19

Р А Д И О Т Е Х Н И К А

1

1972

«Радиотехника», т. 27, № 1, 1972 г.

621.391.14

Е. И. КУЛИКОВ, А. П. ТРИФОНОВ
действительные члены Общества

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ ПРИЕМЕ НА ФОНЕ НОРМАЛЬНЫХ ШУМОВ

1. Рассмотрим оценку максимального правдоподобия произвольного параметра l известного сигнала $s(t, l)$, энергия которого в общем случае зависит от конкретного значения оценки (l — энергетический параметр), на фоне аддитивного стационарного нормального шума $n(t)$ с нулевым средним значением и заданной функцией корреляции $\langle n(t_1)n(t_2)\rangle = K(t_1 - t_2)$. В данном случае оптимальное приемное устройство по принятой в течение времени $[0, T]$ смеси $x(t) = s(t, l_0) + n(t)$ образует выходной сигнал вида[1,2]

$$M(l) = \int_0^T x(t)\, v(t, l)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^T s(t, l)\, v(t, l)\, dt, \tag{1}$$

где $v(t, l)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t_1 - t_2)\, v(t_1, l)\, dt_1 = s(t_2, l). \tag{2}$$

Второе слагаемое в правой части (1) $\frac{1}{2} Q(l) = \frac{1}{2} \int_0^T s(t, l)\, v(t, l)\, dt$

характеризует отношение энергии сигнала к мощности шума и играет роль отношения сигнал/шум. Применительно к приему сигнала на фоне белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 $Q(l) = 2E(l)/N_0$, где $E(l) = \int_0^T s^2(t, l)\, dt$ — энергия сигнала.

Оценка параметра l_m определяется из решения уравнения

$$[dM(l)/dl]_{l_m} = 0. \tag{3}$$

Поскольку, за исключением простейших случаев, параметр l является аргументом трансцендентной функции, получить точное решение (3) не представляется возможным. Поэтому, полагая в дальнейшем отношение сигнал/шум на выходе приемника достаточно большим[2], ищем приближенное решение уравнения методом малого параметра, считая, что выходной сигнал приемника дифференцируем необходимое число раз.

Выходной сигнал приемника $M(l)$ запишем в виде двух составляющих $M(l) = S(l) + N(l)$, где

$$N(l) = \int_0^T n(t)\, v(t, l)\, dt; \quad S(l) = S(l_0, l) - \frac{1}{2} Q(l);$$

$$S(l_1, l_2) = \int_0^T s(t, l_1)\, v(t, l_2)\, dt. \tag{4}$$

При этом можно показать[2, 3], что $< N(l) > = 0$, $< N(l_1) N(l_2) > = S(l_1, l_2)$, $S(l_1, l_2) = S(l_2, l_1)$, $S(l, l) = Q(l)$.

Введем в рассмотрение малый параметр $\varepsilon = [Q(l_0)]^{-1/2}$ и нормированные функции $\hat{S}(l) = \varepsilon^2 S(l)$, $\hat{N}(l) = \varepsilon N(l)$. При этом $\hat{S}(l_0) = 1/2$ $< \hat{N}^2(l_0) > = 1$, а (3) принимает вид

$$\left[\frac{d\hat{S}(l)}{dl} + \varepsilon \frac{d\hat{N}(l)}{dl} \right]_{l_m} = 0. \tag{5}$$

Для принятых условий ε мало́, поэтому решение (5) можно искать в виде ряда по степеням $l_m = l_0 + \varepsilon l_1 + \varepsilon^2 l_2 + \varepsilon^3 l_3 + \ldots$

Смещение и дисперсия оценки определяются выражениями:

$$<\Delta l> = <l_m - l_0> = \varepsilon <l_1> + \varepsilon^2 <l_2> + \varepsilon^3 <l_3>, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(l) &= < (l_m - <l_m>)^2 > = \varepsilon^2 (< l_1^2 > - <l_1>^2) + \\ &+ 2\varepsilon^3 (<l_1 l_2> - <l_1> <l_2>) + \varepsilon^4 [<l_2^2> - <l_2>^2 + \\ &+ 2 (<l_1, l_2> - <l_1> <l_3>)]. \end{aligned} \tag{7}$$

