(31)

(31)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА · 1973

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
№ 6 1973

О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АПОСТЕРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО ШУМА

В. К. МАРШАКОВ, А. П. ТРИФОНОВ

(*Воронеж*)

1. Как известно [1], структура оптимального приемного устройства и характеристики оптимальных оценок в значительной степени определяются видом апостериорного распределения оцениваемого параметра. В [2] исследуются свойства апостериорного распределения при дискретном отборе данных и доказывается, что с увеличением объема выборки апостериорное распределение стремится к нормальному. В случае непрерывной обработки данных, что обычно имеет место в практических задачах, как правило, интересуются асимптотическим поведением апостериорного распределения при больших отношениях сигнал/шум. Так, в [3, 4] показывается, что для больших отношений сигнал/шум апостериорное распределение можно приближенно считать нормальным. При этом анализ апостериорного распределения проводится лишь на основе качественных рассуждений, которые не позволяют достаточно полно сформулировать условия асимптотической нормальности апостериорного распределения. В связи с этим определенный интерес представляет рассмотрение асимптотических свойств апостериорного распределения при непрерывной обработке данных и неограниченном увеличении отношения сигнал/шум.

Представим реализацию принимаемых данных $x(t)$ при $0\leqslant t\leqslant T$ в виде $x(t)=n(t)+s(t,\ l_0)$, где $n(t)$ — реализация нормального случайного процесса с нулевым средним значением $M[n(t)]=0$ и функцией корреляции $M[n(t_1)n(t_2)]=K(t_1,\ t_2)$; $s(t,\ l_0)$ — сигнал, содержащий неизвестный параметр l_0, распределенный с плотностью вероятности $\pi(l)$ на интервале $[-1;\ 1]$. Тогда апостериорная функция распределения оцениваемого параметра равна [5]:

$$F(l)=\frac{\int\limits_{-1}^{l}\pi(l)\exp[z^2\lambda(l)]\,dl}{\int\limits_{-1}^{1}\pi(l)\exp[z^2\lambda(l)]\,dl}, \tag{1.1}$$

где $\lambda(l)=z^{-2}\int\limits_0^T[x(t)-{}^1/_2 s(t,\ l)]v(t,\ l)\,dt$ — нормированный логарифм функционала отношения правдоподобия; $z^2\equiv z^2(l_0)=\int\limits_0^T s(t,\ l_0)v(t,\ l_0)\,dt$ — отношение сигнал/шум для принятого сигнала; $v(t,\ l)$ — решение уравнения $\int\limits_0^T K(t,\ \tau)v(\tau,\ l)\,d\tau=s(t,\ l)$, $t\in[0;\ T]$, $l\in[-1;\ 1]$. Функция $\lambda(l)$ представляет собой реализацию нестационарного нормального случайного процесса, для которого $M[\lambda(l)]\leqslant{}^1/_2$; $a_1/z^2\leqslant M\{\lambda(l)-M[\lambda(l)]\}^2\leqslant a_2/z^2$. Здесь усреднение выполняется по всевозможным реализациям шума $n(t)$ при фиксированном l_0, $a_1=\min z^2(l)/z^2$; $a_2=\max z^2(l)/z^2$; $l\in[-1;\ 1]$. При этом если $z(l)$ непрерывная функция, то a_1 и a_2 ограничены для любых z.

2. Докажем следующее утверждение. Пусть

а) l_m — оценка максимального правдоподобия параметра l, причем $|l_m|<1$; б) плотность вероятности $\pi(l)$ имеет четыре непрерывные производные и $\pi(l_m)\neq 0$; в) реализация нормального случайного процесса $\lambda(l)$ четырежды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1. Тогда, если для некоторого l_0 $z\to\infty$, функция распределения случайной величины $\xi=(l-\hat{l})/\sigma$ с вероятностью 1 сходится к нормальной с параметрами (0; 1). Здесь

$$\hat{l}=l_m+z^{-2}[\lambda'''(l)/2\lambda''^2(l)-\pi'(l)/\pi(l)\lambda''(l)]_{l_m},\quad \sigma^2=[-z^2\lambda''(l_m)]^{-1}. \tag{2.1}$$

