(24)

(24)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XVII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

8

МОСКВА · 1972

Трифонов

УДК 621.391.2

АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ С УЧЕТОМ АНОМАЛЬНЫХ ОШИБОК

Е. И. Куликов, В. К. Маршаков, А. П. Трифонов

Пусть на вход приемного устройства в течение интервала времени $[0; T]$ поступает аддитивная смесь $x(t)$ сигнала $s(t, l_0)$ и стационарного нормального шума $n(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $K(\tau)$. Оцениваемый параметр l_0 будем считать неэнергетическим [1] и равномерно распределенным на интервале $[-L/2; L/2]$. Приемное устройство для оценки параметра l_0 вырабатывает логарифм функционала отношения правдоподобия $M(l)$, который с точностью до постоянных слагаемых равен [1]

$$M(l) = \int_0^T x(t) v(t, l)\,dt = z^2 S(l) + zN(l), \tag{1}$$

где $z^2 = \int_0^T s(t, l) v(t, l)\,dt$ – отношение сигнал/шум на выходе приемного устройства;

$S(l) = z^{-2}\int\limits_0^T s(t, l_0)v(t, l)\,dt, \quad N(l) = z^{-1}\int\limits_0^T n(t)v(t, l)\,dt$ — нормированные сигнальная и шумовая функции; опорный сигнал $v(t, l)$ определяется из интегрального уравнения $\int\limits_0^T K(t-\tau)v(\tau, l)\,d\tau = s(t, l),\ t \in [0;\ T]$. В качестве оценки параметра l_0 выбирают положение l_m абсолютного максимума $M(l)$.

Обозначим P_0 вероятность того, что максимум $M(l) = z^2S(l) + zN(l)$, расположенный вблизи истинного значения l_0, больше любого выброса шума $zN(l)$. Тогда аналогично [2] выражение для дисперсии оценки при больших отношениях сигнал/шум можно записать как

$$\sigma^2 = P_0\sigma_0^2 + (1 - P_0)\frac{L^2}{6}. \tag{2}$$

Здесь σ_0^2 — дисперсия оценки, вычисленная в предположении, что существуют только нормальные ошибки; $L^2/6$ — дисперсия оценки при наличии только аномальных ошибок. Если сигнал $s(t, l)$ обладает достаточным количеством непрерывных производных по l, то выражение для σ_0^2 имеет вид [1]

$$\sigma_0^2 = -\frac{1}{z^2S''(l_0)}\left[1 + \frac{S^{\mathrm{IV}}(l_0)}{z^2S''^2(l_0)}\right]. \tag{3}$$

Полагая, что априорный интервал L значительно больше ширины сигнальной функции $S(l)$ согласно [3], запишем

$$P_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_N(H)W_{SN}(H)\,dH, \tag{4}$$

где $W_{SN}(H)$ — плотность вероятности значений абсолютного максимума реализации $M(l)$, обусловленного наличием сигнала и расположенного вблизи пика сигнальной функции $S(l)$, а $P_N(H)$ — функция распределения значений абсолютного максимума реализаций шумовой функции $zN(l)$ на интервале $[-L/2;\ L/2]$.

Рассмотрим поведение вероятности P_0, определяемой из (4), при неограниченном увеличении отношения сигнал/шум ($z \to \infty$), когда применимы формулы (2) и (3). Для максимума $M(l_m)$, обусловленного наличием сигнала, из (1) имеем $H = z^2S(l_m) + zN(l_m)$. При помощи формулы Тейлора, учитывая, что $S'(l_0) = 0$, получим

$$H = z^2 + zN(l_0) + \frac{1}{2}S''(l_0 + \gamma_1\Delta)\Delta^2z^2 + N'(l_0 + \gamma_2\Delta)\Delta z, \tag{5}$$

где $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1,\ i = 1, 2;\ \Delta = l_m - l_0$ — случайная ошибка измерения, которая может быть найдена из решения уравнения правдоподобия

$$z^2S'(l_m) + zN'(l_m) = 0. \tag{6}$$

Перепишем (6), используя формулу Лагранжа, в виде $zS''(l_0 + \gamma_3\Delta)\Delta + N'(l_m) = 0$, откуда

$$\Delta = -\frac{1}{z}\frac{N'(l_m)}{S''(l_0 + \gamma_3\Delta)}, \qquad 0 \leqslant \gamma_3 \leqslant 1. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), приходим к выражению

$$H = z^2 + z\left[N(l_0) + \frac{\alpha_z}{z}\right], \tag{8}$$

где

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\frac{S''(l_0 + \gamma_1\Delta)N'^2(l_m)}{S''^2(l_0 + \gamma_3\Delta)} - \frac{N'(l_0 + \gamma_2\Delta)N'(l_m)}{S''(l_0 + \gamma_3\Delta)}. \tag{9}$$

Ранее предполагалось, что значение l_m расположено вблизи l_0. Будем считать, что l_m расположено вблизи l_0, если $|l_m - l_0| < \Delta_L$, где Δ_L определяется из условия $S''(l) < 0$, когда $|l - l_0| < \Delta_L$. Следовательно, знаменатели в (7), (9) не обращаются в нуль при $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1$ и $|\Delta| < \Delta_L$.

