

33

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XIX

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

11

МОСКВА · 1974

УДК 621.391.2

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЕМНИКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

В. К. Маршаков, А. П. Трифонов

Найдены приближенные выражения для характеристик обнаружения квазидетерминированного сигнала и оценки его неизвестных неэнергетических параметров. Приводятся результаты экспериментальной проверки полученных формул.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимальные решения задач обнаружения квазидетерминированных сигналов и оценки их параметров на фоне помех приводят к соответствующим байесовским операторам [1]. При практическом использовании этих операторов имеют место существенные трудности, такие, как априорная неопределенность, произвольность выбора потерь, сложности теоретического анализа и технической реализации. Применение асимптотически оптимальных операторов позволяет частично преодолеть перечисленные трудности. В работах [1-4] и др. показано, что при некоторых ограничениях, которые выполняются для довольно широкого класса сигналов и помех, с увеличением отношения сигнал/шум асимптотически оптимальными являются обнаружение и оценка по методу максимального правдоподобия. Обнаружение при этом производится на основе сравнения абсолютного максимума функционала отношения правдоподобия с порогом, а асимптотически оптимальной оценкой является оценка максимального правдоподобия. Приемное устройство, реализующее один из этих асимптотически оптимальных алгоритмов, будем называть приемником максимального правдоподобия.

Исследование характеристик приемника максимального правдоподобия обычно проводится приближенными методами [5-8] и др. При этом, как правило, оказывается весьма затруднительным анализ поведения точности приближенных характеристик для больших отношений сигнал/шум, т. е. в случае, наиболее важном для практических приложений. Поэтому определенным интересом представляет получение приближенных характеристик приемника максимального правдоподобия, точность которых возрастает с увеличением отношения сигнал/шум. Некоторые предельные, справедливые при неограниченном увеличении отношения сигнал/шум, характеристики приемника максимального правдоподобия приведены в [3, 4, 9]. Ниже найдены приближенные выражения для характеристик приемника максимального правдоподобия, которые могут быть использованы при больших, но конечных, отношениях сигнал/шум и нескольких неизвестных параметрах сигнала. Точность полученных формул возрастает с увеличением отношения сигнал/шум.

1. ОБНАРУЖЕНИЕ КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА

Пусть на вход приемного устройства в течение интервала времени $[0; T]$ поступает реализация случайного процесса $x(t) = n(t)$ или

$x(t) = n(t) + s(t, \vec{l}_0)$, где $n(t)$ — реализация стационарного нормального случайного процесса с нулевым средним значением $\langle n(t) \rangle = 0$ и функцией корреляции $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = K(\tau)$; $s(t, \vec{l}_0)$ — полезный сигнал, являющийся известной функцией времени и μ неизвестных неэнергетических параметров $\vec{l}_0 = \{l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0\mu}\}$, $\vec{l}_0 \in \vec{L}$, \vec{L} — область в μ -мерном евклидовом пространстве, граница которой является достаточно регулярной [10]. Приемник максимального правдоподобия вырабатывает логарифм функционала отношения правдоподобия, который с точностью до постоянных слагаемых равен [5]

$$(1) \quad M(\vec{l}) = \int_0^T x(t) v(t, \vec{l}) dt,$$

где $v(t, \vec{l})$ — решение интегрального уравнения $\int_0^T K(t, \tau) v(\tau, \vec{l}) d\tau = s(t, \vec{l})$,

$t \in [0; T]$, $\vec{l} \in \vec{L}$. Если $x(t) = s(t, \vec{l}_0) + n(t)$, то (1) можно записать как $M(\vec{l}) = z^2 S(\vec{l}_0, \vec{l}) + zN(\vec{l})$, и если $x(t) = n(t)$, то $M(\vec{l}) = zN(\vec{l})$. Здесь $z^2 = \int_0^T s(t, \vec{l}) v(t, \vec{l}) dt$ — отношение сигнал/шум; $S(\vec{l}_0, \vec{l}) = z^{-2} \int_0^T s(t, \vec{l}_0) v(t, \vec{l}) dt$,

$$N(\vec{l}) = z^{-1} \int_0^T n(t) v(t, \vec{l}) dt$$

— нормированные сигнальная и шумовая функции на выходе приемника.