Разлагая функцию в левой части (5) в ряд Тейлора в окрестности l_0 и приравнивая нулю коэффициенты при ε в одинаковых степенях, получаем систему уравнений для определения l_1, l_2, l_3. Находим затем соответствующие моменты l_1, l_2, l_3 и, подставляя их в (6) и (7), получим выражения для смещения и дисперсии оценки энергетического параметра полностью известного сигнала:

$$<\Delta l> = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 S(l_1, l_2)}{\partial l_1^2\, \partial l_2} \right]_{l_0} \Bigg/ \left[\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1\, \partial l_2} \right]_{l_0}^2, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(l) = \left[\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1\, \partial l_2} \right]_{l_0}^{-1} \Bigg\{ 1 &- \frac{\partial^4 S(l_1, l_2)/\partial l_1^2 \partial l_2^2}{[\partial^2 S(l_1, l_2)/\partial l_1 \partial l_2]^2} + \\ &+ \frac{7}{2} \, \frac{[\partial^3 S(l_1, l_2)/\partial l_1^2\, \partial l_2]^2}{[\partial^2 S(l_1, l_2)/\partial l_1 \partial l_2]^3} \Bigg\}_{l_0}. \end{aligned} \tag{9}$$

Если оцениваемый параметр l является неэнергетическим, то получим выражения, совпадающие с приведенными в [2].

2. При оценке энергетического параметра узкополосного радиосигнала $s(t, l_0, \varphi_0) = F(t, l_0) \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$ со случайной начальной фазой φ_0, распределенной равномерно в интервале $[0; 2\pi]$, логарифм функции правдоподобия параметра l можно записать в виде[1,2]

$$M(l) = \ln I_0 [R(l)] - \frac{1}{2} Q(l),$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка,

$$R(l) = \left| \int_0^T x(t)\, v(t, l, \varphi)\, dt \right|, \tag{10}$$

а $v(t, l, \varphi)$ — решение интегрального уравнения, аналогичного (2), причем для узкополосных радиосигналов справедлива запись[2]

$$v(t, l, \varphi) = V(t, l) \cos(\omega_0 t - \varphi). \tag{11}$$

С учетом (11), пренебрегая интегралами от членов удвоенной частоты, (10) можно записать в виде

$$R(l) = [S^2(l_0, l) + 2S(l_0, l)\, N_1(l) + N_2(l)]^{1/2},$$

где

$$S(l_1, l_2) = \frac{1}{2} \int_0^T F(t, l_1)\, V(t, l_2)\, dt, \tag{12}$$

$$N_1(l) = \cos\varphi_0 \int_0^T n(t)\, V(t, l) \cos\omega_0 t dt + \sin\varphi_0 \int_0^T n(t)\, V(t, l) \sin\omega_0 t dt,$$

$$N_2(l) = \left[\int_0^T n(t)\, V(t, l) \cos\omega_0 t dt \right]^2 + \left[\int_0^T n(t)\, V(t, l) \sin\omega_0 t dt \right]^2.$$

При этом $< N_1(l) > = 0$, $< N_1(l_1)\, N_1(l_2) > = S(l_1, l_2)$, $< N_2(l) > = 2Q(l)$ $< N_2(l_1)\, N_2(l_2) > = 4\, [Q(l_1)\, Q(l_2) + S^2(l_1, l_2)]$.

Введя нормированные функции $\hat{S}(l_1, l_2) = \varepsilon^2 S(l_1, l_2)$, $\hat{Q}(l) = \varepsilon^2 Q(l)$, $\hat{N}_1(l) = \varepsilon N_1(l)$, $\hat{N}_2(l) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 N_2(l)$, для принятого малого значения ε воспользуемся асимптотическим представлением $I_0(x)$ при $x \gg 1$, в результате чего (3) запишется в виде

$$\frac{d}{dl} \left[\hat{R}(l) - \frac{1}{2} \hat{Q}(l) - \frac{\varepsilon^2}{2} \ln \hat{R}(l) \right]_{l_m} = 0. \tag{13}$$

