(26) (26)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1972

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ
Том VIII 1972 Вып. 4

УДК 621.391.1:519.25

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ БАЙЕСОВСКИХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО ШУМА

А. П. Трифонов

Показано, что для широких классов априорных распределений и функций потерь байесовская оценка сходится к условной оценке максимального правдоподобия при неограниченном увеличении отношения сигнал/шум. Приведен приближенный расчет точности аппроксимации байесовской оценки ее предельным значением при больших, но не бесконечных, отношениях сигнал/шум.

§ 1. Введение

При использовании методов теории решений приходится сталкиваться с рядом трудностей, среди которых заметное место занимают проблема априорных данных и произвольность выбора потерь [1, 2]. Одним из путей преодоления этих трудностей является построение байесовских операторов, инвариантных по отношению к априорным данным и выбору функций потерь. Для построения таких операторов могут быть использованы результаты изучения асимптотических свойств байесовских оценок [1–3] и др.

Результаты исследования предельной формы байесовских оценок (одномерных и многомерных) параметров, которые входят в принимаемые данные линейно, приведены в [1–3] и др. Однако имеется широкий класс задач, в которых оцениваемый параметр входит в принимаемые данные нелинейно, что затрудняет изучение асимптотического поведения байесовских оценок. Тем не менее если сигнал после обработки сильный, что обычно имеет место в практических задачах, то можно найти достаточные условия асимптотической инвариантности байесовских оценок параметра, являющегося аргументом нелинейной, в общем случае трансцендентной функции.

Представим реализацию принимаемых данных $x(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ в виде $x(t) = n(t) + s(t, l_0)$, где $n(t)$ — реализация нормального случайного процесса с нулевым средним значением $M[n(t)] = 0$ и функцией корреляции $K(t_1, t_2) = M[n(t_1)n(t_2)]$; $s(t, l_0)$ — сигнал, содержащий неизвестный параметр l_0, распределенный с плотностью вероятности $W(l)$ на интервале $[-1; 1]$.

Ограничиваясь рассмотрением нерандомизированных правил выбора решения, выражение для среднего риска можем записать как

$$R = M\left[\int_{-1}^{1} C(\gamma, l) W_{ps}(l)\, dl\right]. \tag{1.1}$$

Здесь усреднение выполняется по всевозможным реализациям принятых данных $x(t)$, γ — искомая оценка, $C(\gamma, l)$ — функция потерь, $W_{ps}(l)$ — апостериорная плотность вероятности параметра l, равная [4, 5]

$$W_{ps}(l) = \frac{W(l)\exp[z^2\lambda(l)]}{\int\limits_{-1}^{1} W(l)\exp[z^2\lambda(l)]dl}, \tag{1.2}$$

$\lambda(l) = z^{-2}\int\limits_0^T [x(t) - {}^1/{}_2 s(t, l)]v(t, l)dt$ — нормированный логарифм функционала отношения правдоподобия, $z^2 \equiv z^2(l_0) = \int\limits_0^T s(t, l_0)v(t, l_0)dt$ — отношение сигнал/шум для принятого сигнала, $v(t, l)$ — решение интегрального уравнения $\int\limits_0^T K(t, \tau)v(\tau, l)d\tau = s(t, l)$, $t \in [0; T]$. Функция $\lambda(l)$ представляет собой реализацию нестационарного нормального случайного процесса, для которого $M[\lambda(l)] \leqslant {}^1/{}_2$, $a_1/z^2 \leqslant M[\lambda(l) - M[\lambda(l)]]^2 \leqslant a_2/z^2$. Здесь усреднение выполняется по всевозможным реализациям шума $n(t)$ при фиксированном l_0, $a_1 = \min z^2(l)/z^2$, $a_2 = \max z^2(l)/z^2$, $l \in [-1; 1]$. При этом если $z^2(l)$ непрерывная функция, то a_1 и a_2 ограничены при любых z.

