25

25

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XVII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

8

МОСКВА · 1972

УДК 621.391.2

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА СИГНАЛА НА ФОНЕ НОРМАЛЬНЫХ ШУМОВ ПРИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

Е. И. Куликов, Г. С. Нахмансон, А. П. Трифонов

Положим, что на вход приемного устройства в течение интервала времени $[0; T]$ поступает реализация случайного процесса $x(t) = s(t, l_0) + n(t)$, где $n(t)$ — реализация стационарного нормального случайного процесса с нулевым средним значением и функцией корреляции $K(\tau)$; $s(t, l_0)$ — сигнал, содержащий неизвестный параметр l_0, подлежащий оценке. В большинстве работ [1—3] и др., посвященных задаче оценки параметра сигнала, предпочтение отдается байесовским оценкам при простой функции потерь, т. е. оценкам по максимуму апостериорной плотности вероятности. Однако в некоторых случаях может оказаться более целесообразным использование прямоугольной функции потерь [1], которая имеет вид

$$C(\gamma, l) = C_0 \begin{cases} 1, & |l-\gamma| \geqslant \eta, \\ 0, & |l-\gamma| < \eta. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь l — оцениваемый параметр; γ — искомая оценка.

При использовании прямоугольной функции потерь (1) байесовская оценка γ_m находится из решения уравнения [1]

$$[W_{\text{ps}}(l+\eta) - W_{\text{ps}}(l-\eta)]_{\gamma_m} = 0, \tag{2}$$

где $W_{\text{ps}}(l)$ — апостериорная плотность вероятности параметра l. Если априорное распределение параметра l равномерно в некотором интервале, величина которого значительно больше η, то уравнение (2) можно переписать как

$$[M(l+\eta) - M(l-\eta)]_{\gamma_m} = 0. \tag{3}$$

Здесь $M(l)$ — логарифм функционала отношения правдоподобия, который определяется выражением [2]

$$M(l) = \int_0^T x(t)\, v(t, l)\, dt - \frac{1}{2} Q(l),$$

где $v(t, l)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t-\tau)\, v(\tau, l)\, d\tau = s(t, l); \tag{4}$$

$Q(l) = \int_0^T s(t, l)\, v(t, l)\, dt$ — отношение сигнал/шум. Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon = 1 / \sqrt{Q(l_0)}$ и обозначим

$$S(l_1, l_2) = \int_0^T s(t, l_1)\, v(t, l_2)\, dt, \qquad Q(l) = S(l, l),$$

$$S(l) = \varepsilon^2 [S(l_0, l) - {}^1/_2 Q(l)], \qquad N(l) = \varepsilon \int_0^T n(t)\, v(t, l)\, dt.$$

Уравнение (3) примет вид

$$\{S(l+\eta) - S(l-\eta) + \varepsilon [N(l+\eta) - N(l-\eta)]\}_{\gamma_m} = 0. \tag{5}$$

Функции в этом уравнении нормированы так, что макс $S(l) = S(l_0) = {}^1\!/_2$, а

$$\langle N(l)\rangle = 0, \quad \langle N^2(l_0)\rangle = 1, \quad \langle N(l_1)N(l_2)\rangle = \varepsilon^2 S(l_1, l_2).$$

Значение оценки γ_0 при $\varepsilon \to 0$ определяется из решения уравнения

$$[S(l+\eta) - S(l-\eta]_{\gamma_0} = 0, \tag{6}$$

причем при $\eta \to 0$ $\gamma_0 = l_0$. Полагая, что отношение сигнал/шум для принятого сигнала велико, так что $\varepsilon \ll 1$, величина η меньше длительности сигнальной функции $S(l)$ и решение уравнения (5) ищется при значениях l, лежащих вблизи абсолютного максимума $M(l)$, приближенное решение уравнения (5) можем представить в виде ряда по степеням ε

$$\gamma_m = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \ldots. \tag{7}$$

