(32)

(32)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том XIX

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1974

УДК 621.391.2

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БАЙЕСОВСКИХ ОЦЕНОК ПРИ НАЛИЧИИ НОРМАЛЬНОГО ШУМА

А. П. Трифонов

При нерандомизированном правиле выбора решения байесовская оценка γ_m для каждой реализации наблюдаемых данных выбирается из условия минимума апостериорного риска [1]

$$r(\gamma) = \int C(\gamma, l)\, W_{ps}(l)\, dl. \tag{1}$$

Здесь $C(\gamma, l)$ – функция потерь, $W_{ps}(l)$ – апостериорная плотность вероятности оцениваемого параметра. Если апостериорный риск (1) дифференцируем по γ, то байесовскую оценку получаем из уравнения

$$[dr(\gamma)/d\gamma]_{\gamma_m}=0. \tag{2}$$

Пусть при $0\leqslant t\leqslant T$ принимаемую смесь сигнала и помехи можно представить в виде $x(t)=a_0s(t,\ l_0,\ q_0)+n(t)$, где $n(t)$ – реализация нормального случайного процесса с нулевым средним значением и функцией корреляции $K(\tau)$, $a_0s(t,\ l_0,\ q_0)$ – полезный сигнал, амплитуда a_0 которого и неэнергетические параметры l_0, q_0 распределены с плотностями $W(a)$, $W(l)$ и $W(q)$ соответственно. Полагая, что в оценке параметров a_0 и q_0 нет необходимости (несущественные параметры), уравнение (2) перепишем как

$$\left\{\frac{d}{d\gamma}\iiint C(\gamma, l)\,W(l)\,W(a)\,W(q)\exp[aa_0z^2S(l_0, q_0, l, q)+ + azN(l, q)-a^2z^2/2]\,dl\,da\,dq\right\}_{\gamma_m}=0, \tag{3}$$

$S(l_0, q_0, l, q)=\int\limits_0^T s(t, l_0, q_0)\,v(t, l, q)\,dt/z^2$, $N(l, q)=\int\limits_0^T n(t)\,v(t, l, q)\,dt/z$ – нормированные сигнальная и шумовая функции, $z^2=\int\limits_0^T s(t,\ l,\ q)\,v(t,\ l,\ q)\,dt$ – отношение сигнал/шум для сигнала с единичной амплитудой, а $v(t,\ l,\ q)$ – решение уравнения

$$\int\limits_0^T K(t-\tau)\,v(\tau, l, q)\,d\tau = s(t, l, q). \tag{4}$$

Определим характеристики байесовской оценки γ_m при малых отношениях сигнал/шум, т. е. при $z\ll 1$. Рассматривая выражение в левой части (3) как функцию z, разложим эту функцию в ряд Маклорена. Отбрасывая члены разложения порядка малости z^4 и менее, приходим к уравнению

$$\left\{\frac{d}{d\gamma}[b_0(\gamma)+zb_1(\gamma)+z^2b_2(\gamma)+z^3b_3(\gamma)+O(z^4)]\right\}_{\gamma_m}=0, \tag{5}$$

$$b_0(\gamma)=\int C(\gamma, t)\,W(l)\,dl,\qquad b_1(\gamma)=a_{\text{pr}}\iint C(\gamma, l)\,N(l, q)\,W(l)\,W(q)\,dl\,dq,$$

$$b_2(\gamma)=a_0a_{\text{pr}}\iint C(\gamma, l)\,S(l_0, q_0, l, q)\,W(l)\,W(q)\,dl\,dq+ +\frac{1}{2}\int a^2W(a)\,da\iint C(\gamma, l)\,[N^2(l, q)-1]\,W(l)\,W(q)\,dl\,dq,$$

$$b_3(\gamma)=a_0\int a^2W(a)\,da\iint C(\gamma, l)\,S(l_0, q_0, l, q)\,N(l, q)\,W(l)\,W(q)\,dl\,dq+ +\frac{1}{2}\int a^3W(a)\,da\iint C(\gamma, l)\left[\frac{1}{3}N^2(l, q)-1\right]N(l, q)\,W(l)\,W(q)\,dl\,dq.$$

Здесь $a_{\text{pr}}=\int aW(a)\,da$ – априорное среднее значение амплитуды. Поскольку в уравнении (5) функции $b_i(\gamma)$ и их статистические характеристики не зависят от z, то в рассматриваемом приближении решение уравнения можно искать в виде

$$\gamma_m\simeq\gamma_0+z\gamma_1+z^2\gamma_2+z^3\gamma_3. \tag{6}$$

Величина γ_0 находится из уравнения

$$\left[\frac{d}{d\gamma}\int C(\gamma, l)\,W(l)\,dl\right]_{\gamma_0}=0$$

и зависит только от вида функции потерь и априорного распределения оцениваемого параметра. Для определения величин γ_1, γ_2, γ_3 разложим функцию в левой части (5) в ряд Тейлора по γ в окрестности точки γ_0. Затем подставим значение γ_m из (6) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях z. Решая полученные таким образом уравнения относительно γ_1, γ_2, γ_3, будем иметь