Байесовская оценка γ_m находится из условия минимума среднего риска R (1.1). Величина R будет минимально возможной, если при каждой принятой реализации $x(t)$ оценка γ_m выбирается так, чтобы обеспечить минимум функции

$$r(\gamma) = \int\limits_{-1}^{1} C(\gamma, l)W_{ps}(l)dl. \tag{1.3}$$

§ 2. Непрерывные функции потерь

Обозначив через l_m, $l_m \in [-1; 1]$ условную оценку максимального правдоподобия параметра l_0, докажем следующее утверждение. Пусть

I. Плотность вероятности $W(l)$ непрерывна и $W(l_m) > 0$.

II. Реализация нормального случайного процесса $\lambda(l)$ дважды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1, $l \in [-1; 1]$.

III. Выпуклая неотрицательная функция потерь $C(\gamma, l)$ непрерывна по l, ограничена по γ и достигает минимума при $\gamma = l$, γ, $l \in [-1; 1]$. Тогда если при некотором l_0, $z \to \infty$, то с вероятностью 1

$$\gamma_m \to l_m. \tag{2.1}$$

Условная оценка максимального правдоподобия l_m представляет собой положение абсолютного максимума реализации $\lambda(l)$ при $l \in [-1; 1]$. Поэтому, кроме может быть значений $l_m = \pm 1$, всюду $\lambda'(l_m) = 0$ и для любого $h \in [-1 - l_m; 1 - l_m]$ справедливо неравенство $\lambda(l_m + h) - \lambda(l_m) \leqslant 0$. Из этого неравенства, используя формулу Тейлора, получаем $\lambda''(l_m + \theta h) \leqslant \leqslant 0$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Переходя к пределу при $h \to 0$, в силу непрерывности $\lambda''(l)$ с вероятностью 1 имеем, что $\lambda''(l_m) \leqslant 0$.

Реализация нормального случайного процесса $\lambda'(l)$ непрерывно дифференцируема с вероятностью 1. Так как нормальная одномерная плотность вероятности ограничена при всех значениях аргумента, то на основании теоремы Булинской [6] можем утверждать, что вероятность одновременного выполнения равенств $\lambda'(l) = 0$ и $\lambda''(l) = 0$ равна нулю. Следовательно, при $\lambda'(l_m) = 0$, $\lambda''(l_m) < 0$ с вероятностью 1.

Введем в рассмотрение функцию $\Delta(l_1, l_2) = \lambda(l_1) - \lambda(l_2)$. Подставляя (1.2) в (1.3), получим

$$r(\gamma) = \frac{\int\limits_{-1}^{1} C(\gamma, l) W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)] dl}{\int\limits_{-1} W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)] dl}. \qquad (2.2)$$

Поскольку $\Delta(l_m, l)$ непрерывна по l с вероятностью 1, интегралы в (2.2) существуют с той же вероятностью как обычные интегралы Римана от реализации случайного процесса [6]. При этом $\Delta(l_m, l) > 0$, если $l_m \neq l$, $\Delta(l_m, l_m) = 0$ и функция $\Delta(l_m, l)$ дважды непрерывно дифференцируема по l с вероятностью 1. К тому же (кроме может быть точек $l_m = \pm 1$)

$$\left[\frac{d\Delta(l_m, l)}{dl}\right]_{l_m} = -\lambda'(l_m) = 0, \qquad \left[\frac{d^2\Delta(l_m, l)}{dl^2}\right]_{l_m} = -\lambda''(l_m) > 0,$$

а подынтегральные функции в (2.2) абсолютно интегрируемы при любых z и l_m. Действительно, $\int\limits_{-1}^{1} |W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)]| dl \leqslant 1$,

$$\int\limits_{-1}^{1} |C(\gamma, l) W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)]| dl \leqslant \int\limits_{-1}^{1} C(\gamma, l) W(l) dl < \infty.$$

Таким образом, для интегралов в числителе и знаменателе (2.2) с вероятностью 1 выполняются все условия применимости асимптотической формулы Лапласа [7, 8]. Следовательно, когда для всех $l_m \in [-1; 1]$, $\lambda'(l_m) = 0$, то при $z \to \infty$ с вероятностью 1 имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} C(\gamma, l) W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)] dlz \to C(\gamma, l_m) W(l_m) [-2\pi/\lambda''(l_m)]^{1/2} \xi,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)] dlz \to W(l_m) [-2\pi/\lambda''(l_m)]^{1/2} \xi,$$