Рассматривая левую часть (13) как функцию параметра ε, разложим ее в ряд Тейлора по ε в окрестности $\varepsilon = 0$ и ограничимся членами разложения, содержащими степени ε не выше третьей. Решая полученное таким образом приближенное уравнение правдоподобия методом, аналогичным рассмотренному в п. 1, найдем выражения для величин l_1, l_2, l_3. Подставляя l_1, l_2, l_3 в (6) и (7) и выполняя необходимые усреднения, после довольно громоздких выкладок находим формулы для вычисления смещения и дисперсии оценки энергетического параметра узкополосного радиосигнала со случайной начальной фазой:

$$< \Delta l > = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 S(l_1, l_2)}{\partial l_1^2\, \partial l_2} \right]_{l_0} \Big/ \left[\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1\, \partial l_2} \right]_{l_0}^2, \tag{14}$$

$$\sigma^2(l) = \left[\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} \right]_{l_0}^{-1} \left\{ 1 - \frac{\partial^4 S(l_1, l_2)/\partial l_1^3\, \partial l_2}{[\partial^2 S(l_1, l_2)/\partial l_1 \partial l_2]^2} + \right.$$

$$+\frac{7}{2}\frac{\left[\partial^3 S(l_1, l_2)/\partial l_1^2\,\partial l_2\right]^2}{\left[\partial^2 S(l_1, l_2)/\partial l_1 \partial l_2\right]^3}+\frac{D+\left[\dfrac{\partial Q(l)}{\partial l}\right]^2\Big/ 8Q(l)}{Q(l)\dfrac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}}\right\}_{l_0}. \qquad (15)$$

Здесь $D=\left\{\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}-\frac{1}{4Q(l)}\left[\frac{\partial Q(l)}{\partial l}\right]^2\right\}_{l_0}$, причем можно показать, что всегда выполняется условие $D\geqslant 0$.

Из сравнения (15) и (9) следует, что незнание начальной фазы радиосигнала в общем случае ведет к увеличению дисперсии оценки энергетического параметра. Абсолютная погрешность этих формул имеет порядок величины $[Q(l_0)]^{-5/2}$; если же допустить погрешность порядка $[Q(l_0)]^{-3/2}$, т. е. ограничиться рассмотрением лишь первого приближения, формулы совпадают и имеют вид

$$\sigma^2(l)=\left[\frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1\, \partial l_2}\right]^{-1}_{l_0}.$$

3. Для иллюстрации полученных соотношений вычислим смещение и дисперсию оценки «длительности» τ_0 радиоимпульса с гауссовой огибающей $s(t, \tau_0, \varphi_0)=a_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right)\cos(\omega_0 t-\varphi_0)$, $-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}$, $\tau_0\ll T$ при приеме на фоне белого шума со спектральной плотностью N_0.

Согласно (4) и (12) $S(\tau_1, \tau_2)=\frac{\sqrt{2}\,Q_0}{\tau_0}\frac{\tau_1\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{1/2}}$, где $Q_0=a_0^2\sqrt{2\pi}\,\tau_0/2N_0$ — отношение удвоенной энергии сигнала к спектральной плотности шума при $\tau=\tau_0$.

Вычисляя необходимые производные от $S(\tau_1, \tau_2)$ и подставляя их значения в (8), (9), (14) и (15), получим $<\Delta\tau>=\frac{\tau_0}{3Q_0}=\frac{2N_0}{3\sqrt{2\pi}\,a_0^2}$, а дисперсии оценок для известной и случайной начальной фазы соответственно определяются выражениями:

$$\sigma_1^2(\tau)=\frac{4\tau_0^2}{3Q_0}\left(1+\frac{7}{2Q_0}\right),\quad \sigma_2^2(\tau)=\frac{4\tau_0^2}{3Q_0}\left(1+\frac{13}{3Q_0}\right).$$

Из полученных выражений видно, что при фиксированных энергии сигнала и спектральной плотности шума ($Q_0=\text{const}$) смещение и дисперсия оценки длительности гауссова радиоимпульса пропорциональны истинному значению τ_0. Физически эти результаты можно объяснить тем, что с увеличением длительности передний и задний фронты сигнальной функции $S(\tau, \tau_0)$ увеличиваются, в результате этого эффективность воздействия нестационарного шума $N(\tau)$ в пределах «ширины» сигнальной функции возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Хелстром. Статистическая теория обнаружения сигналов. М., ИЛ, 1963.
2. Е. И. Куликов. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М., «Советское радио», 1969.
3. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — «Радиотехника и электроника», т. 13, 1968, № 12.

Статья поступила 23 октября 1969 г.