Поскольку оценка максимального правдоподобия l_m представляет собой положение абсолютного максимума реализации $\lambda(l)$ и предполагается $|l_m|<1$, то с вероятностью 1 $\lambda'(l_m)=0$ и $\lambda''(l_m)<0$ [6]. Используя (1.1) и обозначая $\Delta(l)=\lambda(l_m)-\lambda(l)$, представим логарифм апостериорной характеристической функции в виде

$$\ln\theta(u)=jul_m+\ln\frac{\int\pi(l)\exp[ju(l-l_m)-z^2\Delta(l)]\,dl}{\int\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl}. \tag{2.2}$$

Здесь и далее, где не указаны пределы интегрирования, интегрирование по l ведется в пределах $[-1;\ 1]$. Поскольку $\Delta(l)$ непрерывна с вероятностью 1, интегралы в (2.2) существуют с той же вероятностью, как обычные интегралы Римана от реализации случайного процесса [7]. Воспользовавшись формулой Тейлора, перепишем (2.2) как

$$\ln\theta(u)=\left[\frac{d\ln\theta(u)}{du}\right]_{u=0}u+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\ln\theta(u)}{du^2}\right]_{u=0}u^2+$$
$$+\frac{1}{6}\left[\frac{d^3\ln\theta(u)}{du^3}\right]_{u=u^*}u^3,\quad u^*\in[0,u]. \tag{2.3}$$

Здесь

$$\left[\frac{d\ln\theta(u)}{du}\right]_{u=0}=j\left[l_m+\frac{\int(l-l_m)\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl}{\int\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl}\right], \tag{2.4}$$

$$\left[\frac{d^2\ln\theta(u)}{du^2}\right]_{u=0}=-\left\{\frac{\int(l-l_m)^2\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl}{\int\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl}-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\int(l-l_m)\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl}{\int\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl}\right]^2\right\},$$

$$\left[\frac{d^3\ln\theta(u)}{du^3}\right]_{u=u^*}=-j\left\{\frac{\int(l-l_m)^3\pi(l)\exp[ju(l-l_m)-z^2\Delta(l)]\,dl}{\int\pi(l)\exp[ju(l-l_m)-z^2\Delta(l)]\,dl}+\right.$$
$$+2\left[\frac{\int(l-l_m)\pi(l)\exp[ju(l-l_m)-z^2\Delta(l)]\,dl}{\int\pi(l)\exp[ju(l-l_m)-z^2\Delta(l)]\,dl}\right]^3-$$
$$\left.-3\,\frac{\left[\int(l-l_m)^2\pi(l)\exp[ju(l-l_m)-z^2\Delta(l)]\,dl\right]\times\left[\int(l-l_m)\pi(l)\exp[ju(l-l_m)-z^2\Delta(l)]\,dl\right]}{\left[\int\pi(l)\exp[ju(l-l_m)-z^2\Delta(l)]\,dl\right]^2}\right\}_{u=u^*}.$$

Так как $\Delta(l)>0$, когда $l\neq l_m$, а $\Delta(l_m)=0$, подынтегральные функции в (2.4) абсолютно интегрируемы на интервале $[-1;\ 1]$ для любых z и u. К тому же если $|l_m|<1$, то $\Delta'(l_m)=-\lambda'(l_m)=0$ и $\Delta''(l_m)=-\lambda''(l_m)>0$. Таким образом, для интегралов в (2.4) с вероятностью 1 выполняются все условия применимости асимптотической формулы Лапласа [8]. Следовательно, при $z\to\infty$ с той же вероятностью имеем

$$\left[\frac{d\ln\theta(u)}{du}\right]_{u=0}=j\left\{l_m+z^{-2}\left[\frac{\lambda'''(l)}{2\lambda''^2(l)}-\frac{\pi'(l)}{\pi(l)\lambda''(l)}\right]_{l_m}+O(z^{-4})\right\}=j\,[\hat{l}+O(z^{-4})],$$

$$\left[\frac{d^2\ln\theta(u)}{du^2}\right]_{u=0}=-\{[-z^2\lambda''(l_m)]^{-1}+O(z^{-4})\}=-[\sigma^2+O(z^{-4})],$$

$$\left[\frac{d^3\ln\theta(u)}{du^3}\right]_{u=u^*}=j\left[\frac{\lambda'''(l_m)}{z^4\lambda''^3(l_m)}+O(z^{-6})\right].$$

