

34

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXI

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТГІСК)

4

МОСКВА • 1976

УДК 621.391.883.2

ХАРАКТЕРИСТИКИ БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКИ ПРИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

Т. А. Радченко, А. П. Трифонов

В предположении больших отношений сигнал/шум получены приближенные формулы для смещения и рассеяния байесовской оценки неэнергетического параметра сигнала при квадратичной функции потерь. Приведены результаты математического моделирования оценки на ЭВМ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вход приемного устройства в течение интервала времени $[0; T]$ поступает реализация

$$(1) \quad x(t) = s(t, l_0) + n(t),$$

где $n(t)$ — гауссова помеха с нулевым средним значением и функцией корреляции $K(t_1, t_2)$, а $s(t, l_0)$ — полезный сигнал, являющийся известной функцией времени и неизвестного параметра l_0 . Последний распределен с плотностью вероятности $W_{\text{pr}}(l)$ на интервале $[-L/2, L/2]$. Требуется оценить (измерить) параметр l_0 . Оценкой, обладающей минимальным рассеянием (минимальной среднеквадратичной ошибкой), является байесовская оценка при квадратичной функции потерь γ_m [1]. Она представляет собой апостериорное среднее параметра

$$(2) \quad \gamma_m = \int_{-L/2}^{L/2} l W_{\text{ps}}(l) dl.$$

Здесь $W_{\text{ps}}(l)$ — апостериорная плотность вероятности оцениваемого параметра.

Вычислить смещение и рассеяние оценки (2) в общем случае затруднительно. В [2] найдены характеристики этой оценки при малых отношениях сигнал/шум. Полагая неизвестный параметр сигнала l неэнергетическим [3], рассмотрим характеристики оценки (2) при больших отношениях сигнал/шум.

2. СМЕЩЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ОЦЕНКИ

Из определения байесовской оценки при квадратичной функции потерь следует, что эта оценка обладает минимальным рассеянием, которое совпадает с байесовским риском [1]

$$(3) \quad V(\gamma_m) = \langle (\gamma_m - l_0)^2 \rangle = \left\langle \int_{-L/2}^{L/2} (\gamma_m - l)^2 W_{\text{ps}}(l) dl \right\rangle.$$

Усреднение здесь выполняется по реализациям наблюдаемых данных $x(t)$. Учитывая (2) и (3), безусловные смещение и рассеяние оценки можно за-

писать как

$$\begin{aligned} d(\gamma_m) &= \langle -j [d \ln \Theta_{ps}(\omega) / d\omega]_{\omega=0} - l_0 \rangle, \\ V(\gamma_m) &= -\langle d^2 \ln \Theta_{ps}(\omega) / d\omega^2 \rangle_{\omega=0}, \end{aligned}$$

где $\Theta_{ps}(\omega) = \int_{-L/2}^{L/2} W_{ps}(l) \exp(j\omega l) dl$ — апостериорная характеристическая функция. Апостериорная плотность вероятности имеет вид [3]

$$(4) \quad W_{ps}(l) = \frac{W_{pr}(l) \exp\left\{\int_0^T x(t) v(t, l) dt\right\}}{\int_{-L/2}^{L/2} W_{pr}(l) \exp\left\{\int_0^T x(t) v(t, l) dt\right\} dl}.$$

Здесь $v(t, l)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t, \tau) v(\tau, l) d\tau = s(t, l).$$

Подставляя в (4) значение $x(t)$ из (1) и вводя обозначения

$$\begin{aligned} z^2 &= \int_0^T s(t, l) v(t, l) dt, \quad S(l_0, l) = \int_0^T s(t, l_0) v(t, l) dt / z^2, \\ N(l) &= \int_0^T n(t) v(t, l) dt / z \end{aligned}$$

(причем $\max S(l_0, l) = \langle N(l)^2 \rangle = 1$), получаем

$$(5) \quad W_{ps}(l) = \frac{W_{pr}(l) \exp\{z^2 S(l_0, l) + zN(l)\}}{\int_{-L/2}^{L/2} W_{pr}(l) \exp\{z^2 S(l_0, l) + zN(l)\} dl}.$$

