23

23

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# ИЗВЕСТИЯ
# АКАДЕМИИ НАУК СССР
# ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1972

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
№ 3 1972

# ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА ОПТИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ОДНОВРЕМЕННОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ И ОЦЕНКИ ИХ ПАРАМЕТРОВ

А. П. ТРИФОНОВ

(*Воронеж*)

Для широкого класса априорных распределений и функций потерь получена предельная форма бейесовского оператора обнаружения сигнала и оценки его амплитуды или неэнергетического параметра при приеме на фоне стационарного нормального шума. Определены характеристики обнаружения.

В [1, 2] и других работах была определена структура оптимального (бейесовского) оператора одновременного обнаружения и оценки. Однако применение полученных в [1, 2] результатов связано со значительными трудностями, такими как невозможность получить конкретное аналитическое решение в практических случаях, произвольность выбора потерь и обычно имеющая место недостаточность априорной информации [3, 4]. В связи с этим определенный интерес представляет рассмотрение асимптотического поведения бейесовского оператора обнаружения и оценки при неограниченном увеличении отношения сигнал / шум. Получаемая при этом предельная форма бейесовского оператора оказывается инвариантной к весьма широкому классу априорных распределений и функций потерь.

**1. Исходные соотношения.** Воспользуемся приведенной в [1, 2] общей моделью обнаружения — оценки. Положим, что принятые на интервале $[0; T]$ данные $x(t)$ либо содержат только шум $n(t)$ с вероятностью $q$, либо являются смесью полезного сигнала $s(t, l_0)$ и шума $n(t)$ с вероятностью $p = 1 - q$. Приемник должен вынести два функционально связанных решения: $\gamma_i$, $(i = 0, 1)$ — об отсутствии или наличии сигнала и $\gamma$ — о значении $l$ неизвестного параметра, который считаем распределенным с плотностью вероятности $W(l)$ на интервале $[-1; 1]$. Бейесовский алгоритм обнаружения — оценки имеет следующий вид; если $\Lambda \geqslant 1$, то принимается решение $\gamma_1$ (сигнал присутствует), если $\Lambda < 1$, то решение $\gamma_0$, где $\Lambda$ — модифицированное отношение правдоподобия [1]:

$$\Lambda = \frac{p}{q} L \left\{ \int [C_{01}(l) - C_{11}(\hat{\gamma}, l)] \, W_{ps}(l) \, dl \right\} \Big/ [C_{10}(\hat{\gamma}) - C_{00}], \tag{1.1}$$

где $L = \int L(l) W(l) \, dl$, $L(l)$ — отношение правдоподобия, $W_{ps}(l)$ — апостериорная плотность вероятности параметра $l$, $C_{ij}$ $(i, j = 0, 1)$ — соответствующие функции потерь [1]. В (1.1) значение $\hat{\gamma}$ определяется из условия минимума выражения

$$(q/p) L^{-1} C_{10}(\gamma) + \int C_{11}(\gamma, l) \, W_{ps}(l) \, dl. \tag{1.2}$$

(В (1.1), (1.2) и всюду далее интегрирование по $l$ выполняется в пределах от $-1$ до $+1$). Решение об истинном значении параметра $l$ (оценка) выносится в случае, когда $\Lambda \geqslant 1$, т. е. принято решение о наличии сигнала. Бейесовской оценкой при этом является $\gamma_m = \hat{\gamma}$.

Сделаем несколько ограничивающих предположений. Будем считать, что априорная плотность вероятности $W(l)$ непрерывна и $W(l) > 0$, функции потерь $C_{01}(l)$, $C_{10}(\gamma)$ и $C_{11}(\gamma, l)$ ограничены при $l, \gamma \in [-1; 1]$, а функция $C_{11}(\gamma, l)$ непрерывна по $l$ в замкнутом интервале $[-1; 1]$ и достигает минимума при $\gamma = l$. Кроме того, положим, что $p < 1$, $C_{10}(\gamma) > C_{00} \geqslant 0$ и $C_{01}(l) > C_{11}(\gamma, l) \geqslant 0$.