Подставляя асимптотические значения коэффициентов разложения в (2.3) и переходя к характеристической функции $\theta_0(u)$ нормированной переменной ξ, находим

$$\theta_0(u)=\exp\left[-\frac{1}{2}u^2-j\frac{u^3\lambda'''(l_m)}{6z\,[-\lambda''(l_m)]^{3/2}}+O(z^{-2})\right]. \qquad (2.5)$$

Согласно (2.5) при $z\to\infty$, $\theta_0(u)\to\theta_0^*(u)=\exp[-{}^1/_2u^2]$, а функция распределения нормированной случайной величины ξ по мере увеличения отношения сигнал/шум сходится к нормальной с параметрами (0; 1).

3. Рассмотрим теперь случай, когда оценка максимального правдоподобия l_m принимает одно из двух граничных значений ±1. Известно [9], что это событие имеет место с конечной вероятностью, хотя и убывающей с увеличением отношения сигнал/шум. Докажем следующее утверждение. Пусть:

а) плотность вероятности $\pi(l)$ непрерывна и $\pi(l_m)\neq0$;

б) реализация нормального случайного процесса $\lambda(l)$ дважды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1. Тогда если для некоторого l_0 $z\to\infty$, то при $l_m=-1$ функция распределения случайной величины $\xi_-=(l+1)[-\lambda'(-1)z^2]$ сходится к

$$F_-(x)=\begin{cases}1-\exp(-x), & x\geqslant0,\\ 0, & x<0,\end{cases} \qquad (3.1)$$

а при $l_m=+1$ функция распределения случайной величины $\xi_+=(l-1)\lambda'(1)z^2$ сходится к

$$F_+(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ \exp(x), & x\leqslant0.\end{cases} \qquad (3.2)$$

Когда $l_m=-1$, характеристическую функцию случайной величины ξ_- можно представить в виде

$$\theta_-(u)=\frac{\int\pi(l)\exp[ju(l+1)z^2\Delta'(-1)-z^2\Delta(l)]\,dl}{\int\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl}. \qquad (3.3)$$

Аналогично п. 2 нетрудно показать, что с вероятностью 1 $\lambda'(-1)<0$, а $\Delta'(-1)>0$. Следуя [10], рассмотрим асимптотическое поведение интеграла в числителе (3.3). Так как $\Delta(-1)=0$ и $\Delta(l)>0$ при $l>-1$, то в силу непрерывности $\Delta(l)$ и $\Delta'(l)$ можно найти такие $\alpha>0$ и $\delta>0$, что $\Delta(l)>\delta$, если $-1+\alpha<l<1$, и $\Delta'(l)>0$, если $-1<l<-1+\alpha$. При этом

$$\left|\int\limits_{-1+\alpha}^{1}\pi(l)\exp[ju(l+1)z^2\Delta'(-1)-z^2\Delta(l)]\,dl\right|\leqslant\exp[-z^2\delta]=o(z^{-2}). \qquad (3.4)$$

На интервале $[-1;\ -1+\alpha]$ введем новую переменную $p=\Delta(l)$ и положим $b(p)=(\pi(l)/\Delta'(l))\exp[ju(l+1)z^2\Delta'(-1)]$, $p_0=\Delta(-1+\alpha)>0$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{-1+\alpha}\pi(l)\exp[ju(l+1)z^2\Delta'(-1)-z^2\Delta(l)]\,dl=\int\limits_0^{p_0}b(p)\exp[-z^2p]\,dp.$$

