36

В6

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

Радиоэлектроника

ТОМ XIX
4
1976

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМЕНИ 50-ЛЕТИЯ ВЕЛИКОЙ
ОКТЯБРЬСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ

1976 ◆ ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ СССР — РАДИОЭЛЕКТРОНИКА ◆ № 4

УДК 621.391.2

Т. А. РАДЧЕНКО, А. П. ТРИФОНОВ

ОЦЕНКА АМПЛИТУДЫ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМ ВРЕМЕННЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ

Рассмотрены два алгоритма оценки амплитуды сигнала с неизвестным временным положением при приеме на фоне аддитивного гауссова шума. В качестве оценок использовался отсчет напряжения в некоторый момент времени на выходе линейных фильтров: оптимального для оценки амплитуды детерминированного сигнала и оптимального в классе линейных фильтров для оценки амплитуды сигнала с неизвестным временным положением. Рассчитаны рассеяние и смещение оценки, проведено сравнение алгоритмов.

Применительно к сигналу, все параметры которого, за исключением амплитуды, априори известны, задача получения оценки подробно изучена [1—3]. Полезный сигнал может зависеть и от других неизвестных (несущественных) параметров, в оценке которых нет необходимости [2, 3], например, временное положение. Реализация приемного устройства для нахождения оптимальной (байесовской) оценки амплитуды при неизвестном временном положении сигнала наталкивается на существенные трудности [1]. Рассмотрим некоторые неоптимальные алгоритмы оценки.

Пусть на вход приемного устройства поступает аддитивная смесь сигнала и помехи:

$$x(t) = a_0 s_1(t - \tau_0) + n(t), \quad [-T/2 < t < T/2], \tag{1}$$

где a_0 — неизвестная амплитуда, подлежащая оценке; τ_0 — неизвестное временное положение полезного сигнала, меняющееся в пределах $[-T_0/2;\ T_0/2]$; $n(t)$ — реализация гауссова шума с нулевым средним значением и корреляционной функцией $K(\tau)$. Оценку неизвестной амплитуды a_0 можно получить, если использовать подход, развитый в [4], применительно к обнаружению сигнала с неизвестным временным положением. В этом случае оценка $\hat{a}$ имеет вид

$$\hat{a} = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, v_1(t - \hat{\tau})\, dt / z_1^2; \quad z_1^2 = \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\, v_1(t)\, dt. \tag{2}$$

Здесь $v_1(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_{-T/2}^{T/2} K(t - t_1)\, v_1(t_1)\, dt_1 = s_1(t),$$

z_1^2 — отношение сигнал/шум для сигнала с единичной амплитудой; $\hat{\tau}$ — некоторое значение из интервала $[-T_0/2;\ T_0/2]$. Очевидно, при $\hat{\tau} = \tau_0$

оценка (2) совпадает с оценкой максимального правдоподобия амплитуды детерминированного сигнала [1—3].

Для определения характеристик оценки $\hat{a}$ подставим в (2) принимаемую сумму сигнала и шума (1). Получим

$$\hat{a}=a_0 S\ (\tau_0,\ \hat{\tau})+N/z_1\,. \tag{3}$$

Здесь

$$S\ (\tau_1,\ \tau_2)=\int\limits_{-T/2}^{T/2} s_1(t-\tau_1)\ v_1\ (t-\tau_2)\ dt/z_1^2,$$

$$N=\int\limits_{-T/2}^{T/2} n\ (t)\ v_1\ (t-\hat{\tau})\ dt/z_1,$$

$z^2=a_0^2 z_1^2$ — отношение сигнал/шум для принятого сигнала. Так как N — гауссова случайная величина с параметрами распределения (0; 1), из (3) находим смещение и рассеяние оценки амплитуды при фиксированных a_0, τ_0

$$d\ (\hat{a}/a_0,\ \tau_0)=\langle\hat{a}-a_0\rangle=a_0\,[S\ (\tau_0,\ \hat{\tau})-1], \tag{4}$$

$$V\ (\hat{a}/a_0,\ \tau_0)=\langle(\hat{a}-a_0)^2\rangle=a_0^2\{[S\ (\tau_0,\ \hat{\tau})-1]^2+z^{-2}\}.$$

