АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XVII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1972

УДК 621.391.2

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИГНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

А. П. Трифонов

В задачах оптимального приема сигнала на фоне аддитивного нормального шума весьма важную роль играет сигнальная функция [1—3]. Некоторые свойства сигнальной функции одного параметра детерминированного сигнала были установлены в [4]. Рассмотрим здесь сигнальную функцию двух параметров детерминированного сигнала, которая также позволяет исследовать свойства сигнальной функции одного параметра узкополосного радиосигнала со случайной начальной фазой [1—3].

При оптимальном приеме сигнала $s(t, l, q)$ с неизвестными параметрами l и q на фоне стационарного нормального шума с нулевым средним значением и функцией корреляции $K(\tau)$ сигнальная функция $S(l_1, l_2, q_1, q_2)$ определяется выражением [2, 3]

$$S(l_1, l_2, q_1, q_2) = \int_0^T \int_0^T s(t_1, l_1, q_1)\Theta(t_1, t_2)s(t_2, l_2, q_2)\,dt_1\,dt_2, \tag{1}$$

где $\Theta(t_1, t_2)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t_1 - t)\Theta(t, t_2)\,dt = \delta(t_1 - t_2), \tag{2}$$

$\delta(t_1 - t_2)$ — дельта-функция. При этом в силу (2) $\Theta(t_1, t_2) = \Theta(t_2, t_1)$ и

$$S(l_1, l_2, q_1, q_2) = S(l_2, l_1, q_2, q_1). \tag{3}$$

Будем считать, что сигнал полностью расположен внутри интервала $[0; T]$ и является аналитической функцией параметров l и q.

Если выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial l}\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^p s(t_1, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\Theta(t_1, t_2)\frac{\partial^p s(t_2, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\,dt_1\,dt_2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial q}\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^p s(t_1, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\Theta(t_1, t_2)\frac{\partial^p s(t_2, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\,dt_1\,dt_2 = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

при $p = 0, 1, 2, \ldots, \nu = 0, 1, 2, \ldots, p$ и

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial l}\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^p s(t_1, l, q)}{\partial l^{p-\nu+1}\partial q^{\nu-1}}\Theta(t_1, t_2)\frac{\partial^p s(t_2, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\,dt_1\,dt_2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial q}\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^p s(t_1, l, q)}{\partial l^{p-\nu+1}\partial q^{\nu-1}}\Theta(t_1, t_2)\frac{\partial^p s(t_2, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\,dt_1\,dt_2 = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

при $p = 1, 2, \ldots, \nu = 1, 2, \ldots, p$, то

$$S(l_1, l_2, q_1, q_2) = S(\Delta l, \Delta q) = S(-\Delta l, -\Delta q), \tag{6}$$

где $\Delta l = l_1 - l_2$, $\Delta q = q_1 - q_2$. Если же выполняются соотношения (4) и

$$\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^p s(t_1, l, q)}{\partial l^{p-\nu+1}\partial q^{\nu-1}}\Theta(t_1, t_2)\frac{\partial^p s(t_2, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\,dt_1\,dt_2 = 0, \tag{7}$$

то

$$S(l_1, l_2, q_1, q_2) = S(|\Delta l|, |\Delta q|). \tag{8}$$

Разложим функцию $S(l_1, l_2, q_1, q_2)$ (1) в двумерный ряд Тейлора по l_1, q_1 в окрестности точки (l_2, q_2)

$$S(l_1, l_2, q_1, q_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\sum_{n=0}^{k} C_k{}^n a_{kn}(l_2, q_2)(l_1 - l_2)^{k-n}(q_1 - q_2)^n\right]. \tag{9}$$

Здесь $C_k{}^n$ — биноминальные коэффициенты,

$$a_{kn}(l, q) = \int_0^T\int_0^T \frac{\partial^k s(t_1, l, q)}{\partial l^{k-n}\,\partial q^n}\Theta(t_1, t_2)s(t_2, l, q)\,dt_1\,dt_2.$$

