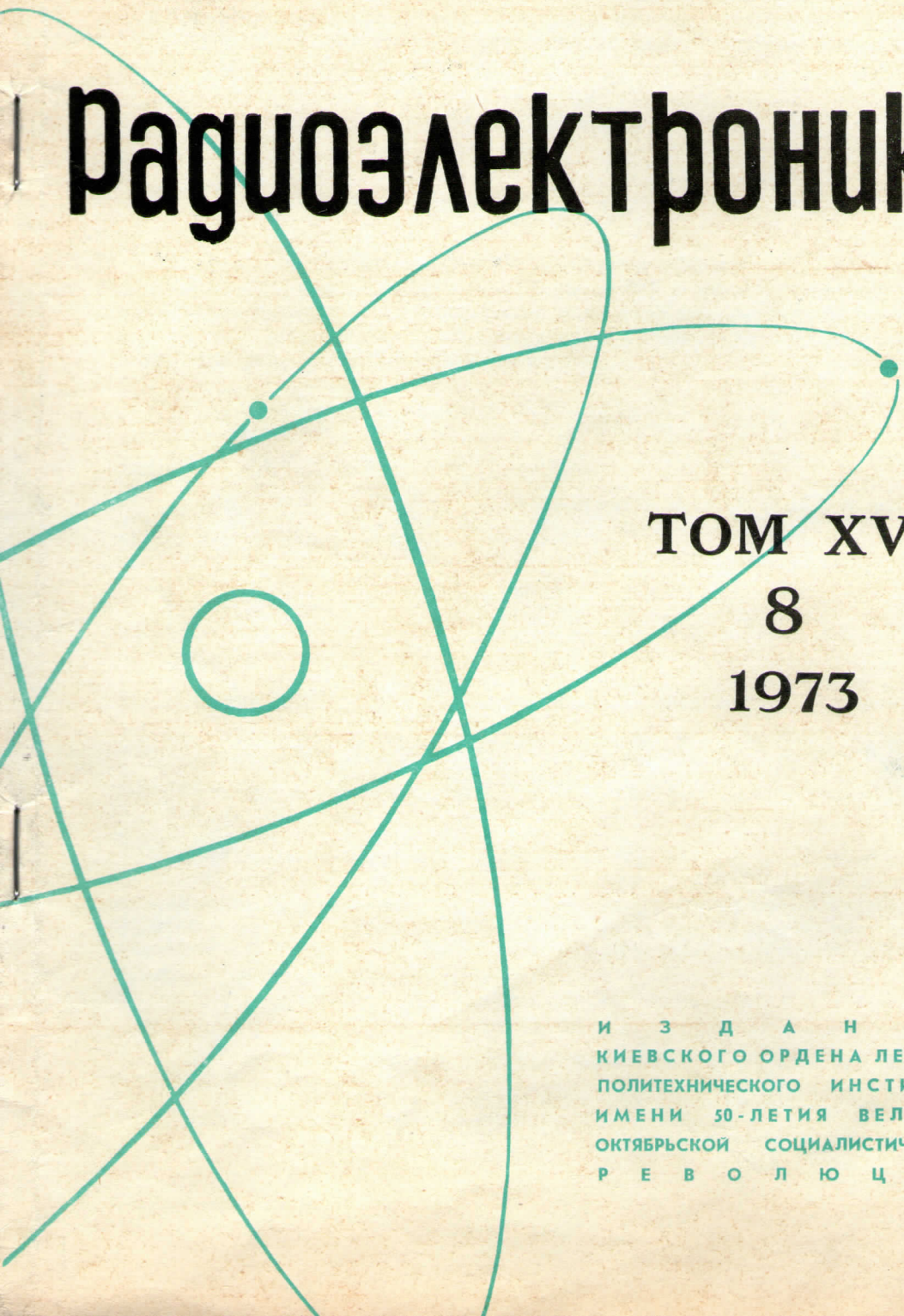


29

29

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

Радиоэлектроника



ТОМ XVI
8
1973

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ 50-ЛЕТИЯ ВЕЛИКОЙ
ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ

УДК 621.391.8

В. К. МАРШАКОВ, А. П. ТРИФОНОВ

СПОСОБ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА СИГНАЛА

Рассмотрен квазиоптимальный приемник, позволяющий воспроизвести логарифм функционала отношения правдоподобия как непрерывную функцию оцениваемого параметра. Найдены характеристики оценки по методу максимального правдоподобия.

