

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

Радиоэлектроника

ТОМ XVI
8
1973

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ 50-ЛЕТИЯ ВЕЛИКОЙ
ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ

УДК 621.391.822

А. П. ТРИФОНОВ

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ ПРИЕМЕ НА ФОНЕ ШУМА С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ КОРРЕЛЯЦИИ

Неизвестная функция корреляции априорно аппроксимируется отрезком ряда по ортонормированным функциям. Приемное устройство производит совместную оценку неизвестного параметра сигнала и коэффициентов разложения функции корреляции. Определены характеристики оценки параметра сигнала.

При решении задач оптимального приема часто полагают, что статистические характеристики помех априори полностью известны. Вместе с тем в условиях, близких к реальным, полные сведения о характеристиках помех отсутствуют. Однако в большинстве случаев можно считать, что эти помехи являются нормальными и в течение времени приема сигнала $[0, T]$ стационарны. В [1] рассмотрена квазиоптимальная система оценки неэнергетического параметра сигнала на фоне нормального шума с неизвестной функцией корреляции. Результаты [1] получены в предположении, что сигнал и шум дифференцируемы требуемое число раз. В то же время, в ряде прикладных задач помеху нельзя считать многократно дифференцируемой, а оцениваемый параметр — неэнергетическим. Поэтому определенный интерес представляет определение системы оценки при менее жестких ограничениях на классы помех и оцениваемых параметров, чем в [1].

Положим вначале, что корреляционная функция аддитивного стационарного нормального шума содержит неизвестный параметр λ , который в течение времени приема не изменяется. Принимаемую реализацию смеси сигнала и помехи запишем в виде

$$x(t) = s(t, l_0) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где $s(t, l_0)$ — полезный сигнал, неизвестный параметр l_0 которого подлежит оценке; $n(t)$ — реализация нормального шума с нулевым средним значением $\langle n(t) \rangle = 0$. Функция корреляции шума $\langle n(t) n(t+\tau) \rangle = K(\tau, \lambda_0)$ зависит от априори неизвестного параметра λ_0 .

В большинстве задач априорные распределения параметров l_0 и λ_0 неизвестны, поэтому для нахождения оценки параметра l воспользуемся методом максимального правдоподобия. Логарифм функционала отношения правдоподобия с точностью до постоянных слагаемых можно записать как [2]

$$M(l, \lambda) = \int_0^T \int_0^T \left\{ s(t_1, l) x(t_2) - \frac{1}{2} [x(t_1) x(t_2) + s(t_1, l) s(t_2, l)] \right\} \times \\ \times \Theta(t_1, t_2, \lambda) dt_1 dt_2 - \frac{1}{2} D(\lambda). \quad (2)$$

Здесь $\Theta(t_1, t_2, \lambda)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t_1 - t, \lambda) \Theta(t, t_2) dt = \delta(t_1 - t_2), \quad (3)$$

а $D(\lambda)$ — детерминированная функция параметра λ , которая может быть определена различными способами [2—4]. Для наших целей удобно определить эту функцию через ее производную [2]

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \int_0^T \int_0^T \frac{\partial K(t_1 - t_2, \lambda)}{\partial \lambda} \Theta(t_1, t_2, \lambda) dt_1 dt_2. \quad (4)$$

Формула (2) определяет структуру приемного устройства для оценки параметра l . Приемник должен вырабатывать $M(l, \lambda)$ для всевозможных значений l и λ . Оценка l_m неизвестного параметра сигнала l_0 определяется по положению точки (l_m, λ_m) , в которой функция $M(l, \lambda)$ достигает абсолютного максимума. Параметр λ при этом рассматривается как несущественный.