где $\xi = 1/2$ при $l_m = \pm 1$, и $\xi = 1$ при $-1 < l_m < 1$. Если $l_m = 1$ и $\lambda'(l_m) \neq 0$, то очевидно $\lambda'(l_m) > 0$, а $[d\Delta(l_m, l)/dl]_{l_m} < 0$ и применение асимптотической формулы Лапласа для $z \to \infty$ приводит к выражениям

$$\int\limits_{-1}^{1} C(\gamma, l) W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)] dlz^2 \to C(\gamma, l_m) W(l_m)/\lambda'(l_m),$$

$$\int\limits_{-1} W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)] dlz^2 \to W(l_m)/\lambda'(l_m).$$

Аналогично при $l_m = -1$ и $\lambda'(l_m) \neq 0$, $\lambda'(l_m) < 0$ и, когда $z \to \infty$

$$\int\limits_{-1}^{1} C(\gamma, l) W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)] dlz^2 \to -C(\gamma, l_m) W(l_m)/\lambda'(l_m),$$

$$\int\limits_{-1}^{1} W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)] dlz^2 \to -W(l_m)/\lambda'(l_m).$$

Так как $W(l_m) \neq 0$, то при $z \to \infty$ с вероятностью 1

$$r(\gamma) \to C(\gamma, l_m). \tag{2.3}$$

При всех z справедливо неравенство $0 \leqslant r(\gamma) \leqslant C_m < \infty$, где $C_m = \max C(\gamma, l)$; $\gamma, l \in [-1, 1]$. Поэтому из выражения (2.3) следует [9], что $R \to M[C(\gamma, l_m)]$, когда $z \to \infty$.

Функция потерь $C(\gamma, l)$ достигает минимума при $\gamma = l$, в силу чего в качестве байесовской оценки γ_m при $z \to \infty$ надо для каждой принятой реализации $x(t)$ выбирать условную оценку максимального правдоподобия l_m. Значит, если $z \to \infty$, то величины γ_m и l_m совпадают при каждой реализации $x(t)$, что доказывает справедливость соотношения (2.1).

Предельное выражение (2.1) получено в предположении, что функция потерь $C(\gamma, l)$ непрерывна по l (хотя может быть недифференцируема). Случай разрывных функций потерь требует специального рассмотрения. Из числа функций потерь, имеющих разрывы непрерывности, наиболее часто используются простая и прямоугольная функции потерь [1]. Применение простой функции потерь приводит к безусловной оценке максимального правдоподобия, которая для непрерывных априорных распределений сходится к условной оценке максимального правдоподобия при $z \to \infty$. Следовательно, для простой функции потерь предельное соотношение (2.1) выполняется. Рассмотрим асимптотическое поведение байесовской оценки при прямоугольной функции потерь.

§ 3. Прямоугольная функция потерь

Покажем, что хотя соотношение (2.1) для прямоугольной функции потерь не выполняется, условная оценка максимального правдоподобия тем не менее является асимптотически байесовской, т. е. минимизирует средний риск при $z \to \infty$.

Прямоугольную функцию потерь можно записать в виде [1]

$$C(\gamma, l) = \begin{cases} C_0, & |\gamma - l| > \eta, \\ 0, & |\gamma - l| \leqslant \eta. \end{cases} \tag{3.1}$$

Будем считать, что $\eta < 1$, так как при $\eta \geqslant 1$ байесовской оценкой является любое значение γ_m, не зависящее от принимаемых данных и удовлетворяющее условию $1 - \eta \leqslant \gamma_m \leqslant \eta - 1$.

