(29)

(28)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1973

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
№ 1 1973

БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ ПРИ НЕУВЕРЕННОСТИ В ПРИСУТСТВИИ СИГНАЛА

А. П. ТРИФОНОВ

(*Воронеж*)

1. В ряде работ [1-3] и других рассмотрена задача совместного обнаружения сигнала и оценки его параметра. При этом показано, что структура оценивающего устройства не зависит от правила обнаружения. Для нахождения байесовских оценок в [1, 2] вводятся новые функции потерь, которые используются в отсутствие сигнала. С целью избежать введения новых функций потерь, рассмотрим возможности получения байесовских оценок (без выполнения операции обнаружения) параметра сигнала при априорной вероятности наличия сигнала $p < 1$ методами классической теории оценок. Под классической теорией, следуя [1], будем понимать байесовскую теорию, развитую для случая $p = 1$ [4, 5].

Положим, что принимаемая на интервале $[0; T]$ реализация $x(t)$ представляет собой комбинацию шума $n(t)$ и сигнала $\alpha s(t, l)$. Здесь l — неизвестный параметр сигнала, подлежащий оценке. α — неизвестный неоцениваемый безразмерный множитель, отражающий неуверенность в присутствии сигнала. Совместную априорную плотность вероятности параметров l и α запишем в виде $W(l, \alpha) = p\delta(\alpha - 1) \times W_{spr}(l) + q\delta(\alpha) W_{Npr}(l)$, $p + q = 1$, $W_{Npr}(l)$ и $W_{spr}(l)$ — априорные плотности вероятности оцениваемого параметра при отсутствии и наличии сигнала. Эти функции вполне определенны, когда известны условия формирования полезного сигнала.

Обозначив через γ искомую оценку, через $C(\gamma, l)$ — функцию потерь и ограничиваясь рассмотрением нерандомизированных правил выбора решения можем записать выражение для среднего риска:

$$R(\gamma) = \left\langle P_N \int C(\gamma, l) W_{Npr}(l)\, dl \right\rangle + \left\langle P_S \int C(\gamma, l) W_{ps}(l)\, dl \right\rangle, \tag{1.1}$$

где усреднение выполняется по реализациям принятых данных, P_N и P_S — апостериорные вероятности отсутствия и наличия сигнала, $W_{ps}(l)$ — апостериорная плотность вероятности оцениваемого параметра. Искомую байесовскую оценку γ_m находим минимизацией (1.1) по γ.

2. Рассмотрим основные свойства байесовской оценки γ_m при использовании квадратичной функции потерь. Подставляя $C(\gamma, l) = C_0(\gamma - l)^2$ в (1.1) и минимизируя полученное выражение по γ, находим

$$\gamma_m = P_N l_{Npr} + P_S l_{ps}, \tag{2.1}$$

где $l_{Npr} = \int l W_{Npr}(l)\, dl$ — априорное среднее оцениваемого параметра при отсутствии сигнала, $l_{ps} = \int l W_{ps}(l)\, dl$ — апостериорное среднее, т. е. байесовская оценка при квадратичной функции потерь и $p = 1$. Нетрудно показать, что оценка (2.1) несмещенная. Действительно, усредняя правую и левую часть (2.1) по реализациям принятых данных, получаем $\langle\gamma_m\rangle = q l_{Npr} + p l_{spr} = l_{pr}$, где $l_{spr} = \int l W_{spr}(l)\, dl$, а $l_{pr} = \iint l W(l, \alpha)\, dl\, d\alpha$. Сформулируем утверждение, связанное с формулой (2.1) и аналогичное доказанному в [2]. Именно, если имеется некоторая оценка γ_1 параметра l, несмещенная при $p = 1$, то при $p < 1$ несмещенной будет оценка γ_2, равная

$$\gamma_2 = P_N l_{Npr} + P_S \gamma_1. \tag{2.2}$$

Несмещенность оценки γ_1 означает, что при наличии сигнала

$$\langle\gamma_1\rangle = l_{spr}. \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.2) значения P_N и P_S и выполняя усреднение с учетом (2.3), можем записать $\langle\gamma_2\rangle = l_{pr}$. Рассмотренные свойства байесовской оценки при квадратичной функции потерь сохраняются как для энергетических, так и для неэнергетических параметров. В частности, при оценке энергетического параметра, выбрав априорное распределение таким же, как в [1] из (2.1), (2.2), получаем результаты [1, 2].

