34

34

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том XX

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

9

МОСКВА · 1975

УДК 621.391.2

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

Т. А. Радченко, А. П. Трифонов

Оптимальными алгоритмами, учитывающими всю априорную информацию о сигнале и помехе, являются байесовские алгоритмы оценки [1]. Определение байесовского алгоритма оценки сводится к нахождению правила выбора решения, минимизирующего средний риск при заданной функции потерь. Квадратичная функция потерь [1]

$$C(\gamma, l)=(\gamma-l)^2, \tag{1}$$

где γ – искомая оценка, l – неизвестный параметр сигнала, приводит к байесовской оценке γ_m, равной апостериорному среднему значению параметра

$$\gamma_m=l_{\mathrm{ps}}=\int lW_{\mathrm{ps}}(l)\,dl. \tag{2}$$

Здесь $W_{\mathrm{ps}}(l)$ – апостериорная плотность вероятности оцениваемого параметра. Квадратичная функция потерь (1) пропорциональна квадрату «расстояния» оценки от истинного значения параметра, т. е. приписывает ошибкам вес, возрастающий как квадрат их величины. Такого рода потери часто встречаются в различных приложениях математической статистики и теории связи [1]. Несмотря на то, что квадратичная функция потерь обладает рядом достоинств (удобна с математической точки зрения, в достаточной степени учитывает большее значение больших ошибок по сравнению с малыми и т. д.), в задачах оценки параметра сигнала она используется пока что сравнительно редко. Это связано с тем, что для большинства реальных параметров и сигналов приемное устройство для получения оценки (2) оказывается весьма сложным при практическом осуществлении. Вычислить рассеяние байесовской оценки (2) в большинстве задач пока не удается, поскольку не представляется возможным достаточно просто представить аналитически апостериорную плотность вероятности на всем интервале возможных значений оцениваемого параметра. Тем не менее для неэнергетического параметра [2] при некоторых ограничениях на вид полезного сигнала и априорного распределения можно получить приближенные выражения для смещения и рассеяния байесовской оценки при квадратичной функции потерь.

В [3, 4] найдены приближенные формулы для характеристик оценки (2) неэнергетического параметра в случае приема слабого сигнала (т. е. при отношениях сигнал/шум, меньших единицы) на фоне аддитивного нормального шума. Условное смещение определяется выражением

$$\Delta(l_0)=l_{\mathrm{pr}}-l_0+z^2\iint(l_1-l_{\mathrm{pr}})(l_2-l_{\mathrm{pr}})[S(l_0,l_1)-S(l_1,l_2)]\times \\ \times W(l_1)W(l_2)\,dl_1\,dl_2+O(z^4), \tag{3}$$

а условное рассеяние равно

$$\sigma^2(l_0)=(l_{\mathrm{pr}}-l_0)^2+z^2\Bigg\{\iint(l_1-l_{\mathrm{pr}})(l_2-l_{\mathrm{pr}})S(l_1,l_2)W(l_1)W(l_2)\,dl_1\,dl_2+ \\ +(l_{\mathrm{pr}}-l_0)\Bigg[2\int(l-l_{\mathrm{pr}})S(l_0,l)W(l)\,dl- \\ -\iint(l_1-l_{\mathrm{pr}})S(l_1,l_2)W(l_1)W(l_2)\,dl_1\,dl_2\Bigg]\Bigg\}+O(z^4). \tag{4}$$

Здесь z – отношение сигнал/шум по напряжению на выходе линейной части оптимального приемника, l_0 – истинное значение оцениваемого параметра, $S(l_1, l_2)$ – нормированная сигнальная функция, $W(l)$ – априорная плотность вероятности оцениваемого параметра, $l_{\mathrm{pr}}=\int lW(l)\,dl$ – априорное среднее оцениваемого параметра. Соответствующие безусловные характеристики имеют вид [3, 4]

$$\Delta=0;\qquad \sigma^2=\sigma_{\mathrm{pr}}{}^2-z^2\iint(l_1-l_{\mathrm{pr}})(l_2-l_{\mathrm{pr}})S(l_1,l_2)W(l_1)W(l_2)\,dl_1\,dl_2+O(z^4), \tag{5}$$

где $\sigma_{pr}^2=\int(l-l_{pr})^2W(l)\,dl$ – априорная дисперсия оцениваемого параметра. Формулы (3) – (5) являются приближенными и аналитически оценить их точность затруднительно. Известно лишь [3, 4], что точность возрастает с уменьшением отношения сигнал/шум z, т. е. (3) – (5) асимптотически точны при $z\to 0$.