Оптимальное (по методу максимального правдоподобия) приемное устройство для оценки параметра сигнала по принятой реализации суммы сигнала и помехи образует выходной эффект, пропорциональный функционалу отношения правдоподобия или его логарифму [1—3]. При этом предполагается, что значения выходного эффекта формируются во всей априорной области оцениваемого параметра, в результате чего можно найти положение абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия, являющееся оценкой.

Если параметр принимает континуум значений и не является функцией времени запаздывания или интенсивности сигнала, то оптимальное приемное устройство должно иметь бесконечно большое число каналов [1—3]. В каждом таком канале формируется логарифм функционала отношения правдоподобия для значений параметра, сдвинутых относительно друг друга на бесконечно малую величину. Очевидно, техническая реализация подобной схемы невозможна, поэтому большое внимание уделяется квазиоптимальным устройствам, таким как многоканальные приемники и различного рода дискриминаторы [1—4].

Однако многоканальные приемники весьма громоздки и позволяют воспроизвести выходной сигнал оптимального приемника только в отдельных точках априорной области оцениваемого параметра [1, 2], а применение дискриминаторов возможно лишь при весьма малых размерах априорной области [4]. В этой связи рассмотрим приемное устройство, позволяющее приближенно воспроизвести функционал отношения правдоподобия или его логарифм как непрерывную функцию оцениваемого параметра.

Пусть на вход приемного устройства в течение интервала времени $[0; T]$ поступает аддитивная смесь $x(t)$ сигнала $s(t, l_0)$ и белого шума $n(t)$ с нулевым средним значением и односторонней спектральной плотностью N_0 . Оцениваемый параметр l_0 полагаем распределенным равномерно на интервале $[L_1; L_2]$. Тогда выходной эффект оптимального приемника определяется выражением [1]

$$M(l) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t, l) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, l) dt. \quad (1)$$

Представим сигнал $s(t, l)$ в виде ряда по ортонормированным на интервале $[0; T]$ функциям $b_k(t)$ таким образом, что

$$s(t, l) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(l) b_k(t), \tag{2}$$

где коэффициенты $a_k(l)$ определяются из соотношения

$$a_k(l) = \int_0^T s(t, l) b_k(t) dt.$$

Будем считать, что система функций $\{b_k(t)\}$ является полной, а сигнал $s(t, l)$ при $l \in [L_1; L_2]$ удовлетворяет требованиям, при которых существует разложение (2). Задавшись достаточно большим числом членов разложения p , приближенно получаем

$$s(t, l) \approx \sum_{k=0}^{p-1} a_k(l) b_k(t). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), имеем

$$M(l) \approx M_p(l) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_k(l) x_k - \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_k^2(l), \tag{4}$$

$$x_k = \int_0^T x(t) b_k(t) dt.$$

Формула (4) позволяет приближенно воспроизвести $M(l)$ как непрерывную функцию параметра l с помощью функциональной схемы, изображенной на рис. 1, где обозначено: Y_k — усилитель с регулируемым коэф-

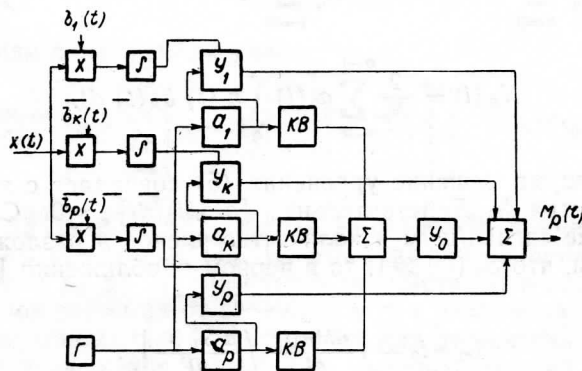


Рис. 1.

фициентом усиления, равным x_k ; a_k — нелинейные безынерционные преобразователи, характеристики которых определяются функциями $a_k(l)$; Y_0 — усилитель фазоинвертор с общим коэффициентом передачи $(-1/2)$; Γ — генератор развертки, работающий в течение интервала времени

$[T; T+\Delta]$ и вырабатывающий напряжение $l(t) = \frac{L_1 - L_2}{\Delta} (t - T - \Delta) + L_2$; Δ — длительность развертки; $KВ$ — квадраторы. Назначение остальных блоков ясно из рисунка. Корреляторы, вырабатывающие величины x_k , можно заменить на фильтры, согласованные с сигналами $b_k(t)$. На выходе системы рис. 1 в течение времени Δ воспроизводится функция $M_p(l)$ для всех значений l . Как следует из рисунка, рассмотренное устройство приводит к увеличению времени обработки сигнала по сравнению с оптимальным приемником на время развертки Δ , которое можно сделать достаточно малым. В дальнейшем подобное устройство, реализующее алгоритм (4), будем называть приемником с разверткой.