Поскольку параметры \vec{l} предполагаются неэнергетическими, величина z не зависит от \vec{l} , а шумовая функция $N(\vec{l})$ является однородным полем. Достаточные условия однородности поля $N(\vec{l})$ при $\mu=1, 2$ приведены в работах [11, 12]. При $\mu > 2$ аналитически сформулировать достаточные условия однородности поля $N(\vec{l})$ затруднительно, хотя имеется довольно широкий класс сигналов и помех, когда $N(\vec{l})$ — однородно. Например, в случае приема сигналов с неизвестными временным положением, частотой и начальной фазой ($\mu=3$) на фоне некоррелированных помех.

Вероятность ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и ошибок 2-го рода (пропуска сигнала) β в приемнике максимального правдоподобия, осуществляющем сравнение абсолютного максимума $M(\vec{l})$ (1) с порогом k , можно записать как $\alpha = P(H_N > k)$ и $\beta(\vec{l}_0) = P(H_{SN} < k)$. Здесь H_N и H_{SN} — величины абсолютного максимума $M(\vec{l})$, $\vec{l} \in \vec{L}$ соответственно в отсутствие и при наличии сигнала $s(t, \vec{l}_0)$ в принятой реализации $x(t)$. Так как $H_N = zN(\vec{l}_m)$, где $N(\vec{l}_m)$ — величина абсолютного максимума реализации стационарного нормального случайного процесса с нулевым средним значением $\langle N(\vec{l}) \rangle = 0$ и функцией корреляции $\langle N(\vec{l}_1)N(\vec{l}_2) \rangle = S(\vec{l}_1, \vec{l}_2)$, то для вероятности ложной тревоги имеем

$$(2) \quad \alpha = P[N(\vec{l}_m) > k/z].$$

Чтобы вычислить α по формуле (2), необходимо определить функцию распределения абсолютного максимума реализации случайного процесса $N(\vec{l})$; $F_N(H) = P[N(\vec{l}_m) < H]$. Если сигнальная функция $S(\vec{l}_1, \vec{l}_2) \rightarrow 0$ при $|l_{1i} - l_{2i}| \rightarrow \infty$, $i=1, 2, \dots, \mu$, то можно считать, что с увеличением H распределение числа выбросов за уровень H реализации $N(\vec{l})$ в области \vec{L}

сходится к закону Пуассона [10]. Следовательно, для больших, но конечных H можно записать

$$(3) \quad F_N(H) \simeq \exp[-Vm(H)].$$

Здесь V — μ -мерный евклидов объем области \vec{L} , а $m(H)$ — среднее число выбросов реализации $N(\vec{l})$ за уровень H в единичном объеме μ -мерного евклидова пространства неизвестных параметров сигнала. В общем случае функция в правой части (3) не является неубывающей функцией H , поэтому вместо (3) будем использовать аппроксимацию

$$(4) \quad F_N(H) \simeq \begin{cases} \exp[-Vm(H)], & H \geq H_0, \\ 0, & H < H_0, \end{cases}$$

где H_0 — наименьшее значение H , для которого при любых $\epsilon > 0$ выполняется неравенство $m(H) \geq m(H + \epsilon)$. Поскольку при $\mu > 1$ записать точное выражение для $m(H)$ в явном виде затруднительно, воспользуемся приближенной формулой

$$(5) \quad m(H) \simeq \frac{d^{1/2} H^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp\left(-\frac{H^2}{2}\right),$$

следующей из асимптотического выражения для $m(H)$, приведенного в [10]. Здесь d — определитель матрицы

$$(6) \quad S = \|S_{ij}\|, S_{ij} = [-\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l}) / \partial l_i \partial l_j]_{\vec{l}_0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \mu.$$

Согласно (2), (4) и (5) вероятность ложной тревоги принимает вид

$$(7) \quad \alpha \simeq \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{Vd^{1/2}k^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}z^{\mu-1}} \exp\left(-\frac{k^2}{2z^2}\right)\right], & \frac{k}{z} \geq \sqrt{\mu-1}, \\ 1, & \frac{k}{z} < \sqrt{\mu-1}, \end{cases}$$

причем точность формулы (7) возрастает с увеличением нормированного порога k/z . Подобное выражение для вероятности ложной тревоги получено также в [8] применительно к частному случаю обнаружения радиосигнала со случайной начальной фазой и неизвестным временным положением.

