РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 1996, том 41, № 10, с. 1222–1224

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391:519.27

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ СИГНАЛА ПРИ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

© 1996 г. Е. П. Нечаев, Ю. Э. Корчагин

Поступила в редакцию 13.01.95 г.

Исследована помехоустойчивость алгоритма совместного оценивания длительности и параметров фазовой модуляции сигнала. Рассчитаны характеристики оценок. Показано, что с ростом отношения сигнал/шум оценки длительности и параметров фазовой модуляции сигнала асимптотически не зависимы, а их характеристики совпадают с характеристиками раздельных оценок.

Во многих задачах статистической теории связи и локации возникает необходимость совместного оценивания нескольких параметров сигнала [1–3]. Анализ помехоустойчивости оптимальных алгоритмов совместного оценивания параметров регулярных сигналов, для которых решающая статистика дважды дифференцируема в среднеквадратическом, проводится при использовании метода малого параметра [1, 2]. Решающая статистика алгоритмов оценивания параметров разрывных сигналов не дифференцируема. В этом случае анализ помехоустойчивости проводится при использовании локально-марковской аппроксимации [3] решающей статистики. При совместном оценивании нескольких параметров сигнала часто возникают ситуации, когда решающая статистика алгоритма дифференцируема по одним параметрам и не дифференцируема по другим. Например, в задаче совместного оценивания длительности и параметров фазовой модуляции сигнала решающая статистика оказывается дважды дифференцируемым процессом по параметрам фазовой модуляции и не дифференцируемым процессом по параметру, определяющему длительность сигнала. Поэтому представляет интерес рассмотреть метод расчета помехоустойчивости алгоритма, решающая статистика которого не удовлетворяет условию регулярности.

Пусть в течение времени $[0, T]$ на входе приемного устройства действует реализация $x(t) = s(t, \tau_0, \vec{l}_0) + n(t)$ смеси полезного сигнала

$$s(t, \tau_0, \vec{l}_0) = \begin{cases} a\cos[\omega t + \psi(t, \vec{l}_0)], & 0 \le t \le \tau_0, \\ 0, & \tau_0 < t \le T, \end{cases} \qquad (1)$$

и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Здесь a – амплитуда; ω – несущая частота; τ_0 – длительность сигнала; $\psi(t, \vec{l}_0)$ – закон фазовой модуляции; $\vec{l}_0$ – вектор неизвестных параметров. Причем $\psi(t, \vec{l}_0)$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с колебанием несущей частоты и дифференцируемой по компонентам вектора $\vec{l}_0$.

Рассмотрим задачу совместного оценивания длительности сигнала τ_0 и параметров его фазовой модуляции $\vec{l}_0$. Согласно методу максимального правдоподобия [1–3], в оптимальную обработку сигнала (1) входят формирование логарифма функционала отношения правдоподобия

$$M(\tau, \vec{l}) = \frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)s(t, \tau, \vec{l})dt - \frac{a^2\tau}{2N_0} \qquad (2)$$

и определение положения $(\tau_m, \vec{l}_m)$ абсолютного максимума решающей статистики (2) по переменным τ, $\vec{l}$ из априорно допустимой области возможных значений неизвестных параметров сигнала τ_0, $\vec{l}_0$. Величины τ_m, $\vec{l}_m$ принимаем в качестве оценок максимального правдоподобия параметров сигнала (1).

С увеличением отношения сигнал/шум $z^2 = a^2\tau_0/N_0$ оценки максимального правдоподобия $(\tau_m, \vec{l}_m)$ сходятся в среднеквадратическом к точке истинных значений $(\tau_0, \vec{l}_0)$ [1, 3]. Поэтому для расчета характеристик оценок в области больших значений отношения сигнал/шум достаточно ограничиться исследованием свойств статистики (2) в окрестности точки истинных значений неизвестных параметров. Функционал (2) определяет линейное преобразование гауссовского случайного процесса $n(t)$. Следовательно, распределение решающей статистики оптимального алгоритма (2) при фиксированных значениях τ, $\vec{l}$ будет гауссовским. Среднее значение (сигнальная функция) и функция корреляции функционала (2) в окрестности точки $(\tau_0, \vec{l}_0)$ имеют следующий вид:

$$S(\tau, \vec{l}) = z^2\left[\min(\tau_0, \tau)/\tau_0 - \tau/2\tau_0 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}(l_i - l_{0i})(l_j - l_{0j})\right] + O(\tau - \tau_0) \times \quad (3)$$

$$\times \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} O(l_i - l_{0i})O(l_j - l_{0j}),$$

$$K(\tau_1, \tau_2, \vec{l}_1, \vec{l}_2) = z^2\left[\min(\tau_1, \tau_2)/\tau_0 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}(l_{1i} - l_{2i})(l_{1j} - l_{2j})\right] + O(\tau_i - \tau_0) \times \quad (4)$$

$$\times \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} O(l_{1i} - l_{2i})O(l_{1j} - l_{2j}),$$

где n – размерность вектора $\vec{l}$; l_i, l_{0i}, l_{1i}, l_{2i} – компоненты векторов $\vec{l}$, $\vec{l}_0$, $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ соответственно; $i = \overline{1, n}$;

$$S_{ij} = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} \frac{\partial\psi(t, \vec{l})}{\partial l_i}\frac{\partial\psi(t, \vec{l})}{\partial l_j}dt\Bigg|_{\vec{l} = \vec{l}_0}, \quad (5)$$

$$i, j = \overline{1, n}.$$

Корреляционная функция (4) в окрестности точки $(\tau_0, \vec{l}_0)$ дифференцируема по компонентам вектора $\vec{l}$ и не дифференцируема по переменной τ. Следовательно, решающая статистика (2) дифференцируема в среднеквадратическом по переменным $\vec{l}$ и не дифференцируема по τ.