Согласно (4) оценка амплитуды условно смещенная, а рассеяние ее больше рассеяния оценки максимального правдоподобия амплитуды детерминированного сигнала [2, 3]

$$V\ (a_m/a_0)=a_0^2/z^2. \tag{5}$$

Если τ_0 — случайная величина, распределенная равновероятно в интервале $[-T_0/2;\ T_0/2]$, то из (4) получаем характеристики оценки, безусловные по отношению к истинному значению временного положения τ_0 в виде:

$$d\ (\hat{a}/a_0)=a_0 T_0^{-1}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2}[S\ (\tau_0,\ \hat{\tau})-1]\,d\tau_0,$$

$$V\ (\hat{a}/a_0)=a_0^2 T_0^{-1}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2}[S\ (\tau_0,\ \hat{\tau})-1]^2\,d\tau_0+a_0^2 z^{-2}. \tag{6}$$

Рассмотренная оценка (2) удобна в том смысле, что для ее получения можно использовать приемник, который вырабатывает оценку максимального правдоподобия амплитуды сигнала с известным временным положением.

Для иллюстрации найдем характеристики оценки амплитуды (6) сигнала колокольной формы

$$s_1\ (t,\ \tau_0)=\exp[-(t-\tau_0)^2/\beta^2] \tag{7}$$

при приеме на фоне белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0. Если $\beta \ll T$, то приближенно [3]

$$S(\tau_1, \tau_2) = \exp[-(\tau_1 - \tau_2)^2/2\beta^2], \quad z^2 = a_0^2 \sqrt{2\pi}\beta/N_0. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6), получаем

$$\begin{gathered} d(\hat{a}/a_0) = a_0\{\sqrt{2\pi}\xi^{-1}[\Phi(\xi/2 - \eta) + \Phi(\xi/2 + \eta) - 1] - 1\}, \\ V(\hat{a}/a_0) = a_0^2\{\sqrt{\pi}\,\xi^{-1}[\Phi(\xi/\sqrt{2} - \eta\sqrt{2}) + \Phi(\xi/\sqrt{2} + \eta\sqrt{2}) - 1] - \\ -2\sqrt{2\pi}\xi^{-1}[\Phi(\xi/2 - \eta) + \Phi(\xi/2 + \eta) - 1] - 1 + z^{-2}\}. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $\Phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{u} \exp(-x^2/2)\,dx$ — интеграл вероятности [2], $\eta = \hat{\tau}/\beta$; $\xi = T_0/\beta$ — определяет число импульсов, разрешаемых на интервале T_0 [5]. Заметим, что при $|\xi/2 - \eta| \geqslant 2 \div 3$ значение η практически не влияет на величину смещения и рассеяния оценки. Поэтому при больших ξ ($\xi \geqslant 10$) в (9) можно положить $\eta \approx 0$. Из (9) следует, что в общем случае с ростом ξ качество оценки ухудшается. Это утверждение иллюстрируется рис. 1, где приведены зависимости нормированного рассеяния $\rho = V(\hat{a}/a_0)/a_0^2$ от величины отношения сигнал/шум z для различных значений ξ. Кривая *1* построена для $\xi = 10$; *2* — $\xi = 40$; *3* — $\xi = 100$. На этом же рисунке штрих-пунктиром нанесено относительное рассеяние оценки амплитуды детерминированного сигнала (5) $\rho_m = V(a_m/a_0)/a_0^2$. Кривые рис. 1 позволяют заключить, что незнание временного положения сигнала при использовании фильтра, рассчитанного на прием сигнала с известным временным положением, может привести к значительному увеличению рассеяния оценки.