Определим теперь вероятность пропуска сигнала $\beta(\vec{l}_0)$. Обозначим Δ_i — интервал корреляции случайного процесса $N(\vec{l})$ по параметру l_i [6]. Область определения неизвестных параметров \vec{L} разобьем на две подобласти: \vec{L}_S и \vec{L}_N . К подобласти \vec{L}_S отнесем все значения $\vec{l} \in \vec{L}$, удовлетворяющие неравенствам $|l_{0i} - l_i| < \Delta_i$, $i = 1, 2, \dots, \mu$, а к подобласти \vec{L}_N — значения $\vec{l} \in \vec{L}$, для которых $|l_{0i} - l_i| > \Delta_i$. Поскольку интервал корреляции процесса $N(\vec{l})$ по параметру l_i приблизительно равен «длительности» выходного сигнала $S(\vec{l}_0, \vec{l})$ по тому же параметру, то $S(\vec{l}_0, \vec{l}) \simeq 0$ для $\vec{l} \in \vec{L}_N$. Пусть H_N^* — абсолютный максимум $M(\vec{l})$ при $\vec{l} \in \vec{L}_N$, а H_S — абсолютный максимум $M(\vec{l})$ при $\vec{l} \in \vec{L}_S$. Если область определения неизвестных параметров L велика по сравнению с подобластью \vec{L}_S , то случайные величины H_N^* и H_S можно считать приближенно независимыми. Вероятность пропуска при этом записывается как

$$(8) \quad \beta(l_0) \simeq P(H_N^* < k)P(H_S < k) = P_{N^*}(k)P_S(k).$$

где $N(\vec{l}_0)$ теристич

Приближенное значение вероятности $P_N^*(k)$ получаем, используя соотношения (4), (5):

$$(9) \quad P_N^*(k) \approx \begin{cases} \exp \left[-\frac{V_N d^{1/2} k^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2} z^{\mu-1}} \exp \left(-\frac{k^2}{2z^2} \right) \right], & \frac{k}{z} \geq \sqrt{\mu-1}, \\ 0, & \frac{k}{z} < \sqrt{\mu-1}. \end{cases}$$

Здесь V_N — μ -мерный евклидов объем подобласти \vec{L}_N . Когда область определения параметров \vec{L} задана неравенствами

$$(10) \quad |l_i| \leq L_i/2, \quad i=1, 2, \dots, \mu,$$

величина $V_N = \prod_{i=1}^{\mu} L_i - 2^{\mu} \prod_{i=1}^{\mu} \Delta_i = \left[1 - 2^{\mu} \prod_{i=1}^{\mu} (\Delta_i/L_i) \right] V$. Поэтому если хотя бы для одного значения i выполняется

$$(11) \quad \Delta_i/L_i \ll 1,$$

то справедливо соотношение

$$(12) \quad V_N \approx V = \prod_{i=1}^{\mu} L_i.$$

При наличии сигнала и $\vec{l} \in \vec{L}_S$ имеем

$$(13) \quad H_S = z^2 \vec{S}(l_0, \vec{l}_m) + zN(\vec{l}_m).$$

Поскольку в подобласти \vec{L}_S вероятностью появления более одного максимума процесса $M(\vec{l})$ можно пренебречь, то для больших отношений сигнал/шум [6]

$$(14) \quad l_{m_i} = l_{0i} + \frac{\sum_{j=1}^{\mu} \kappa_j A_{ij}}{zd} + O(z^{-2}),$$

где $\kappa_j = [\partial N(\vec{l})/\partial l_j]_{\vec{l}_0}$ — случайные нормальные величины с нулевыми средними значениями и корреляционной матрицей S (6), A_{ij} — алгебраические дополнения определителя d . Разложим функцию $M(\vec{l})$ в ряд Тейлора в окрестности точки \vec{l}_0 . Подставляя в это разложение $\vec{l} = \vec{l}_m$ и учитывая (14), получаем

$$(15) \quad H_S = z^2 + zN(\vec{l}_0) + \frac{\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \kappa_i \kappa_j A_{ij}}{2d} + O(z^{-1}) = z^2 + zN(\vec{l}_0) + \eta + O(z^{-1}),$$