По определению оценка l_m находится из решения системы уравнений:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial l} [S(l, \lambda) + N(l, \lambda)] \right\}_{l_m, \lambda_m} = 0; \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [S(l, \lambda) + N(l, \lambda)] \right\}_{l_m, \lambda_m} = 0, \quad (5)$$

где обозначено: $S(l, \lambda) = \langle M(l, \lambda) \rangle$, $N(l, \lambda) = M(l, \lambda) - S(l, \lambda)$. Положим, что отношение сигнал/шум для принятого сигнала и время наблюдения достаточно велики, чтобы обеспечить высокую апостериорную точность оценки. Тогда можем получить из (5) систему уравнений для случайных ошибок измерения $\Delta l = l_m - l_0$ и $\Delta \lambda = \lambda_m - \lambda_0$. Для этого разложим $S(l, \lambda)$ и $N(l, \lambda)$ в ряд Тейлора в окрестности истинных значений параметров (l_0, λ_0) . Сохраняя только члены разложения низших порядков малости, получаем [2]:

$$\left[\frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial l^2} \Delta l + \frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial l \partial \lambda} \Delta \lambda \right]_{l_0, \lambda_0} = - \left[\frac{\partial N(l, \lambda)}{\partial l} \right]_{l_0, \lambda_0}, \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial l \partial \lambda} \Delta l + \frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial \lambda^2} \Delta \lambda \right]_{l_0, \lambda_0} = - \left[\frac{\partial N(l, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_{l_0, \lambda_0}.$$

Решая систему уравнений (6) относительно ошибки измерения параметра l , находим

$$\Delta l = - \left[\frac{\frac{\partial N(l, \lambda)}{\partial l} \frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial N(l, \lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial l \partial \lambda}}{\frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial l^2} \frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial \lambda^2} - \left[\frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial l \partial \lambda} \right]^2} \right]_{l_0, \lambda_0}. \quad (7)$$

Вычислим производные функции $S(l, \lambda)$ в формуле (7). Подставляя принимаемую смесь сигнала и помехи (1) в формулу для $M(l, \lambda)$ (2) и выполняя усреднение, можем записать

$$S(l, \lambda) = \int_0^T \int_0^T \left\{ s(t_1, l) s(t_2, l_0) - \frac{1}{2} [K(t_1 - t_2, \lambda_0) + s(t_1, l) s(t_2, l) + \right.$$

$$\left. + s(t_1, l_0) s(t_2, l_0)] \right\} \Theta(t_1, t_2, \lambda) dt_1 dt_2 - \frac{1}{2} D(\lambda).$$

Выполнив дифференцирование с учетом (3) и (4), получаем

$$\left[\frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial l^2} \right]_{l_0, \lambda_0} = - \left[\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \Theta(t_1, t_2, \lambda) dt_1 dt_2 \right]_{l_0, \lambda_0};$$

$$\left[\frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right]_{l_0, \lambda_0} = \frac{1}{2} \left[\int_0^T \int_0^T \frac{\partial K(t_1 - t_2, \lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \Theta(t_1, t_2, \lambda)}{\partial \lambda} dt_1 dt_2 \right]_{\lambda_0};$$

$$\left[\frac{\partial^2 S(l, \lambda)}{\partial l \partial \lambda} \right]_{l_0, \lambda_0} = 0.$$

Аналогичным образом находим производную $[\partial N(l, \lambda)/\partial l]_{l_0, \lambda_0}$. Подставляя значения производных в (7), получаем выражение для случайной ошибки измерения параметра l

$$\Delta l = \left[\frac{\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} n(t_2) \Theta(t_1, t_2, \lambda_0) dt_1 dt_2}{\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \Theta(t_1, t_2, \lambda_0) dt_1 dt_2} \right]_{l_0}. \quad (8)$$

Используя (8), находим, что оценка параметра l несмещенная, а дисперсия ее равна

$$\sigma^2 = \left[\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \Theta(t_1, t_2, \lambda_0) dt_1 dt_2 \right]_{l_0}^{-1}. \quad (9)$$

Дисперсия (9) полностью совпадает с дисперсией оценки максимально правдоподобия параметра l при приеме на фоне нормального шума с известной функцией корреляции. Формула (9) справедлива асимптотически, при выполнении условий

$$T \rightarrow \infty, Q \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где $Q = \int_0^T \int_0^T s(t_1, l_0) s(t_2, l_0) \Theta(t_1, t_2, \lambda_0) dt_1 dt_2$ — отношение сигнал/шум для принятого сигнала.