Подставляя (1.3) в (3.1), получаем, что средний риск минимален, если для каждой фиксированной реализации $x(t)$ байесовскую оценку γ_m выбирать из условия максимума функции

$$G(\gamma) = \begin{cases} \int\limits_{-1}^{\gamma+\eta} W_{ps}(l)\,dl, & -1 \leqslant \gamma \leqslant \eta - 1; \\ \int\limits_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} W_{ps}(l)\,dl, & \eta - 1 < \gamma < 1 - \eta; \\ \int\limits_{\gamma-\eta}^{1} W_{ps}(l)\,dl, & 1 - \eta \leqslant \gamma \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Обозначим l_η — положение абсолютного максимума реализации $\lambda(l)$ на интервале $(\gamma - \eta; \gamma + \eta)$ при $\eta - 1 < \gamma < 1 - \eta$. Если $-1 \leqslant \gamma \leqslant \eta - 1$, то под l_η будем понимать положение абсолютного максимума $\lambda(l)$ на интервале $[-1;\ \gamma+\eta]$, а если $1 \geqslant \gamma \geqslant 1-\eta$, то l_η — положение абсолютного максимума реализации $\lambda(l)$ на интервале $[\gamma-\eta;\ 1]$. Используя функцию $\Delta(l_1, l_2)$, перепишем (3.2) как

$$G(\gamma) = \frac{\exp[-z^2\Delta(l_m, l_\eta)]F(\gamma)}{\int\limits_{-1} W(l)\exp[-z^2\Delta(l_m, l)]\,dl}. \qquad (3.3)$$

$$F(\gamma) = \begin{cases} \int\limits_{-1}^{\gamma+\eta} W(l)\exp[-z^2\Delta(l_\eta, l)]\,dl, & -1 \leqslant \gamma \leqslant \eta-1, \\ \int\limits_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} W(l)\exp[-z^2\Delta(l_\eta, l)]\,dl, & \eta-1 < \gamma < 1-\eta; \\ \int\limits_{\gamma-\eta}^{1} W(l)\exp[-z^2\Delta(l_\eta, l)]\,dl, & 1-\eta \leqslant \gamma \leqslant 1. \end{cases}$$

Как и в § 2, применим для оценки интегралов в числителе и знаменателе (3.3) асимптотическую формулу Лапласа [7, 8]. Положим вначале, что $\lambda'(l_\eta) = 0$ при $l_\eta = \gamma \pm \eta$ и $\lambda'(l_m) = 0$ при $l_m = \pm 1$, получаем (при $z \to \infty$)

$$G(\gamma) \to \exp[-z^2\Delta(l_m, l_\eta)]\frac{W(l_\eta)}{W(l_m)}\left[\frac{\lambda''(l_m)}{\lambda''(l_\eta)}\right]^{1/2}\xi. \qquad (3.4)$$

Величина ξ в (3.4) определяется следующим образом: если $-1 \leqslant l_m \leqslant \eta-1$, то $\xi = 1/2$ при $\gamma = l_m + \eta$ и $\xi = 1$ при $-1 \leqslant \gamma < l_m + \eta$; если $\eta - 1 < l_m < 1-\eta$, то $\xi = 1$ при $l_m - \eta < \gamma < l_m + \eta$ и, если $1-\eta \leqslant l_m \leqslant 1$, то $\xi = 1/2$ при $\gamma = l_m - \eta$, и $\xi = 1$ при $l_m - \eta < \gamma \leqslant 1$. Если же $l_\eta = \gamma \pm \eta$, но $\gamma \pm \eta \neq \pm 1$, то при $z \to \infty$ имеем $G(\gamma) \to 0$, когда $\lambda'(l_\eta) \neq 0$. В случае, когда $l_m = 1$ и $\lambda'(l_m) \neq 0$, $G(\gamma) \to 1$ при $1-\eta \leqslant \gamma \leqslant 1$ и $G(\gamma) \to 0$ при $-1 \leqslant \gamma < 1-\eta$. Наконец, при $l_m = -1$ и $\lambda'(l_m) \neq 0$, $G(\gamma) \to 1$ при $-1 \leqslant \gamma \leqslant \eta - 1$ и $G(\gamma) \to 0$, когда $\eta - 1 < \gamma \leqslant 1$.