Введем в окрестности точки $(\tau_0, \vec{l}_0)$ два независимых гауссовских случайных процесса: $M_1(\tau)$ и $M_2(\vec{l})$ со средними значениями

$$S_1(\tau) = z^2[\delta - 1 + \min(\tau_0, \tau)/\tau_0 - \tau/2\tau_0],$$

$$S_2(\vec{l}) = z^2\left[1 - \delta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}(l_i - l_{01})(l_j - l_{0j})\right], \quad (6)$$

и функциями корреляции

$$K_1(\tau_1, \tau_2) = z^2[\delta - 1 + \min(\tau_1, \tau_2)/\tau_0], \quad (7)$$

$$K_2(\vec{l}_1, \vec{l}_2) =$$

$$= z^2\left[1 - \delta - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}(l_{1i} - l_{2i})(l_{1j} - l_{2j})\right], \quad (8)$$

где δ – некоторое число из интервала (0, 1), введенное для того, чтобы дисперсии процессов $M_1(\tau)$ и $M_2(\vec{l})$ в окрестности точки $(\tau_0, \vec{l}_0)$ имели положительный знак. При этом сумма процессов $M_1(\tau)$ и $M_2(\vec{l})$ имеет среднее значение (3) и функцию корреляции (4). Ввиду того, что гауссовский случайный процесс однозначно определяется средним значением и функцией корреляции, статистику (2) можно представить в виде

$$M(\tau, \vec{l}) = M_1(\tau) + M_2(\vec{l}). \quad (9)$$

Согласно (9), положение абсолютного максимума функционала $M(\tau, \vec{l})$ по переменной τ совпадает с положением максимума процесса $M_1(\tau)$, а положение максимума $M(\tau, \vec{l})$ по переменной $\vec{l}$ совпадает с положением максимума $M_2(\vec{l})$. Следовательно, характеристики совместных оценок τ_m, $\vec{l}_m$ определяются свойствами процессов $M_1(\tau)$ и $M_2(\vec{l})$ соответственно. В силу независимости процессов $M_1(\tau)$ и $M_2(\vec{l})$ в окрестности точки $(\tau_0, \vec{l}_0)$ оценки максимального правдоподобия τ_m, $\vec{l}_m$ будут асимптотически не зависимы при увеличении отношения сигнал/шум.

Процесс $M_1(\tau)$ с корреляционной функцией (7) является марковским случайным процессом [4]. Характеристики положения его абсолютного максимума находятся из задачи о достижении границ марковским случайным процессом [3]. Решая аналогично [3] соответствующее уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, находим вместе с распределением оценки длительности сигнала ее условные смещение и рассеяние при фиксированных истинных значениях параметров τ_0, $\vec{l}_0$:

$$d(\tau_m|\tau_0, \vec{l}_0) = \langle\tau_m - \tau_0\rangle = 0, \quad (10)$$

$$V(\tau_m|\tau_0, \vec{l}_0) = \langle(\tau_m - \tau_0)^2\rangle = 26\tau_0^2/z^4. \quad (11)$$

Точность выражений (10), (11) возрастает с увеличением отношения сигнал/шум z. Характеристики оценки длительности (10), (11) для алгоритма совместного оценивания длительности сигнала и параметров его фазовой модуляции совпадают со смещением и рассеянием оценки длительности при условии, что все остальные параметры сигнала априори известны [3].

Согласно (6), (8), процесс $M_2(\vec{l})$ представляет собой дифференцируемый в среднеквадратическом случайный процесс. Следовательно, вектор условных смещений и матрицу рассеяний оценок параметров $\vec{l}_0$ при достаточно больших значениях отношения сигнал/шум можно записать в виде [1]

$$\vec{d}(\vec{l}_m|\tau_0, \vec{l}_0) = \langle(\vec{l}_m - \vec{l}_0)\rangle = 0, \qquad (12)$$

$$\mathbf{V}(\vec{l}_m|\tau_0, \vec{l}_0) = \langle(\vec{l}_m - \vec{l}_0)^T(\vec{l}_m - \vec{l}_0)\rangle = z^{-2}\mathbf{S}^{-1}, \qquad (13)$$

где $\mathbf{S}$ – матрица размером $n \times n$ с элементами S_{ij} (5).

Характеристики (12), (13) оценок $\vec{l}_m$ для алгоритма совместного оценивания совпадают с характеристиками оценок параметров сигнала с известной длительностью.

В качестве примера рассмотрим алгоритм совместного оценивания длительности, доплеровского сдвига и полосы качания частоты сигнала с линейной частотной модуляцией. В этом случае $\psi(t, \vec{l}_0) = \Omega_0 t + \lambda_0 t^2/2T$, где Ω_0 – доплеровский сдвиг частоты; λ_0 – полоса качания частоты сигнала; $\vec{l}_0 = \{\Omega_0, \lambda_0\}$. Характеристики оценки длительности определяются выражениями (10), (11), а матрицу рассеяний оценок Ω_m, λ_m параметров Ω_0, λ_0 согласно (5), (13), можно записать в виде

$$\mathbf{V}(\Omega_m, \lambda_m|\tau_0, \Omega_0, \lambda_0) = \frac{1}{z^2\tau_0^2}\begin{Vmatrix} 48 & -120\eta \\ -120\eta & 320\eta^2 \end{Vmatrix},$$

где $\eta = T/\tau_0$.

Таким образом, представление логарифма функционала отношения правдоподобия в виде суммы дифференцируемого и марковского случайных процессов позволяет проводить расчет характеристик оценок параметров сигнала при нарушении условий регулярности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
2. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
3. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
4. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.