где $N(\vec{l}_0)$ — нормальная случайная величина с параметрами (0; 1). Характеристическая функция случайной величины η имеет вид

$$\Theta_{\eta}(u) = \left\langle \exp \left[\frac{j u}{2} \frac{\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \kappa_i \kappa_j A_{ij}}{d} \right] \right\rangle = \frac{1}{(1 - ju)^{\mu/2}}$$

откуда плотность вероятности η равна

$$W(\eta) = \begin{cases} \frac{\eta^{\mu/2-1}}{\Gamma(\mu/2)} \exp(-\eta), & \eta \geq 0, \\ 0, & \eta < 0, \end{cases}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Слагаемые $N(\vec{l}_0)$ и η в формуле (15) статистически независимы, так как $\eta = \left[\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \kappa_i \kappa_j A_{ij} \right] / 2d$, а нормальные случайные величины $N(l_0)$ и κ_i некоррелированы $\langle N(\vec{l}_0) \kappa_i \rangle = [\partial S(\vec{l}_0, \vec{l}) / \partial l_i] \tau_0 = 0$.

Пренебрегая в (15) членами порядка малости z^{-1} и менее, нетрудно найти приближенное выражение для плотности вероятности случайной величины H_s

$$(16) \quad W_s(H) \approx \frac{z^{\mu/2-1}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{2z^4 - H^2}{4z^2}\right) D_{-\mu/2}\left(\frac{2z^2 - H}{z}\right),$$

$D_p(\cdot)$ — функция параболического цилиндра. Следовательно, вероятность $P_s(k)$ (8) приближенно равна

$$(17) \quad P_s(k) \approx \frac{z^{\mu/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k/z} \exp\left(\frac{2z^2 - x^2}{4}\right) D_{-\mu/2}(2z - x) dx.$$

Вероятность пропуска сигнала β может быть вычислена по приближенной формуле (8), где $P_N^*(k)$ и $P_s(k)$ определяются выражениями (9) и (17). При этом точность формулы (8) растет с увеличением отношения сигнал/шум z и нормированного порога k/z .

Следует отметить, что разложение выходного сигнала приемника в ряд Тейлора (15) использовалось также в [13] для определения характеристик различения квазидетерминированных сигналов. Однако в [13] не учитывалась вероятность превышения порога абсолютным максимумом $M(\vec{l})$ в подобласти \vec{L}_N (9).

Конкретизируем общие выражения для вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала применительно к обнаружению полезного сигнала, зависящего лишь от одного неизвестного параметра. В этом случае приближенная формула (5) совпадает с точной [14] и среднее число выбросов реализации одномерного случайного процесса $N(l)$ за уровень H в интервале L равно $m(H) = (\xi/2\pi) \exp(-H^2/2)$, где $\xi = LV [\partial^2 S(l_1, l_2) / \partial l_1 \partial l_2]_{l_1=l_2}$. Следовательно, вероятность ложной тревоги α (7) принимает вид

$$(18) \quad \alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{\xi}{2\pi} \exp\left(-\frac{k^2}{2z^2}\right)\right], & k \geq 0, \\ 1, & k < 0, \end{cases}$$

а вероятность пропуска сигнала β (8) равна

$$(19) \quad \beta \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \exp\left[-\frac{\xi^*}{2\pi} \exp\left(-\frac{k^2}{2z^2}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2z^2-x^2}{4}\right) \times \\ \times D_{-1/2}(2z-x) dx, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Здесь $\xi^* = [1 - 2\Delta/L]\xi$, Δ — интервал корреляции случайного процесса $N(t)$, причем часто можно положить $\xi^* \approx \xi$ (12). Если отношение сигнал/шум z неограниченно возрастает и при этом $k/z \rightarrow \infty$, то, учитывая асимптотическое поведение $D_{-1/2}(x)$ для $x \rightarrow \infty$, получаем из (18) и (19) предельные вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала, найденные в [3].