Следовательно, предельное значение байесовской оценки γ_m при $z \to \infty$ и использовании прямоугольной функции потерь определяется следующим образом. Если $-1 \leqslant l_m \leqslant \eta - 1$, то $-1 \leqslant \gamma_m \leqslant l_m + \eta$, если $\eta - 1 < l_m < 1 - \eta$, то $l_m - \eta < \gamma_m < l_m + \eta$, и если $1 - \eta \leqslant l_m \leqslant 1$, то $l_m - \eta \leqslant \gamma_m \leqslant 1$. Отсюда получаем, что при любом $0 \leqslant \eta < 1$ значение $\gamma_m = l_m$ обеспечивает максимальное значение функции $G(\gamma)$ при $z \to \infty$. В этом нетрудно убедиться если учесть, что при всех $l_m \neq l_\eta$ функция $\Delta(l_m, l_\eta) > 0$ и, следовательно, согласно (3.4), предельное значение $G(\gamma)$ равно нулю.

Таким образом, условная оценка максимального правдоподобия является асимптотически байесовской для функций потерь, удовлетворяющих требованию III (в том числе для несимметричных функций потерь), а также для простой и прямоугольной функций потерь.

Условие II требует определенной регулярности реализации нестационарного нормального случайного процесса $\lambda(l)$, среднее значение и функция корреляции которого равны соответственно

$$M[\lambda(l)] = S(l_0, l) - S(l, l)/2,\ M[\lambda(l_1) - M[\lambda(l_1)]][\lambda(l_2) - M[\lambda(l_2)]] = S(l_1, l_2)z^{-2}, \qquad (3.5)$$

где $S(l_1, l_2) = z^{-2}\int\limits_0^T s(t, l_1)v(t, l_2)\,dt = z^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T s(t_1, l_1)s(t_2, l_2)\theta(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2.$

Функция $\theta(t_1, t_2)$ определяется из интегрального уравнения $\int\limits_0^T K(t_1, \tau) \times$ $\times \theta(\tau, t_2) d\tau = \delta(t_1 - t_2)$.

Чтобы реализация $\lambda(l)$ была дважды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1, достаточно, чтобы среднее значение $M[\lambda(l)]$ было дважды непрерывно дифференцируемо по l при всех l_0, а четвертая смешанная производная функции корреляции $q(l_1, l_2) = \partial^4 S(l_1, l_2) / \partial l_1^2 \partial l_2^2$ удовлетворяла при малых h соотношению [6]

$$q(l+h,\ l+h) - 2q(l,\ l+h) + q(l, l) \leqslant c|\ln|h||^{-\alpha}, \tag{3.6}$$

где $c > 0$ и $\alpha > 3$ — некоторые постоянные. Очевидно, если существует $q(l_1, l_2)$, то среднее значение $M[\lambda(l)]$ (3.5) будет дважды непрерывно дифференцируемо по l при каждом фиксированном l_0. Соотношение (3.6) всегда выполняется, если существуют и непрерывны по l интегралы

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{\partial^k s(t_1, l)}{\partial l^k} \frac{\partial^i s(t_2, l)}{\partial l^i} \theta(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

при $i,\ k = 0, 1, \ldots, 5,\ i + k \leqslant 5$. Это условие несколько более строгое, чем (3.6).

Таким образом, чтобы реализация случайного нормального процесса $\lambda(l)$ была дважды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1, достаточно существования пяти непрерывных производных по l сигнала $s(t, l)$ при $t \in [0;\ T]$, $l \in [-1;\ 1]$. В некоторых случаях эти ограничения могут быть ослаблены. Например, если функция корреляции шума при малых τ удовлетворяет условию [6]

$$K(t+\tau,\ t+\tau) - 2K(t,\ t+\tau) + K(t,\ t) \leqslant c_1|\ln|\tau / T||^{-\alpha_1},$$

где $c_1 > 0$ и $\alpha_1 > 3$ — некоторые постоянные, то аналогично [10] можно показать, что для выполнения условия II достаточно существования двух непрерывных производных сигнала $s(t, l)$ по l.