3. В теории оценок значительную роль играет простая функция потерь, которую можно рассматривать как предельный случай прямоугольной функции потерь [4]

$$C(\gamma, l) = C_0[1 - \Delta|(\gamma - l) / \eta|] \tag{3.1}$$

при неограниченном увеличении разрешающей способности приемной системы, т. е. при $\eta \to 0$. Здесь $\Delta|u| = 1$ при $|u| \leqslant 1$ и $\Delta|u| = 0$ при $|u| > 1$. Чтобы избежать использования различных форм записи простой функции потерь при оценке параметров с дискретным или непрерывным априорным распределением [4], будем использовать допредельное выражение (3.1), переходя к пределу при $\eta \to 0$ в окончательных выражениях. Подставляя (3.1) в (1.1), получаем, что при прямоугольной функции потерь байесовская оценка γ_m определяется из условия максимума выражения

$$q \int\limits_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} W_{Npr}(l)\, dl + p \int\limits_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} W_{spr}(l)\Lambda(l)\, dl. \tag{3.2}$$

Здесь $\Lambda(l)$ — функционал отношения правдоподобия. Положим, что априорные плотности вероятности $W_{spr}(l)$ и $W_{Npr}(l)$ непрерывны. Тогда, разлагая (3.2) в ряд Тейлора и отбрасывая члены, содержащие η в степени выше первой, находим, что при $\eta \to 0$ (т. е. при простой функции потерь) байесовская оценка может быть найдена по положению абсолютного максимума функции

$$\Lambda'(l) = qW_{Npr}(l) + pW_{spr}(l)\Lambda(l). \tag{3.3}$$

Если априорные плотности вероятности $W_{spr}(l)$ и $W_{Npr}(l)$ не перекрываются, т. е. $\int W_{spr}(l) W_{Npr}(l)\, dl = 0$, то из (3.3) для байесовской оценки имеем $\gamma_m = \gamma_{1m}$, если $pW_{spr}(\gamma_{1m})\Lambda(\nu_{1m}) > qW_{Npr}(l_N)$ и $\nu_m = l_N$, если $pW_{spr}(\gamma_{1m})\Lambda(\nu_{1m}) < qW_{Npr}(l_N)$. Здесь ν_{1m} — оптимальная оценка при $p = 1$, а l_N — положение абсолютного максимума функции $W_{Npr}(l)$.

Поскольку в большинстве практических задач априорное распределение неизвестно и его полагают равномерным в некотором интервале [6, 7], рассмотрим этот частный случай, записав априорное распределение как

$$W_{Npr}(l) = \begin{cases} 1/L_N, & l \in L_N, \\ 0, & l \notin L_N; \end{cases} \qquad W_{spr}(l) = \begin{cases} 1/L_S, & l \in L_S, \\ 0, & l \notin L_S. \end{cases}$$

Если интервалы L_N и L_S не перекрываются, то получаем случай рассмотренный выше. Если же L_N включает в себя весь интервал L_S (или совпадает с ним), то байесовская оценка γ_m совпадает с обычной оценкой максимального правдоподобия l_m

$$\gamma_m = l_m \tag{3.4}$$

и структура оптимальной оценки инвариантна по отношению к априорной вероятности наличия сигнала p.

При дискретном априорном распределении, например при $W_{Npr}(l) = \delta(l - l_N)$, $W_{spr}(l) = \delta(l - l_S)$, из (1.1) и (3.1) получаем при $\eta \to 0$, что байесовская оценка имеет вид $\gamma_m = l_S$, если $p\Lambda(l_S) > q$, и $\gamma_m = l_N$, если $p\Lambda(l_S) < q$.