Из сравнения функциональных схем приемника с разверткой (рис. 1) и обычного многоканального приемника [1, 2] видно, что техническая реализация для приемника с разверткой может оказаться сложнее, чем для многоканального приемника. Однако в приемнике с разверткой могут быть применены более простые по конструкции согласованные фильтры, что обеспечивается соответствующим подбором системы ортонормированных функций $\{b_k(t)\}$. В общем случае использование приемника с разверткой вместо многоканального приемника является достаточно оправданным, если приемник с разверткой, обеспечивая более высокую точность оценки параметра, не приводит к значительному усложнению практической реализации измерителя. Таким образом, выбор между приемником с разверткой и многоканальным измерителем зависит от требований, предъявляемых к точности оценки и степени простоты технической реализации измерительного устройства.

При использовании приемника с разверткой оценка l_m параметра l_0 находится по положению абсолютного максимума $M_p(l)$, т. е. является решением уравнения

$$\left[\frac{dM_p(l)}{dl} \right]_{l_m} = \left\{ \frac{d}{dl} [S_p(l) + N_p(l)] \right\}_{l_m} = 0, \quad (5)$$

где

$$S_p(l) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_k(l) a_k(l_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_k^2(l) = S_p(l, l_0) - \frac{1}{2} z_p^2(l),$$

$$N_p(l) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_k(l) \int_0^T n(t) b_k(t) dt.$$

В отсутствие шума решение уравнения (5) совпадает с истинным значением параметра l_0 . Действительно, $[dS_p(l)/dl]_{l_0} = 0$. Следовательно, если отношение сигнал/шум и количество членов p разложения (3) настолько велики, что $S_p(l_0) \gg 1$, то в первом приближении [1] можно записать

$$l_m = l_0 - \left[\frac{dM_p(l)}{dl} / \frac{d^2S_p(l)}{dl^2} \right]_{l_0}. \quad (6)$$

С помощью (6) получим, что оценка несмещенная $\langle \Delta l \rangle = \langle l_m - l_0 \rangle = 0$, а ее дисперсия равна

$$\sigma_p^2(l_0) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial l_1 \partial l_2} \langle N_p(l_1) N_p(l_2) \rangle \right\}_{l_0} \cdot \left[\frac{d^2S_p(l)}{dl^2} \right]_{l_0}^{-2}. \quad (7)$$

Выполняя усреднение в (7), получаем

$$\sigma_p^2(l_0) = \left[\frac{\partial^2 S_p(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} \right]_{l_0}^{-1}.$$

Если справедливо разложение

$$\frac{\partial s(t, l)}{\partial l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{da_b(l)}{dl} b_k(t),$$

то при $p \rightarrow \infty$ отношение $\rho_p = \sigma_p^2(l_0) / \sigma_0^2(l_0) \rightarrow 1$, где $\sigma_0^2(l_0)$ — дисперсия оптимальной оценки параметра l_0 , вычисленная в предположении, что приемное устройство точно воспроизводит $M(l)$ [1]. Поскольку при больших p , $\rho_p \approx 1$, то приемник с разверткой можно назвать квазиоптимальным. Для любых p и $N_0 \rightarrow 0$, т. е. при неограниченном увеличении отношения сигнал/шум, величина ρ_p остается постоянной, в то время как аналогичное отношение для многоканального приемника с конечным числом каналов $\hat{\rho} = \hat{\sigma}^2(l_0) / \sigma_0^2(l_0) \rightarrow \infty$ [1] ($\hat{\sigma}^2(l_0)$ — дисперсия оценки в многоканальном приемнике). Следовательно, по крайней мере, для больших отношений сигнал/шум дисперсия оценки в приемнике с разверткой меньше, чем дисперсия оценки в многоканальном приемнике.