Пусть теперь функция корреляции шума известна с точностью до конечного числа p параметров $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]$, т. е. $\langle n(t) n(t+\tau) \rangle = K(\tau, \vec{\lambda}_0)$. Априори неизвестные параметры $\vec{\lambda}_0$ в течение времени приема предполагаются постоянными. Логарифм функционала отношения правдоподобия параметров $\vec{L} = [l, \lambda_1, \dots, \lambda_p]$ будет иметь вид:

$$M(\vec{L}) = \int_0^T \int_0^T \left\{ s(t_1, l) x(t_2) - \frac{1}{2} [x(t_1) x(t_2) + s(t_1, l) s(t_2, l)] \right\} \times$$

$$\times \Theta(t_1, t_2, \vec{\lambda}) dt_1 dt_2 - \frac{1}{2} D(\vec{\lambda}). \quad (11)$$

Функция $\Theta(t_1, t_2, \vec{\lambda})$ является решением уравнения, аналогичного (3), а $D(\vec{\lambda})$ определяется соотношениями:

$$\frac{\partial D(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_i} = \int_0^T \int_0^T \frac{\partial K(t_1 - t_2, \vec{\lambda})}{\partial \lambda_i} \Theta(t_1, t_2, \vec{\lambda}) dt_1 dt_2, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Согласно (11) приемное устройство должно вырабатывать функцию $M(\vec{L})$ для всевозможных значений параметров $l, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ и определять точку абсолютного максимума $\vec{L}_m$. Следовательно, оценка l_m неизвестного параметра сигнала может быть найдена из системы уравнений

$$\left[\frac{\partial M(\vec{L})}{\partial L_i} \right]_{\vec{L}_m} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p. \quad (12)$$

Если выполняются условия высокой апостериорной точности оценки (10), то, аналогично (6), можем из (12) получить систему уравнений для случайных ошибок измерения $\Delta L_k = L_{mk} - L_{0k}$

$$-\sum_{k=0}^p \left[\frac{\partial^2 S(\vec{L})}{\partial L_i \partial L_k} \right]_{\vec{L}_0} \Delta L_k = \left[\frac{\partial N(\vec{L})}{\partial L_i} \right]_{\vec{L}_0}, \quad i = 0, 1, \dots, p. \quad (13)$$

Здесь $S(\vec{L}) = \langle M(\vec{L}) \rangle$, $N(\vec{L}) = M(\vec{L}) - S(\vec{L})$. Определяя из (13) ошибку измерения параметра l , имеем

$$\Delta l = \Omega^{-1} \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial N(\vec{L})}{\partial L_i} \right]_{\vec{L}_0} A_{i0}, \quad (14)$$

где Ω — определитель порядка $p+1$ с элементами

$$\omega_{ik} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial L_i \partial L_k} \left[\int_0^T \int_0^T \left\{ s(t_1, l) s(t_2, l_0) - \frac{1}{2} [K(t_1 - t_2, \vec{\lambda}_0) + s(t_1, l_0) s(t_2, l_0) + s(t, l) s(t_2, l)] \right\} \Theta(t_1, t_2, \vec{\lambda}) dt_1 dt_2 - \frac{1}{2} D(\vec{\lambda}) \right] \right)_{\vec{L}_0}, \quad i, k = 0, 1, \dots, p, \quad (15)$$

а A_{i0} — алгебраические дополнения i -го элемента первого столбца определителя Ω . Выполняя дифференцирование в (15), получаем

$$\omega_{00} = \left[\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \Theta(t_1, t_2, \vec{\lambda}_0) dt_1 dt_2 \right]_{l_0},$$

$\omega_{i0} = \omega_{0i} = 0$ при $i \neq 0$. Следовательно, $\Omega = \omega_{00} A_{00}$ и выражение (14) переписывается как

$$\Delta l = \omega_{00}^{-1} \left[\frac{\partial N(l, \vec{\lambda}_0)}{\partial l} \right]_{l_0},$$

что совпадает с (8). Следовательно, если функция корреляции шума содержит конечное число неизвестных параметров, то оценка параметра сигнала при выполнении условий (10) несмещенная и имеет дисперсию (9).