Достаточные условия, при которых имеет место неограниченное увеличение отношения сигнал/шум ($z \to \infty$), зависят от характера оцениваемого параметра. Например, при оценке длительности сигнала, обеспечить условие $z \to \infty$ можно неограниченным увеличением амплитуды сигнала, а при оценке других параметров $z \to \infty$, если $K(t, t)$ ограничена и длительность сигнала $T \to \infty$ при постоянной мощности сигнала. Неограниченное увеличение отношения сигнал/шум будет иметь место также при соответствующем изменении характеристик шума. Например, когда функцию корреляции шума можно представить в виде $K(t_1,\ t_2) = \beta\rho(t_1,\ t_2)$, где $\rho(t, t)$ ограничена, то при $\beta \to 0$ всегда $z \to \infty$ для тех значений l_0, при которых $s(t, l_0) \not\equiv 0$, $t \in [0;\ T]$.

§ 4. Приближенный расчет точности аппроксимации байесовской оценки

Предельное соотношение (2.1) показывает, что в практических задачах при достаточно больших отношениях сигнал/шум байесовскую оценку γ_m можно аппроксимировать ее предельным значением — условной оценкой максимального правдоподобия l_m. Для подобного применения предельной формы байесовской оценки необходимо иметь возможность оценить точность аппроксимации при больших, но не бесконечных отношениях сигнал/шум. Чтобы найти величину отклонения γ_m от l_m, сделаем несколько дополнительных предположений. Положим, что априорная плотность вероятности $W(l)$, функция потерь $C(\gamma, l)$ и сигнал $s(t, l)$ обладают достаточным количеством непрерывных производных по l и γ. Кроме того, поскольку рассматриваемая априорная плотность вероятности является невырожденной, то при достаточно больших отношениях сигнал/шум, без внесения существенной погрешности, влиянием ограничения области значений l можно пренебречь [11]. Следовательно, все дальнейшие рассуждения справедливы для значений l_m, не слишком близких к ± 1.

Для дифференцируемой функции потерь байесовская оценка γ_m может быть найдена из уравнения

$$\left\{ \frac{d}{d\gamma} \int_{-1}^{1} C(\gamma, l) W(l) \exp[-z^2 \Delta(l_m, l)] dl \right\}_{\gamma_m} = 0. \tag{4.1}$$

Если $z \gg 1$, то, используя первые два члена асимптотического разложения интеграла в (4.1) по отрицательным степеням z [12], перепишем уравнение (4.1) как

$$\left\{ \frac{d}{d\gamma} [C(\gamma, l_m) + z^{-2} d(\gamma, l_m) + O(z^{-4})] \right\}_{\gamma_m} = 0, \tag{4.2}$$

где

$$d(\gamma, l_m) = \frac{-1}{2W(l_m)\lambda''(l_m)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial l^2} W(l) C(\gamma, l) - \right.$$
$$- \frac{\lambda'''(l)}{\lambda''(l)} \frac{\partial}{\partial l} W(l) C(\gamma, l) + \frac{1}{4} \left[\frac{5}{3} \left\{ \frac{\lambda'''(l)}{\lambda''(l)} \right\}^2 - \frac{\lambda^{\mathrm{IV}}(l)}{\lambda''(l)} \right] \times$$
$$\left. \times W(l) C(\gamma, l) \right\}_{l=l_m}.$$

Поскольку при $z \to \infty$, согласно (2.1), решение уравнения (4.2) равно l_m, то при $z \gg 1$ можем искать приближенное решение уравнения (4.2) в виде

$$\gamma_m = l_m + z^{-2}\gamma_1 + z^{-4}\gamma_2 + \ldots \tag{4.3}$$

Разлагая $C(\gamma, l_m)$ и $d(\gamma, l_m)$ в ряд Тейлора по γ в окрестности точки $\gamma = l_m$, подставляя в (4.2) значение γ_m из (4.3) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем из (4.2) уравнение для определения γ_1

$$\left[\frac{\partial^2 C(\gamma, l)}{\partial \gamma^2} \gamma_1 + \frac{\partial d(\gamma, l)}{\partial \gamma} \right]_{\gamma=l=l_m} = 0. \tag{4.4}$$

Аналогично могут быть записаны уравнения для определения γ_2, γ_3 и т. д.