Для иллюстрации полученных соотношений вычислим дисперсию оценки длительности τ_0 экспоненциального импульса $s(t, \tau_0) = A_0 e^{-t/\tau_0}$, $t \in [0; \infty)$ при использовании приемника с разверткой. В качестве ортонормированных функций $b_k(t)$ выберем функции Лаггера $\varphi_k(t) = \sqrt{\beta} e^{-\beta t/2} L_k(\beta t)$; β — масштабный множитель; $L_k(x)$ — полиномы Лаггера. Известно [5], что техническая реализация согласованных фильтров для функций Лаггера довольно проста.

При $b_k(t) = \varphi_k(t)$ характеристики нелинейных элементов a_k функциональной схемы рис. 1 имеют вид

$$a_k(\tau) = A_0 \tau \sqrt{\beta} \frac{[1 - \beta\tau/2]^k}{[1 + \beta\tau/2]^{k+1}}.$$

Дисперсия оценки длительности равна

$$\sigma_p^2(\tau_0) = \frac{2N_0\tau_0}{A_0} \left\{ 8\gamma^3 \sum_{k=0}^{p-1} \left[(\gamma-1)^{k-1} \frac{2k+1-\gamma}{(1+\gamma)^{k+2}} \right]^2 \right\}^{-1} = \sigma_0^2(\tau_0) \rho_p(\gamma).$$

Здесь $\gamma = 2/\beta\tau_0$; $\sigma_0^2(\tau_0) = 2N_0\tau_0/A_0^2$ — дисперсия оценки τ_0 при использовании оптимального приемника [1]. На графике рис. 2 приведены зависимости отношения ρ_p дисперсий оценок параметра τ_0 в квазиоптимальной и оптимальной системах от величины γ при различных значениях p . Из рассмотрения кривых рис. 2 следует, что для относительно небольшого числа членов разложения (3) ($p \leq 4$), дисперсия оценки в приемнике с разверткой близка к дисперсии оптимальной оценки при изменении длительности τ_0 в довольно широких пределах. Так, если $p=3$ и $0,2 \leq \gamma \leq 30$, т. е. $0,067\beta^{-1} \leq \tau_0 \leq 10\beta^{-1}$, то дисперсия квазиоптимальной оценки превосходит дисперсию оптимальной оценки не более чем в два раза.

Пусть сигнал $s(t, l_0)$ является узкополосным радиосигналом $s(t, l_0) = F(t, l_0) \cos[\omega_0 t + \Phi(t, l_0) - \varphi_0]$, начальная фаза φ_0 которого распределена равномерно на интервале $[0; 2\pi]$. Оптимальное устройство для оценки параметра l должно вырабатывать сигнал [1]

$$M(l) = -\frac{1}{2} z^2(l) + \ln I_0[R(l)], \quad (8)$$

$$\text{где } z^2(l) = \frac{1}{N_0} \int_0^T F^2(t, l) dt;$$

$$R(l) = \left\{ \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) F(t, l) \cos[\omega_0 t + \Phi(t; l)] dt \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) F(t, l) \sin[\omega_0 t + \Phi(t; l)] dt \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

$I_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, нулевого порядка.

Если возможны разложения квадратур сигнала $s(t, l)$ по ортонормированным функциям $b_k(t)$:

$$F_c(t, l) = F(t, l) \cos \Phi(t, l) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(l) b_k(t),$$

$$F_s(t, l) = F(t, l) \sin \Phi(t, l) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\alpha}_k(l) b_k(t),$$

то, ограничиваясь первыми p членами разложения, можно (8) представить в виде

$$M(l) \approx M_p(l) = -\frac{1}{2N_0} \sum_{k=0}^{p-1} [\alpha_k^2(l) + \hat{\alpha}_k^2(l)] + \\ + \ln I_0 \left\{ \left[\left(\frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} [\alpha_k(l) Y_k - \hat{\alpha}_k(l) \hat{Y}_k] \right)^2 + \left(\frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} [\hat{\alpha}_k(l) Y_k + \alpha_k(l) \hat{Y}_k] \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (9)$$

$$Y_k = \int_0^T x(t) b_k(t) \cos \omega_0 t dt; \quad \hat{Y}_k = \int_0^T x(t) b_k(t) \sin \omega_0 t dt.$$

Приемное устройство, моделирующее (9), позволяет приближенно воспроизвести выходной эффект оптимального приемника как непрерывную функцию оцениваемого параметра l . В отличие от рассмотренного ранее квазиоптимального приемника детерминированного сигнала (4), у которого имеются лишь опорные сигналы вида $b_k(t)$, в квазиоптимальном приемнике радиосигнала со случайной начальной фазой должны использоваться квадратурные опорные сигналы $b_k(t) \cos \omega_0 t$ и $b_k(t) \sin \omega_0 t$ или согласованные с ними фильтры.