**2. Обнаружение и оценка амплитуды.** При наличии сигнала представим принимаемые данные $x(t)$ в виде

$$x(t) = l_0 s(t) + n(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{2.1}$$

где $n(t)$ — реализация стационарного нормального случайного процесса с нулевым средним значением $\langle n(t)\rangle = 0$ и функцией корреляции $\langle n(t)n(t+\tau)\rangle = K(\tau)$, $l_0 s(t)$ — сигнал, который присутствует с вероятностью $p$, $l_0$ — неизвестный параметр, подлежащий оценке. Отношение правдоподобия [4, 6, 7]

$$L(l) = \exp\left[z^2\left(l\hat{l} - \frac{1}{2}l^2\right)\right] = \exp\left[\frac{\hat{l}^2 z^2}{2} - \frac{z^2}{2}(\hat{l} - l)^2\right], \tag{2.2}$$

где $\hat{l} = \int\limits_0^T x(t)v(t)\,dt z^{-2}$, $z^2 = \int\limits_0^T s(t)v(t)\,dt$ — максимальное отношение сигнал / шум, $v(t)$ — решение интегрального уравнения $\int\limits_0^T K(t-\tau)v(\tau)\,d\tau = s(t) \quad (t \in [0; T])$.

Перепишем правило обнаружения в следующем виде: если

$$M_1 + M_0 \geqslant 0, \tag{2.3}$$

то принимается решение $\gamma_1$; если $M_1 + M_0 < 0$, то принимается решение $\gamma_0$, где

$$M_1 = \ln L, \qquad M_0 = \ln\left\{p\int[C_{01}(l) - C_{11}(l, \hat{\gamma})]\,W_{ps}(l)\,dl/q\,[C_{10}(\hat{\gamma}) - C_{00}]\right\}. \tag{2.4}$$

Подставив значение $L(l)$ из (2.2), получим

$$M_1 = \frac{\hat{l}^2 z^2}{2} + \ln\int W(l)\exp\left[-\frac{z^2}{2}(\hat{l} - l)^2\right]dl. \tag{2.5}$$

Если $-1 \leqslant \hat{l} \leqslant 1$, то для оценки интеграла в (2.2) выполняются все условия применимости асимптотической формулы Лапласа [5], используя которую при $z \to \infty$, получаем

$$z\int W(l)\exp\left[-\frac{z^2}{2}(\hat{l} - l)^2\right]dl \to W(\hat{l})\,\xi\sqrt{2\pi},$$

$\xi = 1/2$ при $\hat{l} = -1$ или $\hat{l} = 1$ и $\xi = 1$ при $-1 < \hat{l} < 1$. В случае, когда $\hat{l} < -1$ применение метода Лапласа [5] приводит к предельному значению интеграла при $z \to \infty$:

$$z^2\exp\left[\frac{z^2}{2}(\hat{l} + 1)^2\right]\int W(l)\exp\left[-\frac{z^2}{2}(\hat{l} - l)^2\right]dl \to \frac{W(-1)}{-(\hat{l} + 1)}.$$

Аналогичным образом, при $\hat{l} > 1$ и $z \to \infty$. $z^2\exp\left[\frac{z^2}{2}(\hat{l} - 1)^2\right]\int W(l)\exp\left[-\frac{z^2}{2} \times (\hat{l} - l)^2\right]dl \to \frac{W(1)}{\hat{l} - 1}$. Следовательно, можно записать, что при $z \to \infty$

$$M_1 = \begin{cases} -\dfrac{z^2}{2}(1 + 2\hat{l}) - 2\ln z + o(\ln z) & (\hat{l} < -1), \\[2ex] \dfrac{\hat{l}^2 z^2}{2} - \ln z + o(\ln z) & (-1 \leqslant \hat{l} \leqslant 1), \\[2ex] \dfrac{z^2}{2}(2\hat{l} - 1) - 2\ln z + o(\ln z) & (\hat{l} > 1). \end{cases} \tag{2.6}$$

В силу ограничений, наложенных на вид функций потерь, всегда существуют такие положительные постоянные $a_i$ и $b_i$ $(i = 1, 2)$, что $a_1 \leqslant C_{01}(l) - C_{11}(\gamma, l) \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant C_{10}(\gamma) - C_{00} \leqslant b_2$. Откуда, при любых $z$

$$|M_0| \leqslant \max\left[\left|\ln\frac{pa_1}{qb_2}\right|, \left|\ln\frac{pb_1}{qa_2}\right|\right] \tag{2.7}$$

и, значит, при $z \to \infty$ $|M_0| = o(\ln z)$.

Поскольку всегда $\ln z / z^2 < 1/4$ то, согласно (2.6) и (2.7) асимптотически (при $z \to \infty$) оптимальным правилом обнаружения будет следующее: принимается решение $\gamma_1$, если

$$\hat{l}^2 > 2 \ln z / z^2, \tag{2.8}$$

и принимается решение $\gamma_0$, если $\hat{l}^2 < 2 \ln z / z^2$.