Перейдем к случаю смешанного априорного распределения. Положим, что при отсутствии сигнала априорное распределение оцениваемого параметра дискретно:

$$W_{Npr}(l) = \delta(l - l_N), \tag{3.5}$$

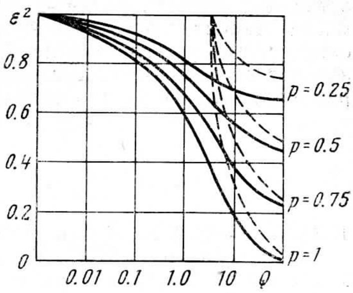
а при наличии сигнала — непрерывно:

$$W_{spr}(l) = W(l). \tag{3.6}$$

При подстановке (3.5) и (3.6) в (3.2) приходим к выражению

$$q\Delta \left| \frac{l_N - \gamma}{\eta} \right| + p \int\limits_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} W(l)\Lambda(l)\, dl.$$

Разложим здесь второе слагаемое в ряд Тейлора и отбросим члены, содержащие η в степени выше первой. Получим, что байесовская оценка γ_m определяется по положению абсолютного максимума функции $\Lambda'(l) \simeq q\Delta|(l_N - l) / \eta| + 2\eta pW(l)\Lambda(l)$. Переходя в этой формуле к пределу при $\eta \to 0$, для байесовской оценки при простой функции потерь находим $\gamma_m = l_N$, т. е. оптимальная оценка не зависит от наблюдаемых данных. Следовательно, при оценке параметра со смешанным распределением необходимо учитывать конечность разрешающей способности приемной системы, так как оценка имеет смысл только при конечных значениях η. При этом, в отличие от оценки при непрерывном или дискретном априорном распределении, оценка при смешанном распределении зависит от выбора величины η, которая, согласно [4], характеризует разрешающую способность системы выделения сигнала.



Ранее было показано, что в практически интересном случае равномерного априорного распределения оцениваемого параметра и простой функции потерь байесовские оценки при $p < 1$ и $p = 1$ совпадают. Однако характеристики оценок в общем случае будут различны при $p < 1$ и $p = 1$. Рассмотрим в качестве примера оценку амплитуды при простой функции потерь и $W_{spr}(l) = W_{Npr}(l) = W(l)$. Если это равенство не выполняется, рассмотренная в примере оценка не будет оптимальной, но представляет интерес, как пример использования оценки, оптимальной при $p = 1$, в ситуации $p < 1$.

4. Запишем полезный сигнал в виде $\alpha a_0 s(t)$ и положим, что априорная плотность вероятности имеет вид

$$W(a) = \begin{cases} 1/\sqrt{N_m}, & 0 \leqslant a \leqslant \sqrt{N_m}, \\ 0, & a < 0, \ a > \sqrt{N_m}, \end{cases} \tag{4.1}$$

где N_m — пиковая мощность сигнала [4]. Учитывая (4.1) и (3.4), находим выражение для байесовской оценки амплитуды при простой функции потерь:

$$\gamma_m = \begin{cases} \sqrt{N_m}, & a_1 \geqslant \sqrt{N_m}, \\ a_1, & 0 < a_1 < \sqrt{N_m}, \\ 0, & a_1 \leqslant 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Здесь a_1 — решение уравнения $[d\Lambda(a) \,/\, da]_{a_1} = 0$. Для случая приема сигнала $\alpha a_0 s(t)$ на фоне аддитивного нормального шума с нулевым средним значением нетрудно получить характеристики байесовской оценки (4.2). Смещение оценки γ_m будет равно

$$\Delta = \langle \gamma_m - a_0 \rangle = -q\sqrt{N_m}\left[\Phi(\sqrt{Q}) - \frac{1}{2} - 1/\sqrt{2\pi Q}\left\{1 - \exp\left(-\frac{Q}{2}\right)\right\}\right], \tag{4.3}$$