Для определения статистических характеристик оценки l_m преобразуем (9) к виду

$$M_p(l) = -\frac{1}{2} z_p^2(l) + \ln I_0 \{ [G_p^2(l, l_0) + 2N_1(l, l_0) + N_2^2(l)]^{1/2} \},$$

где введены обозначения:

$$z_p^2(l) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} [\alpha_k^2(l) + \hat{\alpha}_k^2(l)]; \quad G_p^2(l, l_0) = S_c^2(l, l_0) + S_s^2(l, l_0);$$

$$S_c(l, l_0) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} [\alpha_k(l) \hat{\alpha}_k(l_0) + \hat{\alpha}_k(l) \alpha_k(l_0)];$$

$$S_s(l, l_0) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} [\alpha_k(l) \hat{\alpha}_k(l_0) - \hat{\alpha}_k(l) \alpha_k(l_0)];$$

$$N_c(l) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} [\alpha_k(l) H_k - \hat{\alpha}_k(l) \hat{H}_k]; \quad N_s(l) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{p-1} [\hat{\alpha}_k(l) H_k + \alpha_k(l) H_k];$$

$$H_k = \int_0^T n(t) b_k(t) \cos \omega_0 t dt; \quad \hat{H}_k = \int_0^T n(t) b_k(t) \sin \omega_0 t dt;$$

$$N_1(l, l_0) = [N_c(l) S_c(l, l_0) - N_s(l) S_s(l, l_0)] \cos \varphi_0 + [N_c(l) S_s(l, l_0) + N_s(l) S_c(l, l_0)] \sin \varphi_0;$$

$$N_2^2(l) = N_c^2(l) + N_s^2(l).$$

Положим, что отношение сигнал/шум и количество членов разложения p достаточно велики, чтобы выполнялось условие $G_p^2(l_0, l_0) \gg 1$. Тогда, учи-

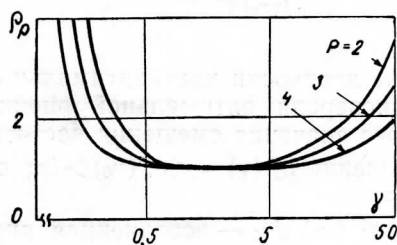


Рис. 2.

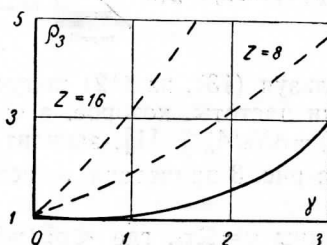


Рис. 3.

тывая асимптотическое поведение функции $I_0(x)$ при $x \gg 1$, представим решение уравнения правдоподобия в виде, аналогичном (6), где теперь

$$S_p(l) = -\frac{1}{2} z^2(l) + G_p(l, l_0); \quad N_p(l) = \frac{N_1(l, l_0)}{G_p(l, l_0)}. \quad (10)$$

Так как $\langle N_p(l) \rangle = 0$, то оценка несмещенная, а ее дисперсия определяется выражением (7). Выполняя усреднение, для второго момента шу-

мовой составляющей $N_p(l)$ (10) на выходе приемника с разверткой получаем

$$\langle N_p(l_1) N_p(l_2) \rangle = \frac{G_c(l_1, l_2) S_c(l_1, l_2) + G_s(l_1, l_2) S_s(l_1, l_2)}{G_p(l_1, l_0) G_p(l_2, l_0)}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} G_c(l_1, l_2) &= S_c(l_1, l_0) S_c(l_2, l_0) + S_s(l_1, l_0) S_s(l_2, l_0); \\ G_s(l_1, l_2) &= S_s(l_1, l_0) S_c(l_2, l_0) - S_c(l_1, l_0) S_s(l_2, l_0). \end{aligned}$$

Подставляя (11) в (7), приходим к выражению

$$\sigma_p^2(l_0) = \left[\frac{\partial^2 G_p(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} \right]_{l_0}^{-1}. \quad (12)$$

Определяя отношение $\rho_p = \sigma_p^2(l_0) / \sigma_0^2(l_0)$, получаем, что, как и при оценке параметра детерминированного сигнала для любого p , величина $\rho_p = \text{const}$ при $N_0 \rightarrow 0$.