Найдем теперь предельную форму бейесовской оценки $\gamma_m$ при $z \to \infty$. Оценка параметра $l$ производится, если принято решение о наличии сигнала, т. е. выполняется неравенство (2.8). Так как при выполнении (2.8) и $z \to \infty$, $L \to \infty$, то, используя асимптотическую формулу Лапласа [5], можем записать (1.2) в виде

$$(q/p)\, L^{-1} C_{10}(\gamma) + \frac{\int C_{11}(\gamma, l)\, W(l) \exp\left[-\frac{z^2}{2}(\hat{l} - l)^2\right] dl}{\int W(l) \exp\left[-\frac{z^2}{2}(\hat{l} - l)^2\right] dl} \to \begin{cases} C_{11}(\gamma, -1) & (\hat{l} < -1), \\ C_{11}(\gamma, \hat{l}) & (-1 \leqslant \hat{l} \leqslant 1), \\ C_{11}(\gamma, 1) & (\hat{l} > 1). \end{cases} \tag{2.9}$$

Функция потерь $C_{11}(\gamma, l)$ достигает минимума при $\gamma = l$. Поэтому, минимизируя (2.9) по $\gamma$ находим для бейесовской оценки

$$\gamma_m = \begin{cases} -1 & (\hat{l} < -1), \\ \hat{l} & (-1 \leqslant \hat{l} \leqslant 1), \\ 1 & (\hat{l} > 1), \end{cases} \tag{2.10}$$

т. е. бейесовская оценка при $z \to \infty$ отличается от оценки максимального правдоподобия [6] лишь тем, что она принимается только в случае выполнения неравенства (2.8), когда вынесено решение о наличии сигнала на входе приемника. Следовательно, оценивание параметра $l$ производится с вероятностью $p_E < 1$.

Определим вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) $\alpha$ и ошибок 2-го рода (пропуска сигналов) $\beta$ при обнаружении сигнала согласно (2.8). Если на входе приемника присутствует полезный сигнал, то, подставив (2.1) в выражение для $\hat{l}$, получим $\hat{l} = l_0 + N / z$, где $N$ — случайная величина, распределенная нормально с параметрами (0; 1). Значит, для вероятности пропуска имеем

$$\beta = \int [\Phi(lz + \sqrt{2 \ln z}) - \Phi(lz - \sqrt{2 \ln z})]\, W(l)\, dl, \tag{2.11}$$

где $\Phi(u) = (1/\sqrt{2\pi}) \int\limits_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2}\, dx$ — интеграл вероятности.

При отсутствии сигнала $\hat{l} = N / z$ и

$$\alpha = 2[1 - \Phi(\sqrt{2 \ln z})]. \tag{2.12}$$

Используя (2.11) и (2.12), можем записать, что решение об истинном значении параметра $l$ (оценка) выносится с вероятностью

$$p_E = 2q[1 - \Phi(\sqrt{2 \ln z})] + p\{1 - \int [\Phi(lz + \sqrt{2 \ln z}) - \Phi(lz - \sqrt{2 \ln z})]\, W(l)\, dl\}.$$

**3. Обнаружение и оценка неэнергетического параметра.** Положим, что неизвестный параметр сигнала $s(t, l)$ является неэнергетическим [7]. Тогда отношение правдоподобия [6, 7]

$$L(l) = \exp\left\{ z^2 \left[ \lambda(l) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \tag{3.1}$$

где $\lambda(l) = \int\limits_0^T x(t)\, v(t, l)\, dt z^{-2}$ — нормированный логарифм отношения правдоподобия, $z^2 = \int\limits_0^T s(t, l)\, v(t, l)\, dt$ — отношение сигнал / шум, $v(t, l)$ — решение интегрального уравнения

$$\int\limits_0^T K(t - \tau)\, v(\tau, l)\, d\tau = s(t, l) \qquad (t \in [0; T],\ l \in [-1; 1]).$$

В силу определения неэнергетического параметра, отношение сигнал / шум $z$ не зависит от $l$, а $\lambda(l)$ представляет собой реализацию нормального случайного процесса, для которого $\langle \lambda(l) \rangle \leqslant 1$, $z^{-2} \leqslant \langle \lambda^2(l) \rangle \leqslant 1 + z^{-2}$. Будем считать, что реализация $\lambda(l)$ дважды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1. Некоторые достаточные условия, при которых выполняется это требование, приведены в [8].