Рассмотрим случай, когда функция корреляции шума полностью неизвестна. Будем считать, что априори неизвестная функция корреляции на интервале $[-T, T]$ может быть представлена в виде ряда по системе ортонормированных функций $b_k(t)$, т. е.

$$K(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k(\tau); \quad a_k = \int_{-T}^T K(\tau) b_k(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Положим, что система функций $b_k(t)$ является полной и ряд (16) сходится в среднем. Задавшись достаточно большим числом p членов разложения в (16), можем записать приближенное равенство

$$K(\tau) \simeq K_p(\tau, \vec{a}) = \sum_{k=1}^p a_k b_k(\tau), \quad (17)$$

где $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_p]$ — неизвестные коэффициенты разложения функции корреляции. Логарифм функционала отношения правдоподобия параметров $\vec{L} = [l, a_1, \dots, a_p]$ аналогично (11) имеет вид

$$M(\vec{L}) = \int_0^T \int_0^T \left\{ s(t_1, l) x(t_2) - \frac{1}{2} [x(t_1) x(t_2) + s(t_1, l) s(t_2, l)] \right\} \times \\ \times \Theta_p(t_1, t_2, \vec{a}) dt_1 dt_2 - \frac{1}{2} D_p(\vec{a}).$$

Здесь $\Theta_p(t_1, t_2, \vec{a})$ — решение уравнения

$$\int_0^T K_p(t_1 - t, \vec{a}) \Theta_p(t_1, t_2, \vec{a}) dt = \delta(t_1 - t_2), \quad (18)$$

а $D_p(\vec{a})$ определяется соотношениями

$$\frac{\partial D_p(\vec{a})}{\partial a_k} = \int_0^T \int_0^T b_k(t_1 - t_2) \Theta_p(t_1, t_2, \vec{a}) dt_1 dt_2.$$

Считаем, что решение уравнения (18) существует при любых p .

Записав систему уравнений правдоподобия и полагая, что выполняются условия высокой апостериорной точности оценки (10), аналогично (14) получаем выражение для случайной ошибки измерения параметра l

$$\Delta l = \left[\frac{\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} n(t_2) \Theta_p(t_1, t_2, \vec{a}) dt_1 dt_2}{\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \Theta_p(t_1, t_2, \vec{a}) dt_1 dt_2} \right]_{l_0}. \quad (19)$$

Согласно (19) оценка параметра l несмещенная, а дисперсия оценки определяется выражением

$$\sigma_p^2 = \left\{ \frac{\int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_3, l)}{\partial l} K(t_2, t_4) \Theta_p(t_1, t_2, \vec{a}) \Theta_p(t_3, t_4, \vec{a}) \prod_{i=1}^4 dt_i}{\left[\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \Theta_p(t_1, t_2, \vec{a}) dt_1 dt_2 \right]^2} \right\}_{l_0}. \quad (20)$$

Покажем, что, если ряд (16) сходится в среднем и выполняются условия высокой апостериорной точности оценки (10), то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \sigma_0^2, \quad (21)$$

где

$$\sigma_0^2 = \left[\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \Theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right]^{-1}_{l_0}$$

— дисперсия оценки максимального правдоподобия параметра l при приеме на фоне нормального шума с априори известной функцией корреляции $K(\tau)$, а $\Theta(t_1, t_2)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t_1 - t) \Theta(t, t_2) dt = \delta(t_1 - t_2). \quad (22)$$

Обозначим $\Delta K_p(\tau) = K(\tau) - K_p(\tau, \vec{a})$, $\Delta \Theta(t_1, t_2) = \Theta(t_1, t_2) - \Theta_p(t_1, t_2, \vec{a})$ и перепишем выражение (20) в виде:

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma_0^{-2} + A_p - 2B_p}{[\sigma_0^2 - B_p]^2},$$

$$A_p = \left[\int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_3, l)}{\partial l} K(t_2, t_4) \Delta \Theta(t_1, t_2) \Delta \Theta(t_3, t_4) \prod_{i=1}^4 dt_i \right]_{l_0},$$

$$B_p = \left[\int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t_1, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \Delta \Theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right]_{l_0}.$$