Последовательно применяя тождественные преобразования типа

$$\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^k s(t_1, l, q)}{\partial l^{k-n}\,\partial q^n}\Theta(t_1, t_2)s(t_2, l, q)\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial l}\left[\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^{k-1} s(t_1, l, q)}{\partial l^{k-n-1}\,\partial q^n}\Theta(t_1, t_2)s(t_2, l, q)\,dt_1\,dt_2\right] -$$

$$-\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^{k-1} s(t_1, l, q)}{\partial l^{k-n-1}\,\partial q^n}\Theta(t_1, t_2)\frac{\partial s(t_2, l, q)}{\partial l}\,dt_1\,dt_2$$

и используя соотношения (3), (4), (5), коэффициенты $a_{kn}(l, q)$ разложения (9) можем привести к виду

$$a_{kn}(l, q) = \begin{cases} 0, \quad k = 2p+1, \\ (-1)^p \displaystyle\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^p s(t_1, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\Theta(t_1, t_2)\frac{\partial^p s(t_2, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\,dt_1\,dt_2, \\ \qquad\qquad k = 2p, \quad n = 2\nu, \\ (-1)^p \displaystyle\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^p s(t_1, l, q)}{\partial l^{p-\nu+1}\,\partial q^{\nu-1}}\Theta(t_1, t_2)\frac{\partial^p s(t_2, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\,dt_1\,dt_2, \\ \qquad\qquad k = 2p, \quad n = 2\nu-1. \end{cases} \tag{10}$$

Следовательно, коэффициенты разложения (9) не зависят от l_2, q_2. При этом согласно (10) в разложении (9) отличны от нуля только коэффициенты при степенях переменных $(l_1 - l_2)^{2(p-\nu)}(q_1 - q_2)^{2\nu}$ и $(l_1 - l_2)^{2(p-\nu)+1}(q_1 - q_2)^{2\nu-1}$, что доказывает справедливость выражения (6). Если же сигнал удовлетворяет условиям (4) и (7), то

$$a_{kn}(l, q) = \begin{cases} 0, \quad k = 2p+1, \\ (-1)^p \displaystyle\int_0^T\int_0^T \frac{\partial^p s(t_1, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\Theta(t_1, t_2)\frac{\partial^p s(t_2, l, q)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial q^\nu}\,dt_1\,dt_2, \\ \qquad\qquad k = 2p, \quad n = 2\nu, \\ 0, \quad k = 2p, \quad n = 2\nu-1. \end{cases} \tag{11}$$

В этом случае, в силу (11), разложение (9) содержит только члены со степенями переменных $(l_1 - l_2)^{2(p-\nu)}(q_1 - q_2)^{2\nu}$, и формула (8) верна.

Если полезный сигнал $s(t, l, q)$ является узкополосным радиосигналом, а один из неизвестных параметров — начальная фаза φ $(q = \varphi)$, то при анализе оптимального приема радиосигнала со случайной начальной фазой часто используют сигнальную функцию параметра l [1—3]

$$S(l_1, l_2) = |S(l_1, l_2, \varphi_1, \varphi_2)|. \tag{12}$$

Когда для сигнала $s(t, l, \varphi)$ выполняются соотношения (4) и (5), то (6) $S(l_1, l_2, \varphi_1, \varphi_2) = S(\Delta l, \Delta\varphi) = S(-\Delta l, -\Delta\varphi)$ и согласно (12)

$$S(l_1, l_2) = S(\Delta l) = S(-\Delta l). \tag{13}$$

Узкополосный радиосигнал $s(t, l, \varphi)$ можно записать в виде

$$s(t, l, \varphi) = F(t, l)\cos[\omega_0 t + \Psi(t, l) - \varphi], \tag{14}$$

где $F(t, l)$ и $\Psi(t, l)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции, в общем случае зависящие от неизвестного параметра l. Используя представление сигнала в виде (14), рассмотрим условия (4) и (5), переписав их как

$$\frac{\partial}{\partial l}\int_0^T \frac{\partial^p s(t, l, \varphi)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial\varphi^\nu}\frac{\partial^p v(t, l, \varphi)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial\varphi^\nu}\,dt = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^T \frac{\partial^p s(t, l, \varphi)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial\varphi^\nu}\frac{\partial^p v(t, l, \varphi)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial\varphi^\nu}\,dt = 0 \tag{15}$$