Поскольку $p=\int\limits_{-1}^{l}\Delta'(l)\,dl\sim(l+1)\Delta'(-1)$ при $l\to-1$, то для $p\to0$ имеем $b(p)\sim(\pi(-1)/\Delta'(-1))\exp[jupz^2]$. Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{-1+\alpha}\pi(l)\exp[ju(l+1)z^2\Delta'(-1)-z^2\Delta(l)]\,dl\sim\frac{\pi(-1)}{z^2\Delta'(-1)(1-ju)}. \tag{3.5}$$

Согласно (3.4) и (3.5), получаем, когда $z\to\infty$

$$\int\pi(l)\exp[ju(l+1)z^2\Delta'(-1)-z^2\Delta(l)]\,dl\sim\frac{\pi(-1)}{z^2\Delta'(-1)(1-ju)}. \tag{3.6}$$

Для интеграла в знаменателе (3.3), непосредственно применяя асимптотическую формулу Лапласа [10], имеем при $z\to\infty$

$$\int\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl\sim\frac{\pi(-1)}{z^2\Delta'(-1)}. \tag{3.7}$$

Умножая числитель и знаменатель (3.3) на z^2 и используя асимптотические соотношения (3.6) и (3.7), получаем, что для $z\to\infty$

$$\theta_-(u)\to(1-ju)^{-1}, \tag{3.8}$$

откуда непосредственно следует (3.1).

Если $l_m=+1$, то характеристическую функцию случайной величины ξ_+ запишем как

$$\theta_+(u)=\frac{\int\pi(l)\exp[-ju(l-1)z^2\Delta'(1)-z^2\Delta(l)]\,dl}{\int\pi(l)\exp[-z^2\Delta(l)]\,dl}. \tag{3.9}$$

Замечая, что с вероятностью 1 $\Delta'(1)<0$ и исследуя поведение интегралов в числителе и знаменателе (3.9), аналогично (3.8), находим, что при $z\to\infty$ $\theta_+(u)\to(1+ju)^{-1}$ и формула (3.2) верна.

4. Условия в) **п. 2** и б) **п. 3** требуют определенной регулярности реализации нестационарного нормального случайного процесса $\lambda(l)$, среднее значение и функция корреляции которого соответственно равны

$$M[\lambda(l)]=S(l_0,l)-{}^1/_2S(l,l),$$
$$M[\{\lambda(l_1)-M[\lambda(l_1)]\}\{\lambda(l_2)-M[\lambda(l_2)]\}]=z^{-2}S(l_1,l_2).$$

Здесь $S(l_1,l_2)=z^{-2}\int\limits_0^T s(t,l_1)\,v(t,l_2)\,dt=z^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T s(t_1,l_1)\,s(t_2,l_2)\,\theta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2$,

а функция $\theta(t_1,t_2)$ определяется из уравнения $\int\limits_0^T K(t_1,\tau)\theta(\tau,t_2)\,d\tau=$ $=\delta(t_1-t_2)$. Чтобы реализация $\lambda(l)$ была четырежды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1, достаточно, чтобы среднее значение $M[\lambda(l)]$ было четырежды непрерывно дифференцируемо при всех l_0, а восьмая смешанная производная функции корреляции $q(l_1,l_2)=\partial^8S(l_1,l_2)/\partial l_1^4\partial l_2^4$ удовлетворяла для некоторых постоянных $c>0$, $r>3$ и достаточно малых k соотношению [7]

$$q(l+k,l+k)-2q(l,l+k)+q(l,l)\leqslant c/|\ln|k||^r. \tag{4.1}$$

Очевидно, если существует $q(l_1,l_2)$, то среднее значение $M[\lambda(l)]$ будет четырежды непрерывно дифференцируемо по l при любом фиксированном l_0. Соотношение (4.1) всегда выполняется, если существуют и непрерывны по l интегралы $\int\limits_0^T\int\limits_0^T\frac{\partial^n s(t_1,l)}{\partial l^n}\frac{\partial^i s(t_2,l)}{\partial l^i}\theta(t_1,t_2)\,dt_1dt_2$ при $i,\ n=0,\ 1,\dots,9$, $i+n\leqslant9$. Таким образом, чтобы реализация $\lambda(l)$ была четырежды непрерывно дифференцируема с вероятностью 1, достаточно существования девяти непрерывных производных по l сигнала $s(t, l)$ при $t \in [0, T]$ и $l \in [-1; 1]$. Аналогично можно показать, что для выполнения условия б) п. 3 достаточно существования пяти непрерывных производных по l сигнала $s(t, l)$.