Подставляя в (22) $\Theta(t_1, t_2) = \Theta_p(t_1, t_2, \vec{a}) + \Delta \Theta(t_1, t_2)$ и $K(\tau) = K_p(\tau, \vec{a}) + \Delta K_p(\tau)$, получаем, используя (18), что

$$\int_0^T K(t_1 - t) \Delta \Theta(t, t_2) dt = - \int_0^T \Delta K_p(t_1 - t) \Theta_p(t, t_2, \vec{a}) dt. \quad (23)$$

Умножим равенство (23) на функцию

$$\left[\frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_3, l)}{\partial l} \Delta \Theta(t_1, t_2) \right]_{l_0}$$

и проинтегрируем его по t_1, t_2, t_3 . Придем к выражению

$$A_p = - \left[\int_0^T \int_0^T \int_0^T \Delta K_p(t_1 - t_4) \Theta_p(t_4, t_2, \vec{a}) \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_3, l)}{\partial l} \Delta \Theta(t_1, t_3) \prod_{i=1}^4 dt_i \right]_{l_0}. \quad (24)$$

Умножая затем правую и левую части (23) на функцию

$$\left[\frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_3, l)}{\partial l} \Theta(t_1, t_3) \right]_{l_0}$$

и интегрируя полученное равенство по t_1, t_2, t_3 , можем записать, учитывая (22), что

$$B_p = - \left[\int_0^T \int_0^T \int_0^T \Delta K_p(t_1 - t_4) \Theta_p(t_4, t_2, \vec{a}) \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_3, l)}{\partial l} \Theta(t_1, t_3) \prod_{i=1}^4 dt_i \right]_{l_0}. \quad (25)$$

Выполним в (24) и (25) замену переменной интегрирования $t_4 = t_1 - \tau$. Получим

$$A_p = \int_{-T}^T \Delta K_p(\tau) \Psi_1(\tau) d\tau, \quad B_p = \int_{-T}^T \Delta K_p(\tau) \Psi_2(\tau) d\tau, \quad (26)$$

где

$$\Psi_1(\tau) = - \left[\int_0^T \int_0^T \int_0^T \Theta_p(t_1 - \tau, t_2, \vec{a}) \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_3, l)}{\partial l} \Delta \Theta(t_1, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \right]_{l_0},$$

$$\Psi_2(\tau) = - \left[\int_0^T \int_0^T \int_0^T \Theta_p(t_1 - \tau, t_2, \vec{a}) \frac{\partial s(t_2, l)}{\partial l} \frac{\partial s(t_3, l)}{\partial l} \Theta(t_1, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \right]_{l_0}.$$

Следовательно, если ряд (16) сходится в среднем, то согласно (26) $\lim_{p \rightarrow \infty} A_p = \lim_{p \rightarrow \infty} B_p = 0$, что доказывает справедливость (21).

Таким образом, если выполняются условия высокой апостериорной точности оценки, то, увеличивая число p членов в разложении (17), можем сделать дисперсию оценки параметра l при приеме на фоне нормального шума с неизвестной функцией корреляции достаточно близкой к дисперсии оценки максимального правдоподобия при приеме сигнала на фоне нормального шума с известной функцией корреляции.

В заключение отметим, что время приема в случае шума с неизвестной функцией корреляции целесообразно выбирать максимально возможным, хотя бы и значительно превосходящим длительность полезного

сигнала. При оптимальном приеме сигнала на фоне шума с известной функцией корреляции увеличение времени приема сверх длительности полезного сигнала нецелесообразно [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Е. И., Трифонов А. П., Квазиоптимальная оценка параметра сигнала при приеме на фоне нормальных шумов с неизвестной функцией корреляции, Радиотехника, 1969, 24, № 10.
2. Фалькович С. Е., Оценка параметров сигнала, Изд-во «Советское радио», 1970.
3. Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, Изд-во «Советское радио», 1968, 2.
4. Сысоев П. П., Оценки параметров, обнаружение и различение сигналов, Изд-во «Наука», 1969.
5. Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, Изд-во «Советское радио», 1966.

Поступила в редакцию
6 XII 1971 г.,
после переработки
5 V 1972 г.