Для примера вычислим дисперсию квазиоптимальной оценки смещения частоты ν_0 сигнала $s(t, \nu_0) = A_0 e^{-t/\tau_0} \cos[\omega_0 t + \nu_0 t - \varphi_0]$, $t \in (0, \infty)$, полагая, что ν_0 распределено равномерно на интервале $[-\Omega/2; \Omega/2]$. В качестве ортонормированных функций $b_k(t)$ выберем функции Лаггера с масштабным множителем $\beta = 2/\tau_0$. Тогда характеристики нелинейных элементов \hat{a}_k и \hat{a}_k имеют вид:

$$a_k(\nu) = A_0 \sqrt{2\tau_0} \sum_{m=0}^k \frac{k! (-2)^m}{(k-m)! m!} \frac{\cos \left[(m+1) \arccos \frac{2}{\sqrt{4 + (\nu\tau_0)^2}} \right]}{[4 + (\nu\tau_0)^2]^{(m+1)/2}}; \quad (13)$$

$$\hat{a}_k(\nu) = A_0 \sqrt{2\tau_0} \sum_{m=0}^k \frac{k! (-2)^m}{(k-m)! m!} \frac{\sin \left[(m+1) \arcsin \frac{\nu\tau_0}{\sqrt{4 + (\nu\tau_0)^2}} \right]}{[4 + (\nu\tau_0)^2]^{(m+1)/2}}.$$

Используя (13), из (12) получим значение дисперсии квазиоптимальной оценки частоты, которое, в отличие от дисперсии оптимальной оценки $\sigma_0^2(\nu_0) = 8N_0/A_0^2\tau_0^3$ [1], зависит от истинного значения смещения частоты ν_0 . На рис. 3 приведена зависимость отношения $\rho_3(\gamma) = \langle \sigma_3^2(\nu_0) \rangle / \sigma_0^2$ от

величины $\gamma = \Omega\tau_0$, где $\langle \sigma_3^2(\nu_0) \rangle = \Omega^{-1} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \sigma_3^2(\nu_0) d\nu_0$ — усредненная дис-

персия квазиоптимальной оценки при использовании первых трех членов разложения квадратурных составляющих сигнала. На том же рисунке пунктиром представлена зависимость $\hat{\rho}_3(\gamma) = \sigma^2 / \sigma_0^2$ для двух значений

отношения сигнал/шум $z = A_0 \sqrt{\nu_0 / 2N_0}$. Здесь σ^2 — усредненная дисперсия оценки частоты в многоканальном приемнике с тремя каналами, вычисленная по результатам работы [1]. Из рассмотрения кривых следует, что дисперсия оценки доплеровского сдвига частоты ν_0 в приемнике с разверткой меньше, чем дисперсия оценки ν_0 в многоканальном приемнике.

При этом выигрыш в точности оценки при использовании приемника с разверткой по сравнению с многоканальным приемником возрастает с увеличением отношения сигнал/шум.

Рассмотренное квазиоптимальное устройство (приемник с разверткой) по сложности реализации сравнимо с многоканальным приемником. Однако для приемника с разверткой, в отличие от многоканального приемника, увеличение дисперсии оценки по сравнению с оптимальной не зависит от отношения сигнал/шум. В результате чего, при больших отношениях сигнал/шум точность оценки параметра сигнала в приемнике с разверткой может быть выше, чем в многоканальном приемнике. Кроме того, путем выбора системы ортонормированных функций число членов разложения сигнала, необходимое для синтеза приемника, можно сделать достаточно малым, а согласованные фильтры, используемые для реализации приемника, относительно простыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Е. И., Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, Изд-во «Советское радио», 1969.
2. Слока В. К., Вопросы обработки радиолокационных сигналов, Изд-во «Советское радио», 1970.
3. Фалькович С. Е., Оценка параметров сигнала, Изд-во «Советское радио», 1970.
4. Нахмансон Г. С., Трифионов А. П., Оценка параметра радиосигнала с помощью дискриминатора, Изв. вузов СССР — Радиоэлектроника, 1970, 13, № 10.
5. Горбачевич Е. Д., Коррелометры с аппроксимацией, Изд-во Энергия, 1971.

Поступила в редакцию
13 X 1971 г.,
после переработки
27 I 1972 г.