е. $a_0^2 Q\ (l_0) \gg 1$.

Представляя (2) и (5) в комплексной форме, уравнение (12) можно записать в виде

$$\left[\frac{d}{dl}\ \widetilde{S}\ (l)+2\,\frac{d\widetilde{N}_1\ (l)}{dl}+2\,\frac{d\widetilde{N}_2\ (l)}{dl}\right]_{l_m}=0. \tag{13}$$

Здесь

$$\widetilde{S}\ (l)=a_0^2 S^2\ (l)/Q\ (l),\quad S\ (l)=[\dot{S}\ (l_0,\ l)\ \dot{S}^*\ (l_0,\ l)]^{1/2}\equiv S\ (l_0,\ l),$$

$$\dot{S}\ (l_0,\ l)=\frac{1}{2}\int\limits_0^T F\ (t,\ l_0)\ V\ (t,\ l)\exp\ \{j\,[\psi\ (t,\ l)-\psi\ (t,\ l_0)]\}\ dt,$$

$$\widetilde{N}_1\ (l)=\frac{1}{2}\ a_0\,[\dot{N}^*\ (l)\ \dot{S}\ (l_0,\ l)\ e^{-j\varphi_0}+\dot{N}\ (l)\ \dot{S}^*\ (l_0,\ l)\ e^{j\varphi_0}]/Q\ (l),$$

$$\widetilde{N}_2(l)=\frac{1}{2}\dot{N}(l)\dot{N}^*(l)/Q(l),$$

$$\dot{N}(l)=\int_0^T n(t)V(t,l)\exp\{j[\omega_0 t+\psi(t,l)]\}dt.$$

Звездочка означает комплексно-сопряженные функции.

Учитывая уравнение (4), которое справедливо и для комплексного представления функций $s(t, l, \varphi)$ и $v(t, l, \varphi)$, находим первые два момента шумовых составляющих $\widetilde{N}_1(l)$ и $\widetilde{N}_2(l)$:

$$<\widetilde{N}_1(l)>=0, \quad <\widetilde{N}_2(l)>=1,$$

$$<\widetilde{N}_1(l_1)\widetilde{N}_1(l_2)>=a_0^2\frac{S(l_0, l_1)S(l_0, l_2)S(l_1, l_2)}{Q(l_1)Q(l_2)}\cos[\Phi(l_2, l_1)-$$

$$-\Phi(l_2, l_0)+\Phi(l_1, l_0)],$$

$$<\widetilde{N}_2(l_1)\widetilde{N}_2(l_2)>=1+S^2(l_1, l_2)/[Q(l_1)Q(l_2)], \tag{14}$$

где

$$\dot{S}(l_1, l_2)=[S(l_1, l_2)\dot{S}^*(l_1, l_2)]^{1/2},$$

$$\Phi(l_1, l_2)=\operatorname{arc\,tg}\operatorname{Im}\dot{S}(l_1, l_2)/\operatorname{Re}\dot{S}(l_1, l_2), \text{ а } \operatorname{Im}\dot{S} \text{ и } \operatorname{Re}\dot{S}$$

— мнимая и действительные части комплексной функции.

Для приближенного решения уравнения (13) воспользуемся методом малого параметра [2, 3], в качестве которого возьмем величину $\varepsilon=[a_0^2 Q(l_0)]^{-1/2}$, и введем в рассмотрение нормированные функции

$$\hat{S}(l)=\varepsilon^2 S(l),\ \hat{N}_1(l)=\varepsilon\widetilde{N}_1(l),\ \hat{N}_2(l)=\widetilde{N}_2(l), \tag{15}$$

для которых справедливы соотношения

$$\hat{S}^2(l_0)=<\hat{N}_1^2(l_0)>=<\hat{N}_2^2(l_0)>-<\hat{N}_2(l_0)>^2=1.$$

Уравнение (13) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dl}[\hat{S}(l)+2\varepsilon\hat{N}_1(l)+2\varepsilon^2\hat{N}_2(l)]_{l_m}=0. \tag{16}$$