при $p = 0, 1, 2, \ldots, \nu = 0, 1, 2, \ldots, p$ и

$$\frac{\partial}{\partial l}\int\limits_0^T \frac{\partial^p s(t, l, \varphi)}{\partial l^{p-\nu+1}\,\partial\varphi^{\nu-1}}\,\frac{\partial^p v(t, l, \varphi)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial\varphi^{\nu}}\,dt = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\int\limits_0^T \frac{\partial^p s(t, l, \varphi)}{\partial l^{p-\nu+1}\,\partial\varphi^{\nu-1}}\,\frac{\partial^p v(t, l, \varphi)}{\partial l^{p-\nu}\,\partial\varphi^{\nu}}\,dt = 0 \tag{16}$$

при $p = 1, 2, \ldots, \nu = 1, 2, \ldots, p$. Здесь $v(t, l, \varphi)$ определяется из интегрального уравнения $\int\limits_0^T K(t-\tau)\,v(\tau, l, \varphi)\,d\tau = s(t, l, \varphi)$, решение которого может быть представлено в виде узкополосного радиосигнала [2]

$$v(t, l, \varphi) = V(t, l)\cos[\omega_0 t + \Psi(t, l) - \varphi]. \tag{17}$$

Подставляя (14) и (17) в (15) и (16), получаем, пренебрегая интегралами от членов, осциллирующих с частотой $2\omega_0$, что условия (4) и (5) выполняются, если

$$\frac{d}{dl}\left\{\left[\frac{\partial^{2p} S_c(l_1, l_2)}{\partial l_1{}^p\,\partial l_2{}^p}\right]_{l_1=l_2=l}\right\} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dl}\left\{\left[\frac{\partial^{2p+1} S_s(l_1, l_2)}{\partial l_1{}^{p+1}\,\partial l_2{}^p}\right]_{l_1=l_2=l}\right\} = 0, \tag{19}$$

где

$$\left\{\begin{matrix} S_c(l_1, l_2) \\ S_s(l_1, l_2)\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int\limits_0^T F(t, l_1)\,V(t, l_2)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}[\Psi(t, l_1) - \Psi(t, l_2)]\,dt.$$

При оптимальном приеме сигнала (14) с известной начальной фазой сигнальная функция равна $S_c(l_1, l_2)$. Для того чтобы эта функция была четной функцией разности своих аргументов, т. е. чтобы выполнялось соотношение, аналогичное (13), достаточно выполнения требования (18), которое равносильно требованию, установленному в [4] для сигнальной функции неэнергетического параметра детерминированного сигнала. Если же начальная фаза сигнала (14) неизвестна, то сигнальная функция $S(l_1, l_2)$ (12) будет удовлетворять соотношению (13), если выполняются условия (17) и (18). Следовательно, для того, чтобы сигнальная функция параметра l при приеме сигнала (14) со случайной начальной фазой удовлетворяла соотношению (13), на вид сигнала $s(t, l, \varphi)$ должны быть наложены более жесткие ограничения, чем при приеме того же сигнала, но с известной начальной фазой.

В случае, когда закон фазовой модуляции не зависит от неизвестного параметра l, т. е. $\Psi(t, l) = \Psi(t)$, то $S_s(l_1, l_2) = 0$ и для сигнала $s(t, l, \varphi)$ выполняются условия (7) и (19). Если при этом также выполняется (18), то $S(l_1, l_2, \varphi_1, \varphi_2) = S(|\Delta l|, |\Delta\varphi|)$. Таким образом, если неизвестный параметр l входит только в огибающую радиосигнала $s(t, l, \varphi)$, то из четности сигнальной функции при приеме радиосигнала с известной начальной фазой следует четность сигнальной функции при приеме того же радиосигнала со случайной начальной фазой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, Изд. Советское радио, 1966.
2. Е. И. Куликов, Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. Изд. Советское радио, 1969.
3. С. Е. Фалькович, Оценка параметров сигнала, Изд. Советское радио, 1970.
4. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1968, **13**, 12, 2254.

Поступило в редакцию
12 VIII 1971