Следовательно, логарифм апостериорной характеристической функции определяется выражением

$$(6) \quad \ln \Theta_{ps}(\omega) = \ln \Psi(\omega, l_0) - C,$$

где

$$\Psi(\omega, l_0) = \int_{-L/2}^{L/2} W_{pr}(l) \exp\{j\omega l + z^2 S(l_0, l) + zN(l)\} dl,$$

$$C = \ln \int_{-L/2}^{L/2} W_{pr}(l) \exp\{z^2 S(l_0, l) + zN(l)\} dl.$$

Найдем вначале условные смещение и рассеяние оценки γ_m

$$(7) \quad \begin{aligned} d(\gamma_m / l_0) &= \langle (\gamma_m - l_0) \rangle = -j [d \langle \ln \Theta_{ps}(\omega) \rangle / d\omega]_{\omega=0} - l_0, \\ V(\gamma_m / l_0) &= \langle (\gamma_m - l_0)^2 \rangle = -[d^2 \langle \ln \Theta_{ps}(\omega) \rangle / d\omega^2]_{\omega=0}. \end{aligned}$$

Приближенные значения интегралов в (19)–(21) найдем, используя асимптотическую формулу Лапласа [5]. Получим при достаточно больших z

$$(22) \quad P_0 \simeq [1 + \mu z e^{-z^2/2} / \sqrt{2\pi} W_{\text{pr}}(l_0)]^{-1}, \quad \beta_1 \simeq W_{\text{pr}}'(l_0) / \mu^2 z^2 W_{\text{pr}}(l_0), \\ \beta_2 = 1 / \mu^2 z^2.$$

При помощи (22) перепишем (17) и (18) в виде

$$(23) \quad d(\gamma_m/l_0) \simeq (1-P_0)(l_{\text{pr}}-l_0) + P_0 W_{\text{pr}}'(l_0) / \mu^2 z^2 W_{\text{pr}}(l_0),$$

$$(24) \quad V(\gamma_m/l_0) \simeq P_0 \{1/\mu^2 z^2 - P_0 [W_{\text{pr}}'(l_0) / \mu^2 z^2 W_{\text{pr}}(l_0)]^2\} + \\ + (1-P_0) \{P_0 [l_0^2 + 2l_0 W_{\text{pr}}'(l_0) / \mu^2 z^2 W_{\text{pr}}(l_0) - 2l_0 l_{\text{pr}} - \\ - 2l_{\text{pr}} W_{\text{pr}}'(l_0) / \mu^2 z^2 W_{\text{pr}}(l_0)] + \sigma_{\text{pr}}^2 + l_{\text{pr}}^2 P_0\}.$$

Подставляя (23) и (24) в (8), можно найти безусловные смещение и рассеяние оценки γ_m .

Достаточно просто интегрирование в (8) можно выполнить при равномерном априорном распределении

$$(25) \quad W_{\text{pr}}(l) = \begin{cases} 1/L, & |l| \leq L/2, \\ 0, & |l| > L/2. \end{cases}$$

Действительно, в этом случае из (23) и (24) получаем

$$(26) \quad d(\gamma_m/l_0) \simeq -l_0(1-P_0),$$

$$(27) \quad V(\gamma_m/l_0) \simeq P_0/\mu^2 z^2 + (1-P_0)L^2/12 + (1-P_0)P_0 l_0^2,$$

где величина $P_0 = [1 + \xi z \exp(-z^2/2) / \sqrt{2\pi}]^{-1}$ совпадает с надежностью оценки, введенной в [6]; $\xi = \mu L$. Интегрируя (26) и (27) с весом (25), находим безусловные смещение и рассеяние

$$(28) \quad d(\gamma_m) \simeq 0, \quad V(\gamma_m) \simeq P_0/\mu^2 z^2 + (1-P_0)L^2/12.$$