Характеристики оценки могут быть несколько улучшены, если соответствующим образом усложнить фильтр, который используется для получения оценки. Предположим, как и ранее, что в качестве оценки амплитуды сигнала с неизвестным временным положением используется отсчет напряжения $\tilde{a}$ на выходе некоторого линейного фильтра в момент времени $\hat{\tau}$, т. е.

$$\tilde{a} = \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)\, h(\hat{\tau} - t)\, dt. \tag{10}$$

Если импульсную переходную функцию фильтра $h(t)$ выбирать из условия минимума рассеяния оценки (10), то

$$h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{j2\pi f t}\, df,$$

где согласно [6]

$$H(f) = G^*(f)\, e^{-j2\pi f\hat{\tau}}/F(f). \tag{11}$$

Здесь $F(f)$ — спектр сигнала с единичной амплитудой, а функция $G^*(f)$ определяется из решения уравнения [6]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_{pr}(f-\nu)\, G(\nu)\, d\nu + K(f)/\langle a^2\rangle |F(f)|^2 = \Theta_{pr}(f), \tag{12}$$

где

$$\Theta_{pr}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{pr}(\tau) \exp(j2\pi f\tau)\, d\tau,$$

$W_{pr}(\tau)$ — априорное распределение неизвестного временного положения сигнала; $\langle a^2\rangle$ — средний квадрат неизвестной амплитуды; $K(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)\, d\tau$ — энергетический спектр шума.

Учитывая, что физически невозможно реализовать фильтр с бесконечной полосой пропускания и для упрощения расчетов положим частотную характеристику фильтра ограниченной по полосе, т. е.

$$H(f) = \begin{cases} G^*(f)\, e^{-j2\pi f\hat{\tau}}/F(f), & |f| \leqslant \Delta f/2, \\ 0 & , \ |f| > \Delta f/2. \end{cases} \tag{13}$$

Фильтр (13) не является оптимальным в указанном выше смысле, но при достаточно больших значениях ширины полосы пропускания Δf будет близок к оптимальному фильтру (11). Полосу пропускания фильтра Δf будем выбирать такой, чтобы через фильтр проходила заданная доля энергии сигнала (например, 99%). Предположим далее, как это часто

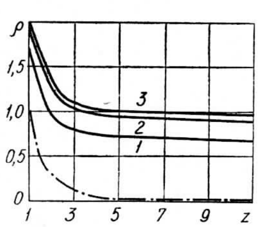

Рис. 1.

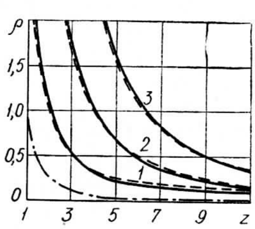

Рис. 2.

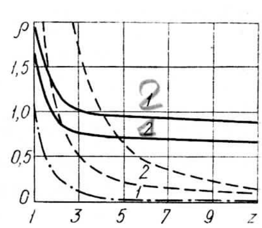

Рис. 3.

делается [1—3], что неизвестная амплитуда сигнала распределена равновероятно на достаточно большом интервале, так что в полосе пропускания фильтра

$$K(f)/\langle a^2\rangle |F(f)|^2 \ll 1. \tag{14}$$

Тогда при равновероятном распределении временного положения сигнала τ_0 в интервале $[-T_0/2;\ T_0/2]$ получаем из (12) и (13)

$$H(f) = \begin{cases} \sin(\pi f T_0)\, e^{-j2\pi f\hat{\tau}}/\pi f F(f), & |f| \leqslant \Delta f/2, \\ 0 & , \ |f| > \Delta f/2. \end{cases} \tag{15}$$

Подставляя с учетом (15) $h(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft)\, df$ и принятую реализацию суммы сигнала и шума (1) в (10), получаем

$$\tilde{a}=a_0\tilde{S}(\tau_0)+\tilde{N}. \tag{16}$$

Здесь

$$\tilde{S}(\tau_0)=\int\limits_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2}[\sin(\pi fT_0)\exp(-j2\pi f\tau_0)/\pi f]\,df,$$

а $\tilde{N}$ — гауссова случайная величина с нулевым средним значением и дисперсией

$$\sigma_N^2=\langle\tilde{N}^2\rangle=\int\limits_{-T/2}^{T/2} K(t_1-t_2)\, h(\hat{\tau}-t_1)\, h(\hat{\tau}-t_2)\, dt_1dt_2\approx$$

$$\approx\int\limits_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2}\frac{\sin^2(\pi fT_0)\, K(f)}{\pi^2f^2|F(f)|^2}\,df. \tag{17}$$