а рассеяние

$$\sigma^2 = \langle(\gamma_m - a_0)^2\rangle = N_m\left(p\left\{Q^{-1}[2\Phi(\sqrt{Q}) - 1] + 2/3[1 - \Phi(\sqrt{Q})] - \frac{4}{3}Q^{-1}\sqrt{2/\pi Q}\, \times \right.\right.$$
$$\left. \times \left[1 - \exp\left(-\frac{Q}{2}\right)\right] - \frac{1}{3}\sqrt{2/\pi Q}\exp(-Q/2)\right\} + \tag{4.4}$$
$$\left. + q\left\{\frac{1}{3} - 1/\sqrt{2\pi Q} + Q^{-1}\left[\Phi(\sqrt{Q}) - \frac{1}{2}\right]\right\}\right).$$

Здесь Q — пиковое отношение сигнал/шум по мощности на выходе линейной части оптимального приемника, а $\Phi(u) = (1\,/\,\sqrt{2\pi})\int\limits_{-\infty}^{u} \exp(-x^2\,/\,2)\,dx$ — интеграл вероятности. Из (4.3) следует, что при $p < 1$ оптимальная оценка смещенная. При необходимости, используя соотношение (2.2), можем построить несмещенную оценку

$$\gamma_2 = [q\sqrt{N_m} + 2pB(a_1)\gamma_m] \,/\, 2[q + pB(a_1)],$$
$$B(a_1) = \sqrt{2\pi\,/\,Q}\,[\Phi(a_1\sqrt{Q\,/\,N_m}) - \Phi(a_1\sqrt{Q\,/\,N_m} - \sqrt{Q})]\exp(a_1^2 Q\,/\,N_m).$$

Оценка γ_2 будет несмещенной поскольку оценка γ_m при наличии сигнала несмещенная.

Если не учитывать априорное распределение амплитуды (4.1) и, следуя [4, 5, 7], в качестве оценки использовать величину a_1, то аналогично (4.3) и (4.4) имеем, что смещение Δ_1 и рассеяние σ_1^2 оценки a_1 определяются выражениями

$$\Delta_1 = -q\sqrt{N_m}\,/\,2, \qquad \sigma_1^2 = N_m[Q^{-1} + q\,/\,3].$$

Заметим, что в то время как рассеяние оценки a_1, построенной без учета априорного распределения неограниченно возрастает при $Q \to 0$, рассеяние оптимальной оценки (4.2) при $Q \to 0$ стремится к среднему квадрату амплитуды $\langle a^2 \rangle = N_m / 3$.

На фигуре приведены зависимости относительного рассеяния $\varepsilon^2 = \sigma^2 / \langle a^2 \rangle$ оценки (4.2) от величины отношения сигнал/шум Q для различных значений априорной вероятности наличия сигнала p. Пунктиром обозначены аналогичные зависимости относительного рассеяния $\varepsilon_1{}^2 = \sigma_1{}^2 / \langle a^2 \rangle$ оценки a_1. Из рассмотрения кривых следует, что рассеяние оценки при больших отношениях сигнал/шум существенно зависит от величины априорной вероятности наличия сигнала. При этом для $Q \gg 1$ рассеяния оценок γ_m и a_1 приближенно равны.

Поступило 25 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Middleton D., Esposito R. Simultaneous optimum detection and estimation of signals in noise. IEEE. Trans. Information Theory, 1968, **IT-14**, No. 3.
2. Миддлтон Д., Эспозито Р. Новые результаты в теории одновременного обнаружения сигналов и оценки их параметров в шуме. Проблемы передачи информации, 1970, **VI**, № 2.
3. Большаков И. А., Ватолло В. В., Латыш В. Г. Методы совместного обнаружения и измерения неизвестного числа сигналов, основанные на теории случайных точек. Радиотехника и электроника, 1964, **IX**, № 9.
4. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. II. «Сов. радио», 1962.
5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. II. «Сов. радио», 1968.
6. Фалькович С. Е. Оценка параметров сигнала. «Сов. радио», 1970.
7. Куликов Е. И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. «Сов. радио», 1969.