Обозначив через $l_m$ положение абсолютного максимума реализации $\lambda(l)$, $l_m \in [-1; 1]$, введя в рассмотрение функцию $\Delta(l) = \lambda(l_m) - \lambda(l)$ и используя (3.1), запишем $M_1$ из (2.4) в виде

$$M_1 = z^2 \left[ \lambda(l_m) - \frac{1}{2} \right] + \ln \int W(l) \exp[-z^2\Delta(l)]\, dl. \tag{3.2}$$

Оценим величину интеграла в (3.2) при $z \to \infty$. Поскольку для этого интеграла с вероятностью 1 выполняются все условия применимости асимптотической формулы Лапласа [5], при $z \to \infty$ с той же вероятностью имеем, если $\lambda'(l_m) = 0$,

$$z \int W(l) \exp[-z^2\Delta(l)]\, dl \to W(l_m)[2\pi/-\lambda''(l_m)]^{1/2}\, \xi.$$

Величина $\xi$ определена выше. Если $l_m = -1$ и $\lambda'(-1) \neq 0$, то при $z \to \infty$

$$z^2 \int W(l) \exp[-z^2\Delta(l)]\, dl \to W(-1)/-\lambda'(-1).$$

Соответственно, если $l_m = 1$ и $\lambda'(1) \neq 0$, то

$$z^2 \int W(l) \exp[-z^2\Delta(l)]\, dl \to W(1)/\lambda'(1).$$

Следовательно, можем записать, что при $z \to \infty$

$$M_1 = z^2 \left[ \lambda(l_m) - \frac{1}{2} \right] + o(z). \tag{3.3}$$

Из (2.7) при этом имеем $|M_0| = o(z)$. Значит, согласно (2.3) и (3.3), асимптотически оптимальным правилом обнаружения будет следующее: принимается решение $\gamma_1$, если

$$\lambda(l_m) > {}^1/_2, \tag{3.4}$$

и решение $\gamma_0$ если $\lambda(l_m) < {}^1/_2$.

Найдем предельную форму бейесовской оценки параметра $l$ при $z \to \infty$. Если выполняется неравенство (3.4), то $L \to \infty$ и применение асимптотической формулы Лапласа дает возможность записать предельное значение (1.2) в виде

$$(q/p)L^{-1}C_{10}(\gamma) + \frac{\int C_{11}(\gamma, l) \exp[-z^2\Delta(l)]\, W(l)\, dl}{\int \exp[-z^2\Delta(l)]\, W(l)\, dl} \to C_{11}(\gamma, l_m). \tag{3.5}$$

Минимизируя (3.5) по $\gamma$, получаем предельное значение бейесовской оценки

$$\gamma_m = l_m. \tag{3.6}$$

Как и при оценке амплитуды, асимптотически бейесовской является оценка максимального правдоподобия, которая используется только в случае выполнения неравенства (3.4), т. е. с вероятностью $p_E < 1$.

Вероятности ошибок обнаружения легко определить из результатов [8]. Для этого в выражениях для $\alpha$ и $\beta$ в [8] достаточно положить пороговый уровень равным $z^2/2$. Получим, что при $z \to \infty$

$$\alpha \to 1 - \exp\{-\exp[B - z^2/8]\}, \tag{3.7}$$

$$\beta \to 1 - \Phi(z/2), \tag{3.8}$$

$$B = \ln\left\{ \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_1\, \partial l_2} \right]^{1/2}_{l_1 = l_2} \right\}, \qquad S(l_1, l_2) = \int_0^T s(t, l_1)\, v(t, l_2)\, dt\, z^{-2}.$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что оценивание неэнергетического параметра $l$ производится с вероятностью, предельное значение которой при $z \to \infty$ равно $p_E \to q(1 - \exp\{-\exp[B - z^2/8]\}) + p\Phi(z/2)$.

Таким образом, при $z \to \infty$ существуют асимптотически оптимальные правила обнаружения (2.8), (3.4) и оценки (2.10), (3.6) амплитуды и неэнергетического параметра сигнала. При этом асимптотически оптимальные операторы совместного обнаружения и оценки инвариантны по отношению к весьма широкому классу функций потерь и априорных распределений параметра.

Поступило 12 VIII 1971

## ЛИТЕРАТУРА


1. Миддлтон Д., Эспозито Р. Новые результаты в теории одновременного оптимального обнаружения сигналов и оценки их параметров в шуме. Проблемы передачи информации, 1970, VI, 2.
2. Middleton D., Esposito R. Simultaneous optimum detection and estimation of signals in noise. IEEE Trans. Information Theory, vol. JT-14, 3, May 1968.
3. Левин Б. Р., Шинаков Ю. С. Предельная форма бейесовской оценки коэффициента регрессии в присутствии нестационарного шума. Проблемы передачи информации, 1967, 111, 1.
4. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. 2, «Сов. Радио», 1962.
5. Копсон Э. Асимптотические разложения. «Мир», 1966.
6. Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. «Мир», 1969.
7. Куликов Е. И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. «Сов. Радио», 1969.
8. Трифонов А. П. Асимптотические характеристики оптимального обнаружения квазидетерминированного сигнала на фоне стационарной гауссовой помехи. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1971, № 4.