Разложим функцию в левой части уравнения (5) в ряд Тейлора в окрестности точки γ_0 и подставим значение γ_m из (7). Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения для определения γ_1, γ_2 и т. д. Первое приближение определяется величинами γ_0 и γ_1, где

$$\gamma_1 = -\left\{[N(l+\eta) - N(l-\eta)] \Big/ \frac{d}{dl}[S(l+\eta) - S(l-\eta)]\right\}_{\gamma_0}. \tag{8}$$

Найдем смещение $\langle\Delta l\rangle = \langle\gamma_m - l_0\rangle$ и дисперсию $\sigma^2(l_0) = \langle\gamma_m{}^2\rangle - \langle\gamma_m\rangle^2$ оценки параметра l. Поскольку $\langle N(l)\rangle = 0$, то в первом приближении

$$\langle\Delta l\rangle = \gamma_0 - l_0, \tag{9}$$

$$\sigma^2(l_0) = \varepsilon^2\langle\gamma_1{}^2\rangle. \tag{10}$$

Подставляя (8) в (10), выполняя усреднение и возвращаясь к ненормированным функциям $S(l_1, l_2)$ и $Q(l)$, получаем

$$\sigma^2(l_0) = \frac{Q(\gamma_0+\eta) + Q(\gamma_0-\eta) - 2S(\gamma_0+\eta, \gamma_0-\eta)}{\left\{\frac{d}{dl}\left[S(l_0, l+\eta) - S(l_0, l-\eta) - \frac{1}{2}Q(l+\eta) + \frac{1}{2}Q(l-\eta)\right]\right\}^2_{\gamma_0}} \tag{11}$$

Если оцениваемый параметр является неэнергетическим, т. е. отношение сигнал/шум не зависит от параметра l, то [4] $S(l_1, l_2) = S_0(\Delta)$, $\Delta = l_1 - l_2$. В этом случае оценка γ_m несмещенная ($\langle\Delta l\rangle = 0$), а дисперсия ее равна

$$\sigma^2(l_0) = [S_0(0) - S_0(2\eta)] / 2[S_0{}'(\eta)]^2. \tag{12}$$

При $\eta \to 0$ (12) переходит в соответствующее выражение для дисперсии оценки при простой функции потерь [2, 3].

Пусть теперь полезный сигнал $s(t, l_0)$ является узкополосным радиосигналом вида $s(t, l_0, \varphi_0) = F(t, l_0)\cos[\omega_0 t + \Psi(t, l_0) - \varphi_0]$, где φ_0 — случайная начальная фаза, распределенная равномерно на интервале $[0; 2\pi]$. Тогда логарифм функционала отношения правдоподобия при достаточно большом отношении сигнал / шум можно приближенно записать как [2]

$$M(l) \simeq \varepsilon^{-2}[S(l) + \varepsilon N(l)],$$

$$S(l) = \varepsilon^2\left[G(l, l_0) - \frac{1}{2}Q(l)\right], \qquad G(l_1, l_2) = [G_c{}^2(l_1, l_2) + G_s{}^2(l_1, l_2)]^{1/2},$$

$$\left.\begin{matrix} G_c(l_1, l_2) \\ G_s(l_1, l_2) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^T F(t, l_1)V(t, l_2)\left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\}[\Psi(t, l_1) - \Psi(t, l_2)]\,dt, \tag{13}$$

$$N(l) = \varepsilon\int_0^T n(t)V(t, l)\cos[\omega_0 t + \Psi(t, l) - \Phi(l, l_0) - \varphi_0]\,dt,$$

$$Q(l) = \frac{1}{2}\int_0^T F(t, l)V(t, l)\,dt, \qquad \operatorname{tg}\Phi(l_1, l_2) = G_s(l_1, l_2)/G_c(l_1, l_2),$$