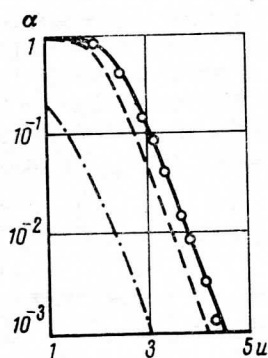


Рис. 1

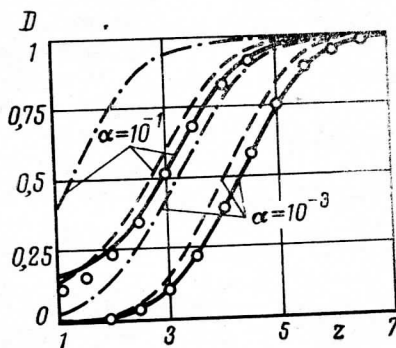


Рис. 2

Характеристики обнаружения сигнала, содержащего один неизвестный параметр, изображены на рис. 1 и 2 для значения $\xi = 100$. На рис. 1 сплошной линией нанесена зависимость вероятности ложной тревоги α от нормированного порога $u = k/z$, построенная по приближенной формуле (18). На рис. 2 (сплошные линии) приведены зависимости вероятности правильного обнаружения $D = 1 - \beta$ от z при фиксированных значениях α , вычисленные по приближенным формулам (18) и (19). Приближенные значения α и D также можно получить, предполагая, что неизвестный параметр сигнала принимает одно из ν дискретных значений [7]:

$$(20) \quad \alpha \approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{k}{z}\right) \right]^\nu, \quad D \approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{k}{z}\right) \right]^{\nu-1} \Phi\left(\frac{k-z^2}{z}\right),$$

где $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy$ — интеграл вероятности. Соответствующие зависимости нанесены на рис. 1 и 2 пунктиром. Они построены для случая, когда сигнальная функция имеет колокольную форму и $\nu \approx \xi/\sqrt{2\pi}$.

Для грубой оценки характеристик обнаружения квазидетерминированного сигнала иногда используют значения вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения детерминированного сигнала [1, 7]. Соответствующие зависимости изображены на рис. 1 и 2 штрих-пунктиром. Как следует из рис. 1 и 2, значения α и D , вычисленные по различным приближенным формулам для одного и того же сигнала, могут существенно отличаться друг от друга, причем в то время как точность приближенных формул (18) и

(19) растет с увеличением z и k/z , поведение точности приближенных формул (20) неизвестно.

С целью изучения возможностей использования приведенных формул для умеренных значений отношения сигнал/шум z и нормированного порога u был разработан лабораторный макет, позволяющий производить обнаружение сигнала с неизвестным временным положением. Полезный сигнал формировался путем пропускания короткого импульса через последовательно соединенные, слабо связанные интегрирующие RC -цепочки. Затем полезный сигнал смешивался с аддитивным широкополосным нормальным шумом и поступал на согласованный фильтр. В качестве согласованного фильтра использовалась аналогичная последовательность интегрирующих RC -цепочек, в результате чего сигнальная функция на выходе приемника имела форму, близкую к колокольной. Экспериментальные значения вероятностей ложной тревоги α и правильного обнаружения D определялись при различных значениях ξ и z . Для $\xi=100$ экспериментальные значения α и D приведены на рис. 1 и 2. Каждое значение α и D найдено в результате обработки 10^5 реализаций. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальной зависимости вероятности ложной тревоги от нормированного порога приближенной зависимостью (18) уже при $k/z \geq 2$. Для вероятности правильного обнаружения удовлетворительная аппроксимация экспериментальных зависимостей приближенными (18), (19) имеет место при $z \geq 1$ и $\alpha < 0,4$.

2. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

Рассмотрим характеристики приемника максимального правдоподобия, когда производится оценка неизвестных параметров \vec{l}_0 сигнала $s(t, \vec{l}_0)$. При этом предполагается, что $x(\vec{t}) = n(t) + s(t, \vec{l}_0)$, т. е. в принятой реализации $x(t)$ всегда присутствует сигнал $s(t, \vec{l}_0)$. В качестве оценки параметров \vec{l}_0 принимают положение \vec{l}_m абсолютного максимума $M(\vec{l})$, $\vec{l} \in \vec{L}(1)$. Обозначим P_0 — вероятность того, что максимум функции $M(\vec{l}) = z^2 S(\vec{l}_0, \vec{l}) + zN(\vec{l})$, расположенный в подобласти \vec{L}_s , больше любого выброса шума $zN(\vec{l})$ в подобласти \vec{L}_N . Тогда, согласно [6], выражение для элементов корреляционной матрицы оценок максимального правдоподобия при больших отношениях сигнал/шум можно записать как

$$(21) \quad R_{ij} = \langle (l_{mi} - l_{0i})(l_{mj} - l_{0j}) \rangle \approx P_0 R_{0ij} + (1 - P_0) R_{1ij},$$