Решая (4.4) относительно γ_1 и полагая $C(l, l) = 0$, что обычно можно сделать соответствующим подбором постоянных, находим

$$\gamma_m - l_m = \frac{z^{-2}}{2\lambda''(l_m)} \left\{ \left[\frac{\partial^3 C(\gamma, l)}{\partial \gamma \partial l^2} - \frac{\lambda'''(l)}{\lambda''(l)} \cdot \frac{\partial^2 C(\gamma, l)}{\partial \gamma \partial l} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{2W'(l)}{W(l)} \cdot \frac{\partial^2 C(\gamma, l)}{\partial \gamma \partial l} \right] \left[\frac{\partial^2 C(\gamma, l)}{\partial \gamma^2} \right]^{-1} \right\}_{\gamma=l=l_m} + O(z^{-4}). \tag{4.5}$$

Если функция потерь $C(\gamma, l)$ — симметричная функция ошибки, т. е. $C(\gamma, l) = C(\gamma - l) = C(l - \gamma)$, то (4.5) несколько упрощается и принимает вид

$$\gamma_m - l_m = -\frac{z^{-2}}{\lambda''(l_m)}\left[\frac{W'(l_m)}{W(l_m)} - \frac{1}{2}\frac{\lambda'''(l_m)}{\lambda''(l_m)}\right] + O(z^{-4}). \tag{4.6}$$

Значит, в рассматриваемом приближении для симметричных дифференцируемых функций потерь разность $\gamma_m - l_m$ не зависит от конкретного вида функции потерь.

Чтобы оценить точность аппроксимации байесовской оценки γ_m ее предельным значением l_m, необходимо вычислять (4.5) или (4.6) для каждой принятой реализации $x(t)$, что представляет довольно сложную задачу при технической реализации приемного устройства. Поэтому может оказаться удобным использование среднего квадрата разности (4.6)

$$\varepsilon^2 = M[\gamma_m - l_m]^2, \tag{4.7}$$

который можно рассматривать как рассеяние байесовской оценки относительно оценки максимального правдоподобия. При этом точность аппроксимации байесовской оценки ее предельной формой можно считать удовлетворительной, если погрешность за счет аппроксимации значительно меньше погрешности самой оценки, т. е. $\varepsilon^2 \ll M[\gamma_m - l_0]^2$ или $\varepsilon^2 \ll M[l_m - l_0]^2$.

Величину (4.7) можно достаточно просто получить в явном виде, если отношение сигнал/шум настолько велико, что вероятность аномалии при определении оценки максимального правдоподобия пренебрежимо мала [11]. Тогда для условной оценки максимального правдоподобия справедливо приближенное представление [5]

$$l_m = l_0 + z^{-1}N'(l_0)\,/\,S_2 + O(z^{-2}), \tag{4.8}$$

где $S_2 = [\partial^2 S(l_1, l_2)/\partial l_1\,\partial l_2]_{l_0}$, $N(l) = z^{-1}\int\limits_0^T n(t)v(t,l)\,dt$.

Подставляя (4.8) в (4.6), а (4.6) в (4.7) и разлагая (4.7) в ряд по отрицательным степеням z, можем записать

$$\varepsilon^2 = M\Bigg[\frac{z^{-2}}{S_2}\Bigg\{\frac{W'(l)}{W(l)} + \frac{1}{2}\frac{S_3}{S_2} + \frac{z^{-1}}{S_2}\Bigg[\frac{W''(l)N'(l)}{W(l)} + \frac{W'(l)N'(l)S_3}{W(l)S_2} + \frac{W'(l)N''(l)}{W(l)} - \frac{W'^2(l)N'(l)}{W^2(l)} + \frac{S_4N'(l)}{2S_2} + \frac{N'''(l)}{2} + \frac{S_3^2N'(l)}{S_2^2} + \frac{S_3N''(l)}{S_2}\Bigg] + O(z^{-2})\Bigg\}\Bigg]^2_{l_0}, \tag{4.9}$$

где $S_3 = -3\left[\dfrac{\partial^3 S(l_1,l_2)}{\partial l_1^2\partial l_2}\right]_{l_0}$, $S_4 = -\left[4\dfrac{\partial^4 S(l_1,l_2)}{\partial l_1^3\partial l_2} + 3\dfrac{\partial^4 S(l_1,l_2)}{\partial l_1^2\partial l_2^2}\right]_{l_0}$.