$V(t, l)$ — амплитудная модуляция опорного сигнала $v(t, l, \varphi)$, который определяется из уравнения (4) и применительно к рассматриваемому узкополосному радиосигналу равен $v(t, l, \varphi) = V(t, l)\cos[\omega_0 t + \Psi(t, l) - \varphi]$. При этом среднее значение и функция корреляции шумовой составляющей $N(l)$ равны $\langle N(l)\rangle = 0$,

$$\langle N(l_1)N(l_2)\rangle = \varepsilon^2 G(l_1, l_2)\cos[\Phi(l_1, l_2) + \Phi(l_2, l_0) - \Phi(l_1, l_0)]. \tag{14}$$

Решение уравнения (3) для оценки γ_m в первом приближении определяется двумя первыми членами разложения (7), где, как и ранее γ_0 находится из (6), а γ_1 — из (8) при подстановке в эти формулы $S(l)$ и $N(l)$ из (13). Используя соотношения (14), получаем, что смещение оценки определяется формулой (9), а дисперсия равна

$$\sigma^2(l_0)=\frac{\begin{gathered}Q(\gamma_0+\eta)+Q(\gamma_0-\eta)-2G(\gamma_0+\eta,\gamma_0-\eta)\times\\ \times\cos[\Phi(\gamma_0+\eta,\gamma_0-\eta)+\Phi(\gamma_0-\eta,l_0)-\Phi(\gamma_0+\eta,l_0)]\end{gathered}}{\left\{\frac{d}{dl}\left[G(l_0,l+\eta)-G(l_0,l-\eta)-\frac{1}{2}Q(l+\eta)+\frac{1}{2}Q(l-\eta)\right]\right\}^2_{\gamma_0}}.$$

При оценке неэнергетического параметра функция $G(l_1, l_2)$ является четной, а $\Phi(l_1, l_2)$ — нечетной функцией разности своих аргументов [2]. В этом случае оценка оказывается несмещенной $\langle\Delta l\rangle=0$, а дисперсия определяется выражением

$$\sigma^2(l_0)=\frac{G_0(0)-G_0(2\eta)\cos[\Phi_0(2\eta)-2\Phi_0(\eta)]}{2[G_0'(\eta)]^2}, \tag{15}$$

где $G_0(\Delta)=G(l_1, l_2)$, $\Phi_0(\Delta)=\Phi(l_1, l_2)$. При $\eta\to 0$ (15) переходит в соответствующее выражение для дисперсии оценки при простой функции потерь [2].

Для иллюстрации основных соотношений рассмотрим несколько конкретных примеров.

Вычислим характеристики раздельных оценок длительности τ_0 и временно́го положения θ_0 колокольного импульса $s(t, \tau_0, \theta_0)=a_0\exp[-(t-\theta_0)^2/\tau_0^2]$, $-T/2\leqslant t\leqslant T/2$, при приеме на фоне белого шума с односторонней спектральной плот-

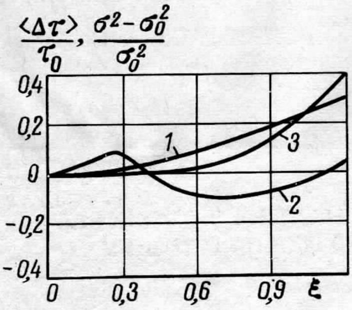

Рис. 1

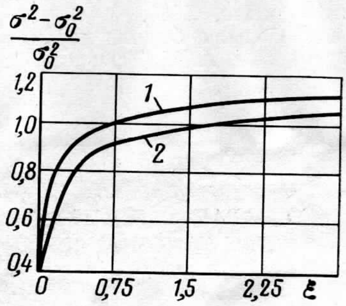

Рис. 2

ностью N_0, полагая, что сигнал полностью расположен внутри интервала наблюдения. Введем нормированные параметры $\xi=\eta/\tau_0$, $k=\gamma_0/\tau_0$. Тогда выражения для смещений оценок τ и θ согласно (9) примут вид $\langle\Delta\tau\rangle=\tau_0(k-1)$, $\langle\Delta\theta\rangle=0$, где k с учетом (6) определяется из уравнения $(k+\xi)/\sqrt{1+(k+\xi)^2}=(k-\xi)/\sqrt{1+(k-\xi)^2}+\xi/\sqrt{2}$. Выражения для дисперсий оценок τ и θ получаем из (11) и (12) соответственно