где R_{0ij} — элементы корреляционной матрицы нормальных ошибок, а R_{1ij} — элементы корреляционной матрицы аномальных ошибок. Корреляционная матрица нормальных ошибок приближенно равна [6]

$$(22) \quad R_0 \approx S^{-1}, \quad z^{-2}$$

матрица S определена в (6). Для того чтобы найти корреляционную матрицу аномальных ошибок, положим, что область \vec{L} определения неизвестных параметров сигнала задана неравенствами (10) и соотношение (11) выполняется для каждого $i=1, 2, \dots; \mu$. Тогда

$$(23) \quad R_{1ij} \approx \begin{cases} \frac{L_i^2}{12} + l_{0i}^2, & i=j, \\ l_{0i}l_{0j}, & i \neq j. \end{cases}$$

Если пол
 $x \rightarrow \infty$, пол
Для сл
при $\xi = 10$

Если параметры \vec{l}_0 являются случайными и распределены равномерно в области \vec{L} , то элементы корреляционной матрицы аномальных ошибок принимают вид $R_{ij} \approx L_i^2/6$, $i=j$, $R_{ij} \approx 0$, $i \neq j$. Полагая, что функция $S(\vec{l}_0, \vec{l})$ имеет только один ярко выраженный максимум, можем записать [15]

$$(24) \quad P_0 \approx \int_{-\infty}^{\infty} W_s(H) P_N^*(H) dH,$$

где $W_s(H)$ — плотность вероятности значений абсолютного максимума H_s , обусловленного наличием сигнала при $\vec{l} \in \vec{L}_s$, а $P_N^*(H)$ — функция распределения значений абсолютного максимума реализаций ненормированной шумовой функции $zN(\vec{l})$ в подобласти \vec{L}_N . Функция $W_s(H)$ определяется из (16), а $P_N^*(H)$ — согласно (9). Подставляя эти значения в (24) и учитывая, что $P_N^*(H) = 0$ при $H < \sqrt{\mu-1}$, получаем

$$(25) \quad P_0 \approx \frac{z^{\mu/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\mu-1}}^{\infty} \exp \left[\frac{2z^2 - x^2}{4} - \frac{V_N d^{1/2} x^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \right] \times \\ \times \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) D_{-\mu/2}(2z-x) dx.$$

Выражения (21)–(23), (25) позволяют приближенно определить корреляционную матрицу оценок максимального правдоподобия при больших отношениях сигнал/шум. Точность этих выражений увеличивается с ростом отношения сигнал/шум.

Когда полезный сигнал содержит только один неизвестный параметр l , распределенный равномерно на интервале $[-L/2; L/2]$, формулы (21) и (25) принимают вид

$$(26) \quad \sigma^2 \approx P_0 \sigma_0^2 + (1-P_0) \frac{L^2}{6},$$

$$(27) \quad P_0 \approx \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[\frac{2z^2 - x^2}{4} - \frac{\xi^*}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] D_{-1/2}(2z-x) dx.$$

Здесь, так же, как и в (19), часто можно положить $\xi^* \approx \xi$. Поскольку при оценке одного параметра дисперсия σ_0^2 нормальных ошибок определена в [5] с большей точностью, чем элементы корреляционной матрицы (22) совместных оценок нескольких параметров, в (26) положим

$$(28) \quad \sigma_0^2 \approx \left\{ \frac{1}{z^2 [\partial^2 S(l_1, l_2) / \partial l_1 \partial l_2]} \left[1 + \frac{\partial^4 S(l_1, l_2) / \partial l_1^2 \partial l_2^2}{z^2 [\partial^2 S(l_1, l_2) / \partial l_1 \partial l_2]^2} \right] \right\}_{l_1=l_2}$$

Если положить $z \rightarrow \infty$, то, учитывая асимптотическое поведение $D_{-1/2}(x)$ при $x \rightarrow \infty$, получаем из (26) предельное значение дисперсии оценки [9].