(7)
$$\gamma_1=-[b_1'(\gamma)/b_0''(\gamma)]_{\gamma_0},$$

$$\gamma_2=-\left\{\left[\frac{1}{2}b_0'''(\gamma)\gamma_1^2+b_1''(\gamma)\gamma_1+b_2'(\gamma)\right]\Big/ b_0''(\gamma)\right\}_{\gamma_0},$$

$$\gamma_3=-\left\{\left[b_0'''(\gamma)\gamma_1\gamma_2+\frac{1}{6}b_0^{\mathrm{IV}}(\gamma)\gamma_1^3+b_1''(\gamma)\gamma_2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}b_1'''(\gamma)\gamma_1^2+b_2''(\gamma)\gamma_1^2+b_3'(\gamma)\right]\Big/ b_0''(\gamma)\right\}_{\gamma_0}.$$

Подставляя (7) в (6), получаем приближенное значение байесовской оценки с точностью до величин порядка малости z^4.

Естественной характеристикой качества оценки является байесовский риск $R_m=\langle r(\gamma_m)\rangle\equiv R_m(z)$, равный минимальному значению среднего риска. Найдем приближенное значение байесовского риска, для чего используем (1), (6), (7). Разложив функцию $R_m(z)$ в ряд Маклорена и выполнив усреднение (по реализациям шума $n(t)$ и параметрам a_0, l_0, q_0), находим

(8)
$$R_m\left\{b_0(\gamma)-\frac{z^2a_{\mathrm{pr}}^2}{2b_0''(\gamma)}\frac{\partial^2 J(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}\right\}_{\gamma_0}+O(z^4),$$

$$J(\gamma_1,\gamma_2)=\iint C(\gamma_1,l_1)\,C(\gamma_2,l_2)\,G(l_1,l_2)\,W(l_1)\,W(l_2)\,dl_1\,dl_2,$$

$$G(l_1,l_2)=\iint S(l_1,q_1,l_2,q_2)\,W(q_1)\,W(q_2)\,dq_1\,dq_2.$$

В прикладных задачах кроме байесовского риска значительный интерес представляют другие характеристики оценки: смещение

(9) $\Delta=\langle\gamma_m-l_0\rangle$ и рассеяние (10) $\sigma^2=\langle(\gamma_m-l_0)^2\rangle$.

Найдем приближенные значения смещения и рассеяния байесовской оценки. Подставляя (7) в (6), а (6) в (9) и (10), получаем, выполняя усреднение аналогично (8):

$$\Delta=\gamma_0-l_{\mathrm{pr}}+\frac{z^2a_{\mathrm{pr}}^2}{b_0''(\gamma_0)}\left\{\frac{\partial^3 J(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial\gamma_1^2\,\partial\gamma_2^2}\Big/ b_0''(\gamma)-\frac{1}{2}\frac{b_0'''(\gamma)}{b_0''^2(\gamma)}\frac{\partial^2 J(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{d}{d\gamma}\iint C(\gamma,l_1)\,G(l_1,l_2)\,W(l_1)\,W(l_2)\,dl_1\,dl_2\right\}_{\gamma_0}+O(z^4),$$

$$\sigma^2=\sigma_{\mathrm{pr}}^2+(\gamma_0-l_{\mathrm{pr}})^2+\frac{z^2a_{\mathrm{pr}}^2}{b_0''(\gamma_0)}\left\{\frac{\partial^2 J(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}\Big/ b_0''(\gamma)-\right.$$

$$-2\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\iint(\gamma_1-l_1)\,C(\gamma_2,l_2)\,G(l_1,l_2)\,W(l_1)\,W(l_2)\,dl_1\,dl_2+$$

$$\left.+2(\gamma-l_{\mathrm{pr}})\left[\frac{\partial^3 J(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial\gamma_1^2\,\partial\gamma_2}\Big/ b_0''(\gamma)-\frac{1}{2}\frac{b_0'''(\gamma)}{b_0''^2(\gamma)}\frac{\partial^2 J(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2}\right]\right\}_{\gamma_0}+O(z^4),$$

$l_{\mathrm{pr}}=\int lW(l)\,dl$ и $\sigma_{\mathrm{pr}}^2=\int(l-l_{\mathrm{pr}})^2W(l)\,dl$ — априорное среднее и дисперсия оцениваемого параметра. Если положить, что полезный сигнал не содержит несущественных параметров и используется квадратичная функция потерь, то приходим к результатам [2].