Если в (28) перейти к пределу при $\xi = \text{const}$ и $z \rightarrow \infty$, то $P_0 \rightarrow 1$ и $V(\gamma_m) \simeq 1/\mu^2 z^2$, что совпадает с дисперсией эффективной оценки [3]. При малых z , учитывая, что предполагается $\xi \gg 1$, получаем $V(\gamma_m) \simeq L^2/12$, т. е. рассеяние оценки γ_m равно дисперсии априорного распределения (25). Таким образом, хотя приближенные формулы получены в предположении, что $z \gg 1$, они дают качественно верный результат и при малых z . Действительно, как нетрудно убедиться, точным значением рассеяния оценки γ_m при $z=0$ является дисперсия априорного распределения [2]. В общем случае точность формул (22)–(24), (26)–(28) увеличивается с ростом z и L .

3. ОЦЕНКА ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ СИГНАЛА

Для иллюстрации полученных соотношений рассмотрим простой пример оценки временного положения колокольного импульса на фоне белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 . Полезный сигнал запишем как

$$(29) \quad s(t, \tau_0) = a \exp[-(t - \tau_0)^2 \beta^2].$$

Предположим, что временное положение сигнала τ распределено на интервале $[-T_0/2; T_0/2]$ с плотностью вероятности

$$(30) \quad W_{\text{pr}}(\tau) = \begin{cases} \exp[A \cos(2\pi\tau/T_0)] / T_0 I_0(A), & |\tau| \leq T_0/2, \\ 0, & |\tau| > T_0/2, \end{cases}$$

где $I_0(A)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Варьируя параметр A распределения (30), можно исследовать зависимость характеристик оценки от степени «сконцентрированности» априорного распределения. Действительно, при $A=0$ распределение (30) переходит в равномерное (25), а при $A \rightarrow \infty$ вырождается в дельта-функцию. Для сигнала (29) при $T-T_0 \gg 1/\beta$ и помехе в виде белого шума имеем

$$(31) \quad \mu = \beta, \quad z^2 = a^2 \sqrt{2\pi}/N_0\beta, \quad S(\tau_0, \tau) = \exp[-\beta^2(\tau_0 - \tau)^2/2].$$

Подставляя (30) и (31) в (23), (24), а результат — в (8), находим безусловное рассеяние байесовской оценки при квадратичной функции потерь.

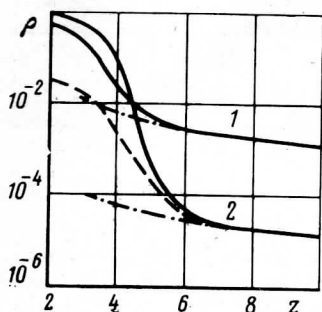


Рис. 1

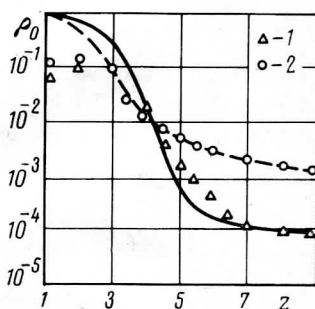


Рис. 2

На рис. 1 приведены зависимости относительного рассеяния $\rho = 12V(\gamma_m)T_0^{-2}$ от отношения сигнал/шум. Сплошными кривыми обозначено рассеяние при $A=0$, пунктиром — при $A=10$, штрих-пунктиром — нормированная дисперсия эффективной оценки [3] $\rho_E = 12/\xi^2 z^2$ для двух значений ξ : 1 — для $\xi=10$, 2 — для $\xi=100$. Величина $\xi = \beta T_0$ определяет число импульсов, разрешимых на интервале T_0 . Из рис. 1 следует, что с ростом сконцентрированности априорного распределения рассеяние оценки уменьшается. Независимо от априорного распределения с увеличением отношения сигнал/шум рассеяние байесовской оценки сходится к дисперсии эффективной оценки.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Как уже отмечалось, точность полученных формул растет с увеличением отношения сигнал/шум z . Поскольку аналитически определить точность этих формул при конечных z затруднительно, потребовалось экспериментальное исследование. На ЭВМ «БЭСМ-4» и «БЭСМ-6» было выполнено моделирование байесовской оценки в соответствии с формулами (2) и (5) для сигнальной функции (31) и априорного распределения (30). Моделирование проводилось для априорных интервалов определения параметра, соответствующих двум значениям ξ : $\xi=10$ и $\xi=40$. Ввиду больших затрат машинного времени были получены лишь условные характеристики оценки (7).