С целью определения границ применимости асимптотических формул (3) – (5) на ЭВМ «БЭСМ-4» и «БЭСМ-6» было выполнено моделирование байесовской оценки неэнергетического параметра при квадратичной функции потерь и малых отношениях сигнал/шум. Моделирование проводилось для сигнальной функции

$$S(l_1, l_2)=\exp[-(l_1-l_2)^2/2] \tag{6}$$

и равномерной плотности вероятности

$$W(l)=\begin{cases}1/L, & |l|\leqslant L/2,\\ 0, & |l|>L/2,\end{cases} \tag{7}$$

где L – априорный интервал определения параметра l. С учетом (6) и (7) оценку (2) можно переписать в виде

$$\gamma_m=\frac{\int\limits_{-L/2}^{L/2} l\exp\{z^2\exp[-(l_0-l)^2/2]+zN(l)\}\,dl}{\int\limits_{-L/2}^{L/2}\exp\{z^2\exp[-(l_0-l)^2/2]+zN(l)\}\,dl}, \tag{8}$$

где $N(l)$ – реализация нормального случайного процесса с нулевым средним значением и функцией корреляции (6). Для получения оценки (8) на основе некоррелированной нормальной последовательности методом скользящего суммирования [5, 6] формировались значения реализации $N(l)$ с шагом $\Delta l=0{,}1$. Затем согласно (8) вычислялась байесовская оценка. Для каждого набора параметров L, l_0, z статистические характеристики оценки (8) определялись на основе 100–300 независимых реализаций шумовой функции $N(l)$. Ввиду больших затрат машинного времени были получены лишь условные характеристики (3), (4) для нескольких значений l_0 и двух значений априорного интервала L.

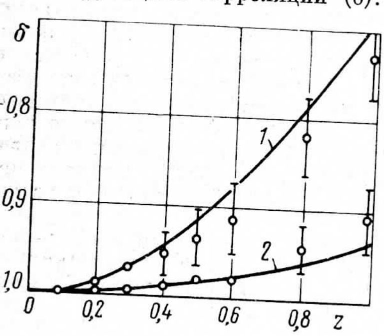

Рис. 1

На рис. 1–3 приведены характеристики байесовской оценки неэнергетического параметра сигнала, рассчитанные по формулам (3) и (4), и результаты моделирования. Зависимости относительного условного смещения $\delta(z)=\Delta(l_0)/\sigma(l_0)$ от z представлены на рис. 1 для $L=10$ и двух значений l_0: кривая *1* – для $l_0=1{,}5$; кривая *2* – для $l_0=3{,}5$. На этом же рисунке нанесены полученные в результате моделирования значения $\delta(z)$ и указаны их доверительные интервалы (90%). На рис. 2 нанесены зависимости относи-

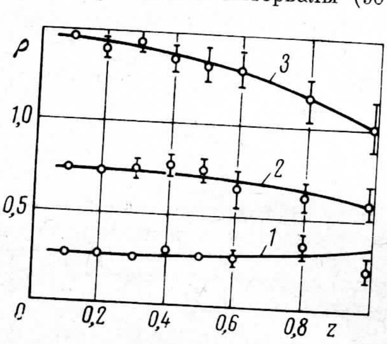

Рис. 2

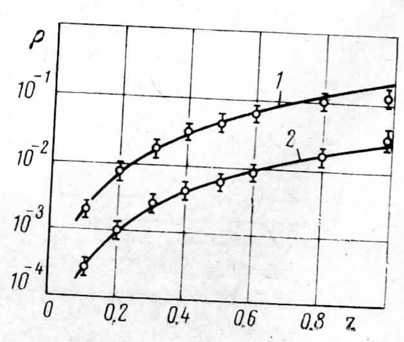

Рис. 3

тельного условного рассеяния $\rho(z)=\sigma^2(l_0)/\sigma_{\text{pr}}{}^2=12\sigma^2(l_0)/L^2$ и результаты моделирования с теми же доверительными интервалами для $L=10$, $l_0=1{,}5$ (кривая *1*), для $l_0=2{,}5$ (кривая *2*), для $l_0=3{,}5$ (кривая *3*). На рис. 3 приведены зависимости $\rho(z)$ для $l_0=0$, $L=10$ (кривая *1*) и для $l_0=0$, $l=100$ (кривая *2*), а также соответствующие значения $\rho(z)$, полученные в результате моделирования с таким же доверительным интервалом.

Как следует из рис. 1–3, теоретические кривые смещения и рассеяния практически находятся в 90%-х доверительных интервалах, построенных на соответствующих экспериментальных точках. Поэтому можно считать, что формулы, полученные в [3, 4], обладают точностью, достаточной для практических расчетов характеристик байесовской оценки при отношениях сигнал/шум $z\leqslant1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, **2**, Изд. Советское радио, 1962.
2. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1968, **13**, 12, 2254.
3. А. П. Трифонов, Проблемы передачи информации, 1972, **8**, 2, 112.
4. А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1974, **19**, 2, 435.
5. Ю. Г. Полляк, Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах, Изд. Советское радио, 1971.
6. В. В. Быков, Цифровое моделирование в статистической радиотехнике, Изд. Советское радио, 1971.

Поступило в редакцию
15 XI 1974