Приближенное решение этого уравнения будем искать в виде ряда по степеням $\varepsilon$, учитывая, что в условиях надежной оценки величина $\varepsilon$ мала. Итак, пусть оценка параметра $l_m$ представлена как

$$l_m=l_0+\varepsilon l_1+\varepsilon^2 l_2+\varepsilon^3 l_3+\ldots \tag{17}$$

Разлагая функцию в квадратных скобках (16) в ряд Тейлора в окрестностях точки $l_0$ с точностью до членов, содержащих $\varepsilon$, $\varepsilon^2$ и $\varepsilon^3$, и приравнивая члены с $\varepsilon$ в одинаковых степенях нулю, имеем систему уравнений для определения $l_1$, $l_2$, $l_3$. Решения этой системы можно записать в виде:

$$l_1=-2\left[\frac{\dfrac{d\hat{N}_1(l)}{dl}}{\dfrac{d^2\hat{S}(l)}{dl^2}}\right]_{l_0},$$

$$l_2 = -\left\{\left[2\,\frac{d\hat{N}_2(l)}{dl} + 2\,\frac{d^2\hat{N}_1(l)}{dl^2}\,l_1 + \frac{1}{2}\,\frac{d^3\hat{S}(l)}{dl^3}\,l_1^2\right]\left[\frac{d^2\hat{S}(l)}{dl^2}\right]^{-1}\right\}_{l_0},$$

$$l_3 = -\left\{\left[2\,\frac{d^2\hat{N}_2(l)}{dl^2}\,l_1 + 2\,\frac{d^2\hat{N}_1(l)}{dl^2}\,l_2 + \frac{d^3\hat{S}(l)}{dl^3}\,l_1 l_2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{d^3\hat{N}_1(l)}{dl^3}\,l_1^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{d^4\hat{S}(l)}{dl^4}\,l_1^3\right]\left[\frac{d^2\hat{S}(l)}{dl^2}\right]^{-1}\right\}_{l_0}. \qquad (18)$$

Из (17) следует, что смещение и дисперсия оценки параметра $l$ будут равны

$$\langle\Delta l\rangle = \langle l_m - l_0\rangle = \varepsilon\langle l_1\rangle + \varepsilon^2\langle l_2\rangle + \varepsilon^3\langle l_3\rangle,$$

$$\sigma^2(l) = \langle(l_m - \langle l_m\rangle)^2\rangle = \varepsilon^2(\langle l_1^2\rangle - \langle l_1\rangle^2) + \qquad (19)$$

$$+ 2\varepsilon^3(\langle l_1 l_2\rangle - \langle l_1\rangle\langle l_2\rangle) + \varepsilon^4[\langle l_2^2\rangle - \langle l_2\rangle^2 +$$

$$+ 2(\langle l_1 l_3\rangle - \langle l_1\rangle\langle l_3\rangle)].$$

Подставим (18) в (19) и выполним усреднение, учитывая (14). Воспользовавшись очевидными соотношениями $S(l, l) = Q(l)$, $\langle\hat{N}_1(l_1)\,\hat{N}_1(l_2)\rangle = \langle\hat{N}_1(l_2)\,\hat{N}_1(l_1)\rangle$ и возвращаясь к ненормированным функциям (13), выражения для смещения и дисперсии оценки можно представить в виде:

$$\langle\Delta l\rangle = -\frac{E}{a_0^2 D}, \qquad (20)$$

$$\sigma^2(l) = \frac{1}{a_0^2 D}\left[1 - \frac{2}{a_0^2 Q(l_0)} + \frac{7E^2 - 2DF}{8a_0^2 D^3}\right]. \qquad (21)$$

Здесь

$$D = \left[\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} - \frac{\alpha^2 Q(l)}{4}\right]_{l_0},$$

$$E = \left[2\,\frac{\partial^3 S(l_1, l_2)}{\partial l_1^2 d l_2} - \alpha\,\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} + \frac{\alpha}{2}\,Q(l)\,(\alpha^2 - \beta)\right]_{l_0},$$

$$F = \left\{4\,\frac{\partial^4 S(l_1, l_2)}{\partial l_1^3 \partial l_2} - \frac{12}{Q(l)}\left[\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}\right]^2 + 6\,(2\alpha^2 - \beta)\,\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} - \right.$$

$$\left. - \alpha Q(l)\,(3\alpha^3 - 3\alpha\beta - 10\gamma)\right\}_{l_0},$$

$$\alpha = \left[\frac{1}{Q(l)}\cdot\frac{dQ(l)}{dl}\right]_{l_0},\quad \beta = \left[\frac{1}{Q(l)}\cdot\frac{d^2Q(l)}{dl^2}\right]_{l_0},\quad \gamma = \left[\frac{1}{Q(l)}\cdot\frac{d^3Q(l)}{dl^3}\right]_{l_0}.$$

Согласно (19) абсолютная погрешность формулы (20) имеет порядок величины $\varepsilon^4$, а формулы (21) — $\varepsilon^5$.

Из рассмотрения (20) видно, что оценка произвольного параметра в общем случае оказывается смещенной.