$$\sigma^2(\tau_0)=\frac{\tau_0^2}{Q_0}\frac{k-(k^2-\xi^2)/\sqrt{k^2+\xi^2}}{\{[1+(k+\xi)^2]^{-3/2}-[1+(k-\xi)^2]^{-3/2}\}^2},\quad \sigma^2(\theta_0)=\frac{\tau_0^2}{Q_0}\frac{\operatorname{sh}\xi^2}{\xi^2},$$

где

$$Q_0=\frac{a_0^2\tau_0}{N_0}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,-$$

отношение сигнал/шум. При использовании простой функции потерь характеристики оценок в том же первом приближении равны $\langle\Delta\tau\rangle=0$, $\sigma_0^2(\tau_0)=4\tau_0^2/3Q_0$, $\langle\Delta\theta\rangle=0$, $\sigma_0^2(\theta_0)=\tau_0^2/Q_0$. На рис. 1 приведены зависимость относительного смещения оценки длительности $\langle\Delta\tau\rangle/\tau_0$ от величины ξ (кривая *1*) и зависимости относительного увеличения дисперсий оценок длительности (кривая *2*) и временно́го положения (кривая *3*) по сравнению с дисперсиями оценок при простой функции потерь, которые в рассматриваемом случае совпадают с оценками максимального правдоподобия.

Вычислим характеристики оценки смещения частоты ν_0 прямоугольного радиоимпульса

$$s(t,\nu_0,\varphi_0)=\begin{cases}a_0\cos[(\omega_0+\nu_0)t-\varphi_0], & 0\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & t<0,\ t>T\end{cases} \tag{16}$$

при приеме на фоне нормального белого шума. Если начальная фаза сигнала (16) известна, то дисперсия оценки параметра ν_0 согласно (12) равна

$$\sigma_1^2(\nu_0) = \xi^2 \left[1 - \frac{\sin 2\xi}{2\xi}\right] \Big/ Q_0 T^2 \left[\cos\xi - \frac{1}{\xi}\sin\xi\right]^2.$$

При случайной, равномерно распределенной в интервале [0; 2π] начальной фазе дисперсия оценки ν_0 определяется из (15)

$$\sigma_2^2(\nu_0) = \xi^2 \left[1 - \frac{\sin\xi}{\xi}\right] \Big/ Q_0 T^2 \left[\cos\frac{\xi}{2} - \frac{2}{\xi}\sin\frac{\xi}{2}\right]^2,$$

где $Q_0 = a_0^2 T / N_0$, $\xi = \eta T$. Как при известной фазе сигнала (16), так и при случайной начальной фазе оценка параметра ν_0 несмещенная.

На рис. 2 приведены зависимости относительного увеличения дисперсий σ_1^2 (кривая *1*) и σ_2^2 (кривая *2*) по сравнению с дисперсиями оценок ν_0 при простой функции потерь, которые равны [2] $\sigma_{01}^2 = 3 / Q_0 T^2$ для сигнала с известной начальной фазой и $\sigma_{02}^2 = 12 / Q_0 T^2$ для сигнала со случайной начальной фазой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, **2**, Изд. Советское радио, 1962.
2. Е. И. Куликов, Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, Изд. Советское радио, 1969.
3. С. Е. Фалькович, Оценка параметров сигнала, Изд. Советское радио, 1970.
4. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1968, **13**, 12, 2254.

Поступило в редакцию
3 XI 1971