Если же функция корреляции шума $n(t)$ при малых τ удовлетворяет условию

$$K(t+\tau, t+\tau) - 2K(t, t+\tau) + K(t, t) \leqslant \frac{c_1}{|\ln|\tau/T||^{r_1}},$$

где $c_1 \geqslant 0$, $r_1 > 3$ – некоторые постоянные, то так же, как и в [11], нетрудно получить, что для выполнения условий в) **п. 2** и б) **п. 3** достаточно существования соответственно четырех и двух непрерывных производных по l сигнала $s(t, l)$.

Достаточные условия, при которых имеет место неограниченное увеличение отношения сигнал/шум, зависят от характера оцениваемого параметра [6].

5. Проведенный анализ апостериорного распределения оцениваемого параметра при неограниченном увеличении отношения сигнал/шум позволяет исследовать некоторые асимптотические свойства байесовских оценок. Поскольку предполагается, что априорная плотность вероятности $\pi(l)$ непрерывна, то $l_0 = \pm 1$ с нулевой вероятностью. Следовательно, вероятность события $l_m = \pm 1$ с увеличением отношения сигнал/шум убывает [9, 12]. Поэтому, а также, чтобы избежать громоздких выкладок, при $z \to \infty$ апостериорную плотность вероятности $W^*(l)$ будем приближенно считать нормальной с параметрами $(\hat{l}; \sigma^2)$. Таким образом, для любой симметричной функции потерь $C(\gamma, l)$ предельное значение байесовской оценки $\gamma_m = \hat{l}$ [1]. Причем, если отношение сигнал/шум достаточно велико, то (2.1)

$$\gamma_m \simeq l_m. \tag{5.1}$$

Согласно (5.1), в практических задачах вместо байесовской оценки можно использовать оценку максимального правдоподобия. При этом для больших, но не бесконечных z, замена байесовской оценки оценкой максимального правдоподобия будет приводить к некоторому ухудшению качества оценки параметра сигнала. Это ухудшение удобно характеризовать относительной разницей между средними потерями оценки максимального правдоподобия и байесовской оценки, т.е. величиной

$$\delta R(l_0) = \frac{M\{\int [C(l_m, l) - C(\hat{l}, l)]\, W^*(l)\, dl\}}{M[\int C(\hat{l}, l)\, W^*(l)\, dl]}. \tag{5.2}$$

Здесь усреднение выполняется по всевозможным реализациям шума $n(t)$ при фиксированном l_0. Вычислим (5.2) для некоторых распространенных функций потерь. При квадратичной функции потерь $C(\gamma, l) = C_0(\gamma - l)^2$, выражение (5.2) принимает вид

$$\delta R_1(l_0) = M[\varepsilon^2]/M[\sigma^2], \tag{5.3}$$

где $\varepsilon = z^{-2}[(\lambda'''(l)/2\lambda''^2(l)) - (\pi'(l)/\pi(l)\lambda''(l))]_{l_m}$. Разложим функцию в правой части (5.3) в ряд Тейлора по l_m в окрестности точки l_0. Поскольку для больших отношений сигнал/шум [3, 5] $l_m = l_0 + \varkappa / z\sqrt{S_2(l_0)} + O(z^{-2})$, где

$$S_2(l_0) = [\partial^2 S(l_1, l_2)/\partial l_1 \partial l_2]_{l_0}, \tag{5.4}$$

а $\varkappa$ – нормальная случайная величина с параметрами (0; 1), то после усреднения в (5.3) получаем

$$\delta R_1(l_0) = \sigma_0^2(l_0) \left[\frac{\pi'(l_0)}{\pi(l_0)} - \frac{3}{2} \frac{S_3(l_0)}{S_2(l_0)} \right]^2 + O(z^{-4}). \tag{5.5}$$