На рис. 2 представлены зависимости условного относительного рассеяния $\rho_0 = 12V(\gamma_m/\tau_0)/T_0^2$, рассчитанные по формулам (22) — (24) и (30) для $\tau_0=0$, $A=0$. Сплошная кривая соответствует $\xi=40$, пунктир — $\xi=10$. На этом же рисунке нанесены экспериментальные значения $\rho_0(z)$, которые обозначены: 1 — для $\xi=40$, 2 — для $\xi=10$. Как видно из рис. 2, для $\xi=10$ наблюдается удовлетворительное согласование теоретических и экспери-

ментальных результатов при $z \geq 3$. Заметное отклонение экспериментальных значений рассеяния байесовской оценки от расчетных при $\xi=40$ и $z=5,0; 5,5; 6,0$, возможно, обусловлено недостаточным объемом экспериментальной выборки ($N=2 \cdot 10^4$). Увеличение объема выборки до необходимой величины ($N \sim 10^5 - 10^6$) приводит к значительному увеличению затрат машинного времени даже при использовании «БЭСМ-6».

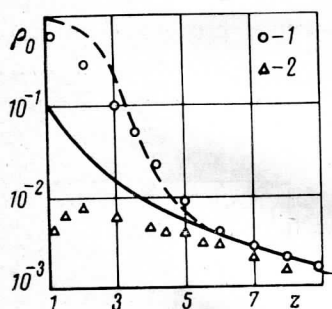


Рис. 3

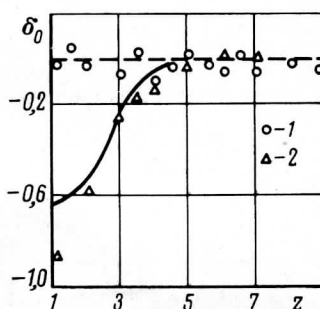


Рис. 4

На рис. 3 приведены зависимости $\rho_0(z)$ для $\xi=10$, $\tau_0=2,5\beta^{-1}$, $A=0$ (пунктир) и для $\xi=10$, $\tau_0=0$, $A=10$ (сплошные кривые). Экспериментальные значения $\rho_0(z)$ здесь обозначены: 1 — для $\tau_0=2,5\beta^{-1}$, $A=0$; 2 — для $\tau_0=0$, $A=10$. Как следует из рисунка, согласование экспериментальных и теоретических результатов для неравномерного распределения ($A=10$) наблюдается при больших отношениях сигнал/шум, чем для равномерного ($A=0$).

На рис. 4 представлено относительное условное смещение $\delta_0 = d(\gamma_m/\tau_0) V^{-1/2}(\gamma_m/\tau_0)$ для $\xi=10$, $\tau_0=2,5\beta^{-1}$, $A=0$ (сплошная кривая) и для $\xi=10$, $\tau_0=0$, $A=0$ (пунктир). Экспериментальные значения $\delta_0(z)$ обозначены: 1 — для $\tau_0=0$, 2 — для $\tau_0=2,5\beta^{-1}$. Здесь наблюдается удовлетворительное согласование теоретических и экспериментальных результатов при $z \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, 2, Изд. Советское радио, 1962.
2. А. П. Трифонов, Проблемы передачи информации, 1972, 8, 2, 112.
3. Е. И. Куликов, Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, Изд. Советское радио, 1969.
4. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1968, 13, 12, 2254.
5. Брейн де Н. Г., Асимптотические методы в анализе, ИЛ, 1961.
6. Ф. М. Вудворд, Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, Изд. Советское радио, 1955.

Поступила в редакцию
3 III 1975