(21)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1972

УДК 621.391.14

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

А. П. Трифонов

Для случая малых отношений сигнал/шум получено приближенное выражение для дисперсии байесовской оценки параметра сигнала, принимаемого на фоне стационарного нормального шума.

Асимптотические свойства байесовских оценок при квадратичной функции потерь исследовались в ряде работ [1–4] и др. При этом основное внимание уделялось поведению оценки при неограниченном возрастании отношения сигнал / шум. Было показано [1–4], что байесовская оценка сходится к оценке максимального правдоподобия, теория и реализационные возможности которой достаточно подробно рассматривались в литературе [1, 3, 4] и др. Однако удовлетворительное качество оценки методом максимального правдоподобия может быть получено лишь при достаточно больших отношениях сигнал / шум, в то время как байесовская оценка при квадратичной функции потерь имеет минимальное рассеяние (среднеквадратическую ошибку) для любых отношений сигнал / шум. В этой связи определенный интерес представляет поведение байесовской оценки в области малых отношений сигнал / шум.

Как известно [1−4], байесовская оценка γ при квадратичной функции потерь определяется выражением

$$\gamma = \frac{\int l W(l) L(l)\, dl}{\int W(l) L(l)\, dl}. \qquad (1)$$

Здесь $W(l)$ — априорная плотность вероятности оцениваемого параметра l, $L(l)$ — функционал отношения правдоподобия.

Положим, что наблюдается реализация аддитивной смеси шума и сигнала

$$x(t) = n(t) + s(t,\ l_0), \quad -T \leqslant t \leqslant T, \qquad (2)$$

где $s(t,\ l_0)$ — сигнал, содержащий параметр l_0, подлежащий оценке, $n(t)$ — реализация стационарного нормального шума с нулевым средним значением $\mathbf{M}[n(t)] = 0$ и функцией корреляции $\mathbf{M}\,[n(t_1)\,n(t_2)] = K(t_1 - t_2)$.

Если отношение сигнал / шум не зависит от оцениваемого параметра, т. е. l — неэнергетический параметр (временное положение сигнала, фаза, производные фазы и др.), то функционал отношения правдоподобия $L(l)$ будет равен [1]

$$L(l) = \text{const} \exp\left[\int_{-T}^{T} x(t)\, v(t, l)\, dt\right]. \qquad (3)$$

Здесь $v(t, l)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_{-T}^{T} K(t-\tau)\, v(\tau, l)\, d\tau = s(t, l), \qquad t \in [-T; T].$$

Подставляя в (3) значение $x(t)$ из (2), а затем (3) в (1) и вводя обозначения

$$z = \left[\int_{-T}^{T} s(t,\ l)\, v(t,\ l)\, dt\right]^{1/2}; \quad S(l_0,\ l) = z^{-2}\int_{-T}^{T} s(t,\ l_0)\, v(t,\ l)\, dl, \quad N(l) = z^{-1}\int_{-T}^{T} n(t)\, v(t, l)\, dl$$

получаем

$$\gamma \equiv \gamma(z) = \frac{\int l W(l) \exp\left[z^2 S(l_0, l) + z N(l)\right] dl}{\int W(l) \exp\left[z^2 S(l_0, l) + z N(l)\right] dl}. \qquad (4)$$

Величина z представляет собой отношение сигнал / шум по напряжению на выходе линейной части приемника, а функции $S(l_0 l)$ и $N(l)$ нормированы так, что $\max S(l_0, l) = \mathbf{M}[N^2(l)] = 1$.

Найдем смещение (систематическую ошибку)

$$\Delta = \mathbf{M}[\gamma - l_0] \qquad (5)$$

и рассеяние (среднеквадратическую ошибку)

$$\sigma^2 = \mathbf{M}[(\gamma - l_0)^2] \qquad (6)$$

оценки (1) при малых отношениях сигнал / шум. Непосредственное определение характеристик оценки (5) и (6) весьма затруднительно, поэтому разложим функцию $\gamma(z)$ (1) в ряд Тейлора по z в окрестности точки $z = 0$

$$\gamma(z) = \gamma(0) + \gamma'_{(0)} z + \frac{1}{2}\gamma''_{(0)} z^2 + \frac{1}{3!}\gamma'''_{(0)} z^3 + \ldots \qquad (7)$$

Это разложение значительно упрощает выполнение усреднения в (5) и (6), так как реализация случайного процесса $N(l)$ входит в коэффициенты ряда (7) лишь в положительных степенях. Подставляя (7) в (5) и (6), получим, отбрасывая члены порядка малости z^4 и менее

$$\Delta = \mathbf{M}\left[\gamma(0) - l_0 + \gamma'_{(0)}z + \frac{1}{2}\gamma''_{(0)}z^2 + \frac{1}{3!}\gamma'''_{(0)}z^3\right], \tag{8}$$

$$\sigma^2 = \mathbf{M}\left[(\gamma(0) - l_0)^2 + 2\gamma'_{(0)}(\gamma(0) - l_0)z + \{\gamma'^2_{(0)} + \gamma''_{(0)}(\gamma(0) - l_0)\}z^2 + \right.$$
$$\left. + \left\{\gamma'_{(0)}\gamma''_{(0)} + \frac{1}{3}\gamma'''_{(0)}(\gamma(0) - l_0)\right\}z^3\right]. \tag{9}$$