Выполняя в (4.9) усреднение по реализациям шума $n(t)$ (при фиксированном l_0), получим

$$\varepsilon^2(l_0) = z^{-4}\left\{S_2^{-1}\left[\frac{W'(l)}{W(l)} - \frac{3}{2}S_2^{-1}\frac{\partial^3 S(l_1,l_2)}{\partial l_1^2\partial l_2}\right]\right\}^2_{l_0} + O(z^{-6}) \tag{4.10}$$

или

$$\varepsilon^2(l_0) = \left\{\left[\frac{W'(l)}{W(l)} - \frac{3}{2}\,\frac{\dfrac{\partial^3 S_0(l_1,\ l_2)}{\partial l_1^2\partial l_2}}{\dfrac{\partial^2 S_0(l_1,\ l_2)}{\partial l_1\partial l_2}}\right]\Bigg/\frac{\partial^2 S_0(l_1,\ l_2)}{\partial l_1\partial l_2}\right\}^2_{l_0} + O(z^{-6}). \tag{4.11}$$

Здесь $S_0(l_1, l_2) = \int\limits_0^T s(t, l_1) v(t, l_2) dt$ — ненормированная функция, значение которой при $l_1 = l_2 = l_0$ равно z^2.

Выражения (4.10) и (4.11) позволяют приближенно оценить возможность использования предельного соотношения (2.1) для определенных значений l_0 при конечных отношениях сигнал/шум. Усредняя $\varepsilon^2(l_0)$ по всевозможным значениям l_0, получаем (4.7).

Если помехой будет стационарный нормальный шум, то можно выделить в отдельный класс неэнергетические параметры, т. е. параметры от значения которых не зависит величина отношения сигнал/шум (временное положение сигнала, фаза, производные фазы). При оценке неэнергетического параметра функция $S_0(l_1, l_2)$ есть четная функция разности своих аргументов [13], так что формулы (4.10) и (4.11) упрощаются и принимают вид

$$\varepsilon^2(l_0) = \left[\frac{W'(l_0)}{W(l_0)} \right]^2 \sigma_0^4 + O(z^{-6}), \tag{4.12}$$

где $\sigma_0^2 = [\partial^2 S_0(l_1, l_2) / \partial l_1 \partial l_2]_{l_0}^{-1}$ дисперсия эффективной оценки параметра l_0 [4]. Из формулы (4.12) следует, что при оценке неэнергетического параметра и равномерном априорном распределении средний квадрат погрешности аппроксимации байесовской оценки условной оценкой максимального правдоподобия имеет порядок малости z^{-6}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миддлтон Д. Очерки теории связи. М., «Сов. радио», 1966.
2. Левин Б. Р., Шинаков Ю. С. Предельная форма байесовской оценки коэффициента регрессии в присутствии нестационарного шума. Проблемы передачи информации, 1967, 3, *1*, 27—34.
3. Левин Б. Р., Шинаков Ю. С. Некоторые асимптотические свойства байесовской оценки коэффициента регрессии в присутствии нестационарного шума. Проблемы передачи информации, 1967, 3, *3*, 18—22.
4. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, 2. М., «Сов. радио», 1962.
5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, 2. М., «Сов. радио», 1968.
6. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.
7. Hsu L. C. On the Asymptotic Evaluation of a Class of Multiple Integrals Involving a Parameter, Amer. J. Mathem., 1951, *73*, 625—634.
8. Копсон Э. Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
9. Лоэв М. Теория вероятностей. М., Изд. иностр. лит., 1962.
10. Трифонов А. П. Асимптотические характеристики оптимального обнаружения квазидетерминированного сигнала на фоне стационарной гауссовой помехи. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, *4*, 180—183.
11. Возенкрафт Дж. Джекобс И. Теоретические основы техники связи. М., «Мир», 1969.
12. Брейн де Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М., Изд. иностр. лит., 1961.
13. Куликов Е. И., Трифонов А. П. О некоторых свойствах сигнала на выходе оптимального приемника. Радиотехника и электроника, 1968, 13, *12*, 2254—2257.

Поступила в редакцию
26 февраля 1971 г.
После переработки
17 января 1972 г.