Рассмотрим теперь две случайные величины $\nu = N(l_0)$ и $\nu_z = N(l_0) + \alpha_z/z$. Средний квадрат разности случайных величин ν и ν_z равен $\langle(\nu - \nu_z)^2\rangle = \langle\alpha_z^2\rangle/z^2$. Поскольку $|S''(l)|$ ограничен сверху в силу условия нормировки и дифференцируемости сигнала по параметру l, а статистические характеристики случайного нормального процесса $N'(l)$ не зависят от z, то второй момент $\langle \alpha_z^2 \rangle$ ограничен при $z \to \infty$. Действительно, из (7) имеем, что для $z \to \infty$ $l_m \to l_0$ по вероятности. В свою очередь, если $l_m \to l_0$, то $\langle \alpha_z^2 \rangle \to \langle [N'^2(l_0) / 2S''(l_0)]^2 \rangle = {}^3/_4$. Значит $\langle (\nu - \nu_z)^2 \rangle \to 0$ при $z \to \infty$. Так как $\nu = N(l_0)$ распределено нормально с параметрами (0; 1), то с учетом (8) имеем, когда $z \to \infty$, что

$$W_{SN}(H) \to \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H - z^2)^2}{2z^2}\right]. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (4), получаем при $z \to \infty$

$$P_0 \to \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(H - z^2)^2}{2z^2}\right] P_N(H)\, dH$$

или после замены переменных

$$P_0 \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(v - z)^2}{2}\right] P_N(zv)\, dv. \tag{11}$$

Перепишем (11) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(v - z)^2}{2}\right] P_N(zv)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\psi(z)} \exp\left[-\frac{(v - z)^2}{2}\right] P_N(zv)\, dv +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\psi(z)}^{\infty} \exp\left[-\frac{(v - z)^2}{2}\right] P_N(zv)\, dv.$$

Выбираем функцию $\psi(z)$ такой, чтобы $\psi(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, таким образом, что $\psi(z) / z \to 0$. Например, $\psi(z) = \ln z$ или $\psi(z) = z^\beta$, $0 < \beta < 1$. При таком выборе функции $\psi(z)$ величина интеграла в (11) определяется поведением подынтегральных функций в области $v > \psi(z)$, так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\psi(z)} \exp\left[-\frac{(v - z)^2}{2}\right] P_N(zv)\, dv \leqslant \Phi\left[-z\left(1 - \frac{\psi(z)}{z}\right)\right],$$

где $\Phi(u) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{u} \exp[-x^2/2]\, dx$ — интеграл вероятности, и если $z \to \infty$, то $\Phi[-z(1 - \psi(z)/z)] \to 0$. Известно [4], что при $u \to \infty$ распределение наибольших значений реализаций нормального случайного процесса с нулевым средним значением и единичной дисперсией имеет вид $P[N(l_m) < u] \to \exp[-\exp(-y)]$, где $u^2 = 2[\ln(\xi / 2\pi) + y]$, $\xi = L[-S''(l_0)]^{1/2}$. Следовательно, для $v \to \infty$ имеем

$$P_N(zv) \to \exp\left\{-\exp\left[\ln\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) - \frac{v^2}{2}\right]\right\}. \tag{12}$$

Поскольку величина интеграла в (11) определяется поведением подынтегральных функций в области $v > \psi(z)$, $\psi(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, то можно вместо $P_N(zv)$ подставить в (11) предельное значение (12). Получим

$$P_0 \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(v - z)^2}{2} - \exp\left[\ln\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) - \frac{v^2}{2}\right]\right\} dv. \tag{13}$$

При любых значениях v справедливо разложение

$$\exp\left\{-\exp\left[\ln\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) - \frac{v^2}{2}\right]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^k \exp\left[-\frac{kv^2}{2}\right].$$

Подставляя это разложение в (13) и интегрируя, приходим к выражению

$$P_0 \to \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{2\pi} \right)^k \frac{(-1)^k}{k!\sqrt{1+k}} \exp\left[-\frac{z^2 k}{2(1+k)} \right]. \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) позволяют приближенно оценить вероятность P_0, определяемую формулой (4), для больших, но конечных отношений сигнал/шум и являются точными при $z \to \infty$. Если в (14) учесть лишь первые два члена разложения, то $P_0 \to 1 - \xi \exp[-z^2/4]/2\pi\sqrt{2}$. Это выражение совпадает с выражением для P_0, полученным в [3] на основе теории случайных выбросов.