Полученные общие соотношения могут быть использованы при недифференцируемых функциях потерь, если только априорная плотность вероятности $W(l)$ и сигнал $s(t, l, q)$ обладают требуемым числом производных по l. Например, если априорная плотность вероятности $W(l)$ симметрична и унимодальна, для характеристик байесовской оценки неэнергетического параметра при простой функции потерь $C(\gamma, l)=C_0[A_0-\delta(\gamma-l)]$ имеем

$$R_m \simeq C_0\left[A_0-W(l)-\frac{z^2a_{\mathrm{pr}}^2}{2}\frac{W^2(l)}{W''(l)}\frac{\partial^2 G(l_1,l_2)}{\partial l_1\,\partial l_2}\right]_{l_{\mathrm{pr}}},\qquad \Delta\simeq 0,$$

$$\sigma^2\simeq\sigma_{\mathrm{pr}}^2+z^2a_{\mathrm{pr}}^2\left\{\frac{W(l)}{W''(l)}\left[\frac{W(l)}{W''(l)}\frac{\partial^2 G(l_1,l_2)}{\partial l_1\,\partial l_2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\int(l_1-l_{\mathrm{pr}})\frac{\partial G(l_1,l)}{\partial l}W(l_1)\,dl_1\right]\right\}_{l_{\mathrm{pr}}}.$$

Используя приближенное представление оценки в виде (6), можно также найти характеристики байесовской оценки амплитуды a_0, сигнала $a_0s(t, q_0)$, содержащего несущественный неэнергетический параметр q_0. При достаточно малых отношениях сигнал/шум байесовский риск для оценки амплитуды равен

$$R_m=\left\{b_0(\gamma)-\frac{z^2}{2b_0''(\gamma)}\left[\frac{d}{d\gamma}\int aC(\gamma,a)W(a)\,da\right]^2J\right\}_{\gamma_0}+O(z^4), \tag{11}$$

а смещение и рассеяние оценки определяются выражениями

$$\begin{aligned}\Delta=\gamma_0-a_{\mathrm{pr}}+z^2&\left\{\frac{\dfrac{d}{d\gamma}\displaystyle\int aC(\gamma,a)W(a)\,da}{b_0''(\gamma)}\left[\frac{\dfrac{d^2}{d\gamma^2}\displaystyle\int aC(\gamma,a)W(a)\,da}{b_0''(\gamma)}-\right.\right.\\&\left.\left.-a_{\mathrm{pr}}-\frac{1}{2}\frac{b_0'''(\gamma)}{b_0''^2(\gamma)}\frac{d}{d\gamma}\int aC(\gamma,a)W(a)\,da\right]\right\}_{\gamma_0}J+O(z^4),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2=\sigma^2_{\mathrm{apr}}+(\gamma_0-a_{\mathrm{pr}})^2+z^2&\left\{\frac{\dfrac{d}{d\gamma}\displaystyle\int aC(\gamma,a)W(a)\,da}{b_0''(\gamma)}\left[\frac{\dfrac{d}{d\gamma}\displaystyle\int aC(\gamma,a)W(a)\,da}{b_0''(\gamma)}\right.\right.\\&+2\sigma^2_{\mathrm{apr}}+2(\gamma-a_{\mathrm{pr}})\left(\frac{d^2}{d\gamma^2}\int aC(\gamma,a)W(a)\,da/b_0''(\gamma)-a_{\mathrm{pr}}-\right.\\&\left.\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{b_0'''(\gamma)}{b_0''^2(\gamma)}\frac{d}{d\gamma}\int aC(\gamma,a)W(a)\,da\right)\right]\right\}_{\gamma_0}J+O(z^4).\end{aligned}$$

В (11), (12) $J=\iint S(q_1,q_2)W(q_1)W(q_2)\,dq_1\,dq_2$, $S(q_1,q_2)=\int_0^T s(t,q_1)v(t,q_2)\,dt/z^2$, $v(t,q)$ — решение уравнения, аналогичного (4), $\sigma^2_{\mathrm{apr}}=\int(a-a_{\mathrm{pr}})^2W(a)\,da$ — дисперсия априорного распределения амплитуды, $b_0(\gamma)=\int C(\gamma,a)W(a)\,da$, а γ_0 — решения уравнени $b_0'(\gamma_0)=0$.

Найденные приближенные выражения для характеристик байесовских оценок амплитуды и неэнергетического параметра справедливы асимптотически (при $z\to 0$) с точностью до величин порядка малости z^4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, 2, Изд. Советское радио, 1962.
2. А. П. Трифонов, Проблемы передачи информации, 1972, 8, 2, 112.

Поступило в редакцию
4 IV 197[illegible]