Используя (16) и (17), находим смещение и рассеяние оценки амплитуды

$$d(\tilde{a}/a_0)=a_0\left[T_0^{-1}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2}\tilde{S}(\tau_0)\,d\tau_0-1\right], \tag{18}$$

$$V(\tilde{a}/a_0)=a_0^2T_0^{-1}\int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2}[\tilde{S}(\tau_0)-1]^2\,d\tau_0+\sigma_N^2.$$

Найдем характеристики оценки (10) амплитуды сигнала (7) при приеме на фоне белого шума, полагая, по-прежнему, что $\beta\ll T$. Из (18) получаем, что смещение оценки амплитуды равно

$$d(\tilde{a}/a_0)=a_0\left\{\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi\alpha\xi)+\frac{2}{\pi^2\alpha\xi}[\cos(\pi\alpha\xi)-1]-1\right\}, \tag{19}$$

а рассеяние может быть рассчитано по формуле

$$V(\tilde{a}/a_0)=a_0^2\left\{\frac{2}{\pi^2}\left[S^2i(\pi\alpha\xi)-\frac{1}{\pi\alpha\xi}\,\mathrm{Si}(2\pi\alpha\xi)+\frac{2}{\pi\alpha\xi}\cos(\pi\alpha\xi)\,\mathrm{Si}(\pi\alpha\xi)\right]+\right.$$

$$+\frac{6}{\pi^2\alpha\xi}+\frac{2}{\pi^3\alpha\xi}\int\limits_0^{\pi\alpha\xi}\mathrm{Si}(x)\,\mathrm{Si}(\pi\alpha\xi-x)\,dx+1-\frac{4}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi\alpha\xi)-$$

$$\left.-\frac{4}{\pi^2\alpha\xi}\cos(\pi\alpha\xi)+\frac{\sqrt{2\pi\xi}}{z^2\pi^2}\int\limits_0^{\pi\alpha\xi/2}[\sin^2 x\exp(x^2/\xi)/x^2]\,dx\right\}. \tag{20}$$

Здесь Si (x) — интегральный синус; $\alpha=\Delta f\beta$. Зависимость относительного рассеяния оценки $\tilde{\rho}=V(\tilde{a}/a_0)/a_0^2$ от отношения сигнал/шум для сигнала (7) приведена на рис. 2. Сплошными линиями нанесены зависимости $\tilde{\rho}(z)$, если параметр α выбран из условия пропускания фильтром 99% энергии сигнала, пунктирные кривые показывают $\tilde{\rho}(z)$, когда параметр α выбран таким, что через фильтр проходит лишь 50% энергии полезного сигнала. Штрих-пунктиром на рис. 2 нанесено нормированное рассеяние оценки максимального правдоподобия амплитуды детерминированного сигнала (5) $\rho_m=V(a_m/a_0)/a_0^2$. Кривые *1* на рис. 2 соответствуют значению $\xi=10$; *2* — $\xi=40$; *3* — $\xi=100$.

Из рассмотрения кривых рис. 2 следует, что изменение полосы пропускания фильтра в довольно широких пределах практически не влияет на рассеяние оценки, которое увеличивается с ростом неопределенности временного положения сигнала (ростом ξ).

Для сравнения двух рассмотренных алгоритмов оценки амплитуды сигнала с неизвестным временным положением на рис. 3 приведены зависимости нормированного рассеяния оценки (2) (сплошные кривые) и оценки (10) (пунктир) от отношения сигнал/шум для сигнала (7). Кривые *2* соответствуют $\xi=10$; *1* — $\xi=40$. Штрих-пунктиром нанесено нормированное рассеяние $\rho_m=1/z^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. М., «Советское радио», 1962, **2**.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.
3. Куликов Е. И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М., «Советское радио», 1969.
4. Горяинов В. Т. Требования к точности тактовой синхронизации в системах передачи двоичной информации.— «Изв. вузов — Радиоэлектроника», 1970, **13**, № 7, стр. 787.
5. Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации. М., «Советское радио», 1955.
6. Френкс Л. Теория сигналов. М., «Советское радио», 1974.

Поступила в редакцию
3 III 1975 г.