Здесь $\sigma_0^2(l_0) = 1/z^2 S_2(l_0)$ – дисперсия эффективной оценки [5], а

$$S_3(l_0) = [\partial^3 S(l_1, l_2)/\partial l_1^2 \partial l_2]_{l_0}. \tag{5.6}$$

Если симметричная функция потерь $C(\gamma, l)$ может быть представлена в виде ряда Тейлора $C(\gamma, l)=[C(\gamma, l)]_{l=\gamma}+{}^1/_2[\partial^2 C(\gamma, l)/\partial l^2]_{l=\gamma}(l-\gamma)^2+\ldots$, то, полагая $[C(\gamma, l)]_{l=\gamma}=0$, приходим также к выражению (5.5). Для функции потерь $C(\gamma, l)=C_0|\gamma-l|$, равной модулю ошибки, из (5.2) находим

$$\delta R_2(l_0)=\frac{M\{\sigma[\exp(-\varepsilon^2/2\sigma^2)-1]+\varepsilon\sqrt{\pi/2}\,[2\Phi(\varepsilon/\sigma)-1]\}}{M[\sigma]}, \tag{5.7}$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$. Отбрасывая в (5.7) члены порядка малости z^{-4} и менее, имеем

$$\delta R_2(l_0)=M[\varepsilon^2/\sigma]/2M[\sigma]+O(z^{-4}). \tag{5.8}$$

Используя разложение Тейлора аналогично (5.5), из (5.8) получаем

$$\delta R_2(l_0)=\frac{\sigma_0^2(l_0)}{2}\left[\frac{\pi'(l_0)}{\pi(l_0)}-\frac{3}{2}\frac{S_3(l_0)}{S_2(l_0)}\right]^2+O(z^{-4}). \tag{5.9}$$

При прямоугольной функции потерь

$$C(\gamma, l)=\begin{cases}C_0, & |\gamma-l|>\eta\\ 0, & |\gamma-l|\leqslant\eta\end{cases}$$

выражение (5.2) принимает вид

$$\delta R_3(l_0)=\frac{M\left[\Phi\left(\frac{\eta}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\eta+\varepsilon}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\eta-\varepsilon}{\sigma}\right)\right]}{M\left[1-\Phi\left(\frac{\eta}{\sigma}\right)\right]}. \tag{5.10}$$

Учитывая асимптотическое поведение $\Phi(x)$ при $x\gg 1$ и выполняя в (5.10) усреднение, находим

$$\delta R_3(l_0)=\mathrm{ch}\left\{\eta\left[\frac{\pi'(l_0)}{\pi(l_0)}-\frac{3}{2}\frac{S_3(l_0)}{S_2(l_0)}\right]\right\}-1+O(z^{-1}). \tag{5.11}$$

Выражения (5.5), (5.9) и (5.11) позволяют приближенно оценить скорость сходимости байесовских оценок к оценке максимального правдоподобия для рассмотренных функций потерь. Как следует из этих выражений, при непрерывных функциях потерь величина $\delta R(l_0)$ убывает с ростом отношения сигнал/шум как z^{-2}. Для прямоугольной функции потерь величина $\delta R(l_0)$ при достаточно больших z не зависит от отношения сигнал/шум, а определяется величиной η, априорным распределением оцениваемого параметра, видом функции корреляции шума и формой сигнала.

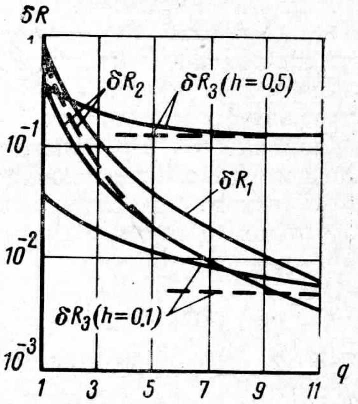
Ухудшение качества при замене байесовской оценки оценкой максимального правдоподобия можно также характеризовать величиной относительной разницы δR между безусловными рисками этих оценок. Для вычисления величины δR необходимо в (5.2) проводить усреднение и по истинным значениям параметра l_0. Так, если $z=\nu\psi(l_0)$, где $\psi(l_0)>0$ и ограничено для всех $l_0\in[-1; 1]$, а $\nu\to\infty$, то нетрудно показать, что