Для случая оценки временного положения сигнала колокольной формы при $\xi = 100$ зависимость нормированной дисперсии $\rho(z) = \sigma^2 / \sigma_{\max}^2$, где

σ_{\max}^2 — максимальная дисперсия оценки, приведена на рис. 3. Кривая 1 на этом рисунке — дисперсия оценки при учете только нормальных ошибок (28), кривая 2 построена по формуле (26), где P_0 определяется формулой [5]

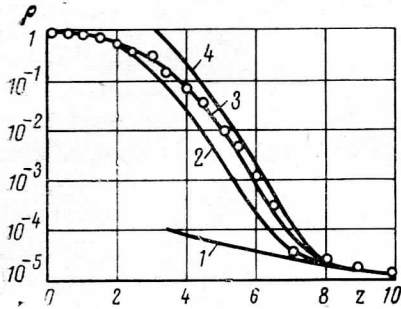


Рис. 3

$$P_0 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(x)]^{\nu-1} \times \\ \times \exp\left[-\frac{(x-z)^2}{2}\right] dx, \quad \nu \approx \xi/\sqrt{2\pi}.$$

Кривая 3 рассчитана по формулам (26) и (27), а кривая 4 — по формуле (26) при подстановке в нее значения

$$P_0 \approx 1 - \frac{\xi}{2\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right),$$

найденного в [15]. Из кривых рис. 3 следует, что полученные из различных приближенных формул величины дисперсии оценки временного положения могут значительно отличаться. На рис. 3 приведены также экспериментальные значения относительной дисперсии оценки временного положения сигнала, полученные при помощи лабораторного макета приемника максимального правдоподобия. Каждое экспериментальное значение ρ при $z \leq 4$ вычислялось по результатам $5 \cdot 10^2$, а при $z > 4$ — по результатам не менее 10^3 измерений. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальной зависимости $\rho(z)$ приближенными формулами (26) и (27) уже при $z \geq 1$. Можно ожидать, что для малых ξ , когда априорный интервал определения неизвестного временного положения сравним с длительностью сигнала, погрешность аппроксимации будет больше. Тем не менее для $z \geq 1$ точность аппроксимации экспериментальной зависимости $\rho(z)$ приближенными формулами (26), (27) остается удовлетворительной вплоть до значения $\xi=10$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдены приближенные характеристики обнаружения квазидетерминированного сигнала и оценки его неизвестных параметров приемником максимального правдоподобия. Полученные выражения могут быть использованы, когда $S(\bar{l}_1, \bar{l}_2) \rightarrow 0$ при $|l_{1i} - l_{2i}| \rightarrow \infty$, $i=1, 2, \dots, \mu$; область определения неизвестных параметров \bar{L} значительно больше подобласти \bar{L}_S ; отношение сигнал/шум z и нормированный порог k/z достаточно велики. С увеличением z и k/z точность этих приближенных формул возрастает, в то время как поведение точности других приближенных формул для характеристик обнаружения и оценки обычно неизвестно. Экспериментальное исследование приема сигнала с неизвестным временным положением показало, что приближенные выражения (18), (19), (26), (27) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости уже при $z > 1$, $k/z \geq 2$ и $\alpha < 0, 1$.

Авторы благодарят Ю. С. Коломацкого и Б. Н. Ланецкого за помощь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлтон, Очерки теории связи, Изд. Советское радио, 1966.
2. Б. Р. Левин, Ю. С. Шинаков, Проблемы передачи информации, 1967, 3, 1, 27.
3. А. П. Трифонов, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, 4, 180.
4. А. П. Трифонов, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, 3, 185.
5. Е. И. Куликов, Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, Изд. Советское радио, 1969.
6. С. Е. Фалькович, Оценка параметров сигнала, Изд. Советское радио, 1970.
7. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков, Выделение сигналов на фоне случайных помех, Изд. Советское радио, 1960.
8. К. Хелстром, Статистическая теория обнаружения сигналов, ИЛ, 1963.
9. Е. И. Куликов, В. К. Маршаков, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1972, 17, 8, 1745.
10. Ю. К. Беляев, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, 2, 77.
11. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1968, 13, 12, 2254.
12. А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1972, 17, 3, 620.
13. В. Г. Репин, Г. П. Тартаковский, Проблемы передачи информации, 1971, 7, 2, 47.
14. В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, Изд. Наука, 1970.
15. А. Ф. Фомин, Радиотехника, 1970, 25, 5, 39.

Поступила в редакцию
4 IV 1973