Подставив предельное значение P_0 (14) в (2), получим предельную дисперсию оценки в виде

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left\{ 1 + \left[\frac{\xi^2 z^2}{6\,[1 + S^{\mathrm{IV}}(l_0)/z^2 S''^2(l_0)]} - 1 \right] \times \right. \tag{15}$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(2\pi)^k k!\sqrt{1+k}} \exp\left[-\frac{z^2 k}{2(1+k)} \right] \right\}.$$

Таким образом, предельная $(z \to \infty)$ точность оценки параметра по методу максимального правдоподобия может быть охарактеризована дисперсией (15). Выражение (15) свидетельствует, что если $\xi \gg 1$, то даже при больших отношениях сигнал/шум z дисперсия оценки максимального правдоподобия может значительно отличаться от

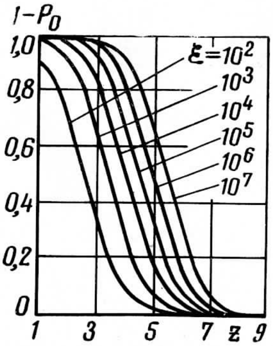

Рис. 1

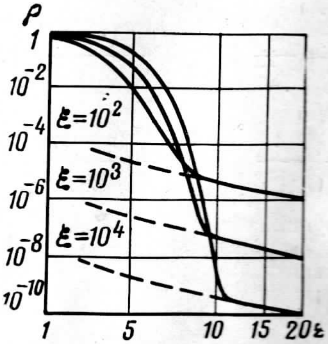

Рис. 2

условной дисперсии σ_0^2 (3) и тем более от дисперсии эффективной оценки [1], которую часто используют в качестве характеристики точности оценки максимального правдоподобия.

В качестве иллюстрации основных соотношений рассмотрим оценку временно́го положения ε_0 колокольного импульса $s(t, \varepsilon_0) = A_0 \exp[-(t - \varepsilon_0)^2/\tau_0^2]$, $|t| \leqslant T/2$, полагая, что ε_0 равномерно распределено на интервале $[-T_0/2; T_0/2]$ и $\tau_0 \ll T - T_0$. Для случая, когда прием производится на фоне белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0, на рис. 1 приведена зависимость вероятности аномальных ошибок $1 - P_0$, а на рис. 2 зависимость отношения $\rho = \sigma^2/\sigma^2_{\text{макс}}$ от отношения сигнал/шум z при различных $\xi = T_0/\tau_0$. Здесь $\sigma^2_{\text{макс}} = T_0^2/6$ — максимальная дисперсия оценки временно́го положения ε_0, т. е. дисперсия оценки при $z = 0$. Пунктиром изображена зависимость $\rho_1(z) = \sigma_0^2/\sigma^2_{\text{макс}}$, где σ_0^2 — условная дисперсия оценки (3). Эти зависимости построены по асимптотическим формулам (13) и (15), которые справедливы при больших z. В области малых отношений сигнал/шум кривые на рис. 1 и 2 верны лишь в качественном отношении, что подтверждается соответствующими физическими соображениями [1, 2].

Согласно рис. 1 при больших отношениях сигнал/шум z вероятность аномальной ошибки мала и относительно медленно увеличивается с ростом ξ. Из рассмотрения кривых рис. 2 видно, что всю область изменения z можно разделить на две области $z < z_0$ и $z > z_0$, где z_0 — пороговое отношение сигнал/шум, которое определяют различными способами, например, как в [5]. В области $z < z_0$ преобладают аномальные ошибки и дисперсия оценки растет с уменьшением длительности импульса τ_0 (т. е. с ростом ξ), в области $z > z_0$ преобладают нормальные ошибки и дисперсия оценки с уменьшением τ_0 уменьшается. Пороговое отношение сигнал / шум z_0 с ростом ξ (или с уменьшением τ_0) монотонно увеличивается. При этом в области $z > z_0$ дисперсия оценки σ^2 (15) практически совпадает с условной дисперсией σ_0^2 (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Куликов, Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, Изд. Советское радио, 1969.
2. Дж. Возенкрафт, И. Джекобс, Теоретические основы техники связи, Изд. Мир, 1969.
3. А. Ф. Фомин, Радиотехника, 1970, **25**, 5, 39.
4. Г. Крамер, М. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, Изд. Мир, 1969.
5. Зейдеман, ТИИЭР, 1970, **58**, 5, 45.

Поступило в редакцию
23 VIII 1971