$$\delta R_1=\frac{\int\pi(l)\left[\frac{\pi'(l)}{\pi(l)}-\frac{3}{2}\frac{\hat S_3(l)}{\hat S_2(l)}\right]^2\sigma_0^4(l)\,dl}{\int\pi(l)\,\sigma_0^2(l)\,dl}+O(\nu^{-4}), \tag{5.12}$$

$$\delta R_2=\frac{\int\pi(l)\left[\frac{\pi'(l)}{\pi(l)}-\frac{3}{2}\frac{\hat S_3(l)}{\hat S_2(l)}\right]^2\sigma_0^3(l)\,dl}{2\int\pi(l)\,\sigma_0(l)\,dl}+O(\nu^{-4}), \tag{5.13}$$

$$\delta R_3 = \frac{\int \pi(l)\,\sigma_0(l) \exp\left[-\eta^2/2\sigma_0^2(l)\right] \left\{ \operatorname{ch}\left(\eta \left[\frac{\pi'(l)}{\pi(l)} - \frac{3}{2}\,\frac{\hat{S}_3(l)}{\hat{S}_2(l)} \right] \right) - 1 \right\} dl}{\int \pi(l)\,\sigma_0(l) \exp\left[-\eta^2/2\sigma_0^2(l)\right] dl} + \\ + O(\nu^{-1}). \tag{5.14}$$

Здесь $\hat{S}_2(l)$ и $\hat{S}_3(l)$ определяются из (5.4) и (5.6) при подстановке в них ненормированной функции $\hat{S}(l_1, l_2) = \int\limits_0^T s(t, l_1)\, v(t, l_2)\, dt$. Если же отношение сигнал/шум z не зависит от конкретного значения оцениваемого параметра (временное положение сигнала, начальная фаза и др.) [13], то формулы (5.12)—(5.14) упрощаются и принимают вид



$$\delta R_1 = \sigma_0^2 \int \frac{\pi'^2(l)}{\pi(l)}\, dl + O(z^{-4}),$$

$$\delta R_2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \int \frac{\pi'^2(l)}{\pi(l)}\, dl + O(z^{-4}),$$

$$\delta R_3 = \int \pi(l) \operatorname{ch}\left[\eta\, \frac{\pi'(l)}{\pi(l)} \right] dl - 1 + O(z^{-1}). \tag{5.15}$$

6. Для иллюстрации полученных соотношений рассмотрим оценку амплитуды a сигнала $a_0 s(t)$. Отношение сигнал/шум при этом можно записать как $z^2 = a_0^2 \nu^2$, где $\nu^2 = \int\limits_0^T s(t)\, v(t)\, dt$ — отношение сигнал/шум для сигнала единичной амплитуды. Положим, что априорное распределение амплитуды a нормальное с дисперсией $\sigma_a^2 \ll 1$, так что $\int\limits_{-\infty}^{-1} \pi(a)\, da \ll 1$ и $\int\limits_1^{\infty} \pi(a)\, da \ll 1$. Тогда, если $\nu \to \infty$, из (5.12)—(5.14) получаем

$$\delta R_1 \simeq 1/q^2, \quad \delta R_2 \simeq 1/2q^2, \quad \delta R_3 \simeq \exp(h^2/2) - 1, \tag{6.1}$$

где $q = \nu\sigma_a$, $h = \eta/\sigma_a$. В простой задаче оценки амплитуды, используя результаты [1], для величин δR_i можно получить точные выражения, справедливые при любых отношениях сигнал/шум

$$\delta R_1 = 1/q^2, \quad \delta R_2 = \sqrt{1 + 1/q^2} - 1, \quad \delta R_3 = \frac{\Phi\left[qh\sqrt{1 + 1/q^2}\right] - \Phi(qh)}{1 - \Phi\left(qh\sqrt{1 + 1/q^2}\right)}. \tag{6.2}$$