Если ограничиться рассмотрением первого приближения, т. е. полагать $l_m = l_0 + \varepsilon l_1$, то формулы (20) и (21) примут вид:

$$<\Delta l> = 0, \quad \sigma^2(l) = \frac{1}{a_0^2 D}, \tag{22}$$

и, следовательно, в первом приближении оценка будет несмещенной.

Для оценки неэнергетического параметра отношение сигнал/шум не зависит от конкретного значения параметра $l$. В этом случае [4]

$$\frac{dQ^*(l)}{dl} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}\right]_{l_0} = -\left[\frac{d^2 S(l_0, l)}{dl^2}\right]_{l_0},$$

и из (22) получим

$$\sigma^2(l) = -\frac{1}{a_0^2 [d^2 S(l_0, l)/dl^2]_{l_0}}. \tag{23}$$

Сравнивая (23) с аналогичной формулой для дисперсии оценки неэнергетического параметра сигнала с известной амплитудой [3], видим, что отсутствие априорной информации о величине амплитуды не влияет на качество оценки неэнергетического параметра.

Если амплитуда $a_0$ сигнала (2) неизвестна, а начальная фаза $\varphi_0$ случайна и распределена равномерно на интервале $[0; 2\pi]$, то функция правдоподобия параметра $l$ будет определяться выражением

$$L(l) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(l, \varphi)\, d\varphi, \tag{24}$$

где $L(l, \varphi)$ описывается выражением (10).

Подставляя (10) в (24) и выполняя интегрирование, получим

$$L(l) = \mathrm{const}\, I_0\left[\frac{R^2(l)}{4Q(l)}\right] \exp\left[\frac{R^2(l)}{4Q(l)}\right],$$

а уравнение правдоподобия при этом будет иметь вид:

$$\left\{\frac{d}{dl}\left[\frac{R^2(l)}{Q(l)}\right]\right\}_{l_m}\left\{\frac{I_1[R^2(l)/4Q(l)]}{I_0[R^2(l)/4Q(l)]} + 1\right\}_{l_m} = 0, \tag{25}$$

где $I_0$ и $I_1$ — функции Бесселя мнимого аргумента нулевого и первого порядка соответственно. Так как член в фигурных скобках не равен нулю, то уравнение (25) переходит в (12). Следовательно, выражение (20) и (21) для смещения и дисперсии оценки справедливы также и для оценки произвольного параметра узкополосного радиосигнала с неизвестной амплитудой и случайной равномерно распределенной начальной фазой.

В качестве конкретного примера, иллюстрирующего полученные соотношения, рассмотрим оценку длительности колокольного радиоимпульса при приеме на фоне белого шума со спектральной плотностью $N_0$. Сигнал запишем в виде

$$s(t, a_0, \varphi_0, \tau_0) = a_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right)\cos(\omega_0 t + \varphi_0), -\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}, \ \tau_0 \ll T,$$

где $\tau_0$ характеризует длительность огибающей радиоимпульса.

Для рассматриваемого белого шума функция $v\ (t\ ,\tau)$ находится из решения интегрального уравнения (4) и равна $v\ (t, \tau) = \frac{2}{N_0} s\ (t,\ \tau)$. Сигнальная функция $S\ (\tau_1,\ \tau_2)$ при этом имеет вид

$$S\ (\tau_1,\ \tau_2) = \frac{Q_0 \sqrt{2}}{\tau_0} \cdot \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}},$$

где $Q_0 = \sqrt{2\pi}\tau_0/2N_0$ — отношение удвоенной энергии сигнала к спектральной плотности белого шума при $\tau=\tau_0$ и $a_0=1$ (отношение сигнал/шум).

Вычисляя производные от сигнальной функции, входящие в (21) и (20), получим

$$<\Delta\tau> = \frac{\tau_0}{a_0^2 Q_0}, \quad \sigma^2\ (\tau) = \frac{2\tau_0^2}{a_0^2 Q_0} \left(1 + \frac{11}{a_0^2 Q_0}\right).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хелстром К., Статистическая теория обнаружения сигналов, Изд-во ин. литры, 1963.
2. Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, Изд-во «Советское радио», 1966.
3. Куликов Е. И., Вопросы оценки параметров сигналов при наличии помех, Изд-во «Советское радио», 1969.
4. Куликов Е. И., Трифонов А. П., О некоторых свойствах сигнала на выходе оптимального приемника, Радиотехника и электроника, 1968, 13, № 12, 2254.

Поступила в редакцию
11 XII 1970 г.