Производные оценки в формулах (8) и (9) имеют вид

$$\gamma(0) = l_{pr}, \quad \gamma'_{(0)} = \int (l - l_{pr})N(l)W(l)\,dl, \quad \gamma''_{(0)} = \int (l - l_{pr})[2S(l_0, l) +$$
$$+ N^2]\,W(l)\,dl - 2\gamma'_{(0)}\int N(l)W(l)\,dl, \quad \gamma'''_{(0)} = \int (l - l_{pr})[6S(l_0, l) + N^2(l)] \times$$
$$\times N(l)W(l)\,dl - 3\gamma''_{(0)}\int N(l)W(l)\,dl - 3\gamma'_{(0)}\int [2S(l_0, l) + N^2(l)]\,W(l)\,dl. \tag{10}$$

Здесь l_{pr} — априорное среднее оцениваемого параметра. Подставим (10) в (8), (9) и выполним усреднение по реализациям $N(l)$ при фиксированном l_0. Придем к выражениям для условного смещения и рассеяния оценки

$$\Delta(l_0) = l_{pr} - l_0 + z^2 \iint (l_1 - l_{pr})[S(l_0, l_1) - S(l_1, l_2)]\,W(l_1)W(l_2)\,dl_1\,dl_2, \tag{11}$$

$$\sigma^2(l_0) = (l_{pr} - l_0)^2 + z^2\left\{\iint (l_1 - l_{pr})(l_2 - l_{pr})S(l_1, l_2)W(l_1)W(l_2)\,dl_1\,dl_2 + \right.$$
$$\left. + (l_{pr} - l_0)\left[2\int (l - l_{pr})S(l_0, l)W(l)\,dl - \iint (l_1 - l_{pr})S(l_1, l_2)W(l_1)W(l_2)\,dl_1\,dl_2\right]\right\}. \tag{12}$$

При вычислении (11), (12) использованы известные соотношения [1, 4] : $\mathbf{M}[N(l)] = 0$, $\mathbf{M}[N(l_1)N(l_2)] = S(l_1, l_2)$. Безусловные характеристики оценки получаем, усредняя (11) и (12) по l_0. Они имеют вид

$$\Delta = 0, \quad \sigma^2 = \sigma_{pr}^2 - z^2 \iint (l_1 - l_{pr})(l_2 - l_{pr})S(l_1, l_2)W(l_1)W(l_2)\,dl_1\,dl_2, \tag{13}$$

где σ_{pr}^2 — дисперсия априорного распределения.

Выражение для безусловного рассеяния оценки (13) можно несколько упростить, если учесть, что для рассматриваемого параметра [5] $S(l_1, l_2) = S(l_1 - l_2) = S(\Delta l)$ и ввести функцию $W_1(x) = W(x + l_{pr})$. Тогда (13) можно переписать как

$$\sigma^2 = \sigma_{pr}^2 - z^2 \iint xyS(x - y)W_1(x)W_1(y)\,dx\,dy. \tag{14}$$

От вычисления двойного интеграла в (14) можно избавиться, переходя к характеристической функции $\Theta_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}W_1(x)\,dx$ и к спектральному представлению функции $S(\Delta l)$: $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\Delta l}S(\Delta l)\,d(\Delta l)$. Соответственно, рассеяние оценки будет равно

$$\sigma^2 = \sigma_{pr}^2 - \frac{z^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d\Theta_1(\omega)}{d\omega}\right|^2 S(\omega)\,d\omega$$

или (15)

$$\sigma^2 = \sigma_{pr}^2 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d\Theta_1(\omega)}{d\omega}\right|^2 S_0(\omega)\,d\omega.$$

Здесь $S_0(\Delta l) = \int_{-T}^{T} s(t, l_0)v(t, l_0 + \Delta l)\,dt$ — ненормированная функция, максимальное значение которой равно z^2. Формулы (11) — (15) имеют погрешность порядка z^4.

В качестве примера рассмотрим оценку временного положения τ_0 сигнала $s(t-\tau_0)$ при приеме на фоне белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0. Если сигнал полностью расположен внутри интервала наблюдения $[-T;\ T]$, то

$$S_0(\Delta\tau) = \frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 e^{j\omega\Delta\tau}\, d\omega,$$

($s(\omega)$ — спектр сигнала) и формула (15) принимают вид

$$\sigma^2 = \sigma_{pr}{}^2 - \frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\Theta_1(\omega)}{d\omega} \right|^2 |s(\omega)|^2\, d\omega.$$

Полученные для характеристик байесовской оценки выражения позволяют определить влияние априорного распределения и формы сигнала на качество оценки при малых отношениях сигнал / шум.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, **2**. М., «Сов. радио», 1968.
2. Левин Б. Р., Шинаков Ю. С. Предельная форма байесовской оценки коэффициентов регрессии в присутствии нестационарного шума. Проблемы передачи информации, 1967, **3**, *1*, 27—34.
3. Миддлтон Д. Очерки теории связи. М., «Сов. радио», 1966.
4. Фалькович С. Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. М., «Сов. радио», 1961.
5. Куликов Е. И., Трифонов А. П. О некоторых свойствах сигнала на выходе оптимального приемника. Радиотехника и электроника, 1963, **13**, *12*, 2254—2257.

Поступила в редакцию
23 февраля 1970 г.