Зависимости δR_i от величины q приведены на фигуре. Сплошными линиями изображены зависимости $\delta R_i(q)$, рассчитанные по точным формулам (6.2), а пунктиром нанесены зависимости $\delta R_i(q)$, рассчитанные по асимптотическим формулам (6.1). Для прямоугольной функции потерь $\delta R_3(q)$ представлена при двух значениях параметра h. Как видно из фигуры, зависимости $\delta R_i(q)$, рассчитанные по формулам (6.2), хорошо аппроксимируются приближенными выражениями (6.1). Для прямоугольной функции потерь точность аппроксимации зависит от величины h и улучшается с ростом q.

Проиллюстрируем теперь зависимость δR от характера априорного распределения оцениваемого параметра. Положим, что отношение сигнал/шум z не зависит от истинного значения параметра l_0 и априорную плотность вероятности $\pi(l)$ можно представить в виде:

$$\pi(l) = \exp\left[A \cos \pi l\right] / 2 I_0(A), \quad l \in [-1; 1], \tag{6.3}$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Из (6.3) следует, что при $A=0$, $\pi(l)={}^1/_2$, т. е. априорное распределение параметра l равномерное. При увеличении A $\pi(l)$ становится более сконцентрированной и при $A\to\infty$ переходит в дельта-функцию. Таким образом, варьируя A, можно исследовать зависимость δR от «неравномерности» априорного распределения оцениваемого параметра. Используя (6.3) и (5.15), находим

$$\delta R_1=\sigma_0^2A\pi^2I_1(A)/I_0(A)+O(z^{-4}),\quad \delta R_2=\sigma_0^2A\pi^2I_1(A)/2I_0(A)+O(z^{-4}),$$

$$\delta R_3=I_0(A\sqrt{1+\pi^2\eta^2})/I_0(A)-1+O(z^{-1}),\tag{6.4}$$

где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка. Как следует из (6.4), при $A=0$ ($\pi(l)$ равномерна) величина δR для непрерывных функций потерь имеет порядок малости $O(z^{-4})$, а для прямоугольной функции потерь — $O(z^{-1})$. Когда $A\neq0$, порядок малости величины δR для непрерывных функций потерь становится равным $O(z^{-2})$, а величина δR_3 определяется значениями A и η. С увеличением A, т. е. с увеличением «неравномерности» априорного распределения $\pi(l)$, величина δR возрастает. Следовательно, с уменьшением априорной неопределенности относительно оцениваемого параметра может оказаться нецелесообразной замена байесовской оценки оценкой максимального правдоподобия.

Поступило 10 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, кн. 2. «Советское радио», 1962.
2. Ле Кам Л. О некоторых асимптотических свойствах оценок максимального правдоподобия и соответствующих байесовских оценок. Математика. Периодич. сб. перев. иностр. статей. Изд. иностр. лит., 1960, 4, 2.
3. Фалькович С. Е. Оценка параметров сигнала. «Советское радио», 1970.
4. Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. Госэнергоиздат, 1961.
5. Куликов Е. И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. «Советское радио», 1969.
6. Трифонов А. П. Об асимптотическом поведении байесовских оценок параметра сигнала при наличии нестационарного нормального шума. Пробл. передачи информ. 1972, 8, № 4.
7. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. «Мир», 1969.
8. Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. Изд. иностр. лит., 1961.
9. Seideman L. P. An upper bound on average estimation error in nonlinear systems. IEEE Trans. Inform. Theory, March, 1968, **IT-14**.
10. Эрдейи А. Асимптотические разложения. Физматгиз, 1962.
11. Трифонов А. П. Асимптотические характеристики оптимального обнаружения квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовой помехи. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1970, № 4.
12. Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. «Мир», 1969.
13. Куликов Е. И., Трифонов А. П. О некоторых свойствах сигнала на выходе оптимального приемника. Радиотехника и электроника, 1969, **13**, № 12.