(39)

(39)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1977

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1977 № 1

УДК 621.391.2

ПРИЕМ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

А. П. Трифонов

Найдены вероятности ошибок при обнаружении прямоугольного импульса с неизвестной длительностью. Получены выражения для распределения, смещения и рассеяния оценки максимального правдоподобия неизвестной длительности сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим прием прямоугольного импульса

$$s(t,\tau_0)=\begin{cases}A_0, & 0\leqslant t\leqslant\tau_0,\\ 0, & t<0,\ t>\tau_0\end{cases} \tag{1}$$

на фоне белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Полагаем, что неизвестная длительность τ сигнала (1) принимает значения из априорного интервала $[T_1;\ T_2]$, а для обнаружения сигнала (1) или для оценки его длительности используется приемник максимального правдоподобия [1]. Этот приемник вырабатывает логарифм функционала отношения правдоподобия

$$M(\tau)=\frac{2A_0}{N_0}\int_0^\tau \chi(t)\,dt-\frac{A_0{}^2\tau}{N_0} \tag{2}$$

для всех $\tau\in[T_1;\ T_2]$. Здесь $\chi(t)$ — реализация принятой суммы сигнала и шума или только шума. При обнаружении сигнала (1) решение о его наличии принимается, когда $M(\tau_m)=\text{макс}\,M(\tau)$, $\tau\in[T_1;\ T_2]$ превышает заданный порог M_0. Если в принятой реализации $\chi(t)$ всегда присутствует сигнал (1), то оценкой его неизвестной длительности является τ_m. Реализация приемника максимального правдоподобия для сигнала (1) относительно проста, поскольку $M(\tau)$ в форме (2) может быть получено как непрерывная функция τ. Действительно, $M(\tau)$ можно интерпретировать как сигнал на выходе интегратора, на вход которого подается разность $2A_0[\chi(t)-A_0/2]/N_0$. Заметим, что при приеме сигналов с неизвестной длительностью более сложной формы, чем (1), необходимо в общем случае использовать многоканальные приемники [2, 3].

Использование модели сигнала (1) предполагает применение когерентной обработки, в то время как в практических приложениях, например, в системах связи с широтно-импульсной модуляцией и др., начальная фаза радиосигнала обычно неизвестна и применяется некогерентная обработка. Тем не менее анализ приема сигнала (1) представляет определенный практический интерес, поскольку позволяет найти нижние границы помехоустойчивости некогерентной обработки при произвольных отношениях сигнал/шум. Заметим, что подобный сигнал можно использовать в качестве теоретического «эталона», позволяющего получить максимальную информацию [4]. Кроме того, известно [5], что при приеме сигнала с неизвестной длительностью и больших отношениях сигнал/шум незнание начальной фазы радиосигнала не влияет на характеристики приема. Поэтому полученные ниже выражения для вероятности пропуска сигнала и характеристик оценки при больших отношениях сигнал/шум верны и в случае некогерентного приема сигнала с неизвестной длительностью.

1. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

Найдем вероятности ошибок первого и второго рода при обнаружении сигнала (1) приемником максимального правдоподобия. В отсутствие сигнала на входе приемника $M(\tau)=(2A_0/N_0)\int\limits_0^\tau n(t)\,dt-A_0^2\tau/N_0$. Обозначим $z^2=2A_0^2T_2/N_0$ максимальное отношение сигнал/шум и перейдем к нормированному логарифму функционала отношения правдоподобия $m(\tau)=M(\tau)/z=N(\tau)-z\tau/2T_2$. Решение о наличии сигнала принимается, когда $\text{макс}\, m(\tau)>m_0$, $\tau\in[T_1;\ T_2]$, $m_0=M_0/z$. Следовательно, вероятность ложной тревоги $\alpha=P[\text{макс}\, m(\tau)>m_0]$ или

$$\alpha=1-P_N(m_0), \tag{3}$$

где

$$P_N(m_0)=P[m_0-m(\tau)>0]=P[x(\tau)>0]. \tag{4}$$

Поскольку $x(\tau)=m_0-m(\tau)$ — реализация марковского процесса с коэффициентами сноса и диффузии

$$a=z/2T_2,\quad b=1/T_2, \tag{5}$$

то вероятность (4) определяется соотношением

$$P_N(m_0)=\int\limits_0^\infty W(x,T_2)\,dx. \tag{6}$$

Здесь $W(x, T_2)$ — решение уравнения [4, 6]

$$\frac{\partial W(x,\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}[aW(x,\tau)]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[bW(x,\tau)]=0 \tag{7}$$

при граничных условиях

$$W(x,\tau)\,|_{x=0}=W(x,\tau)\,|_{x=\infty}=0 \tag{8}$$

и начальном условии

$$W(x,\tau)\,|_{\tau=T_1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1}}\exp\left[-\frac{(x-m_0-z\eta_1/2)^2}{2\eta_1}\right],\qquad x\geqslant 0, \tag{9}$$

где $\eta_1=T_1/T_2$. Применяя метод отражения с переменой знака [6], получаем решение уравнения (7) при коэффициентах (5) в виде

$$W(x,\tau)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\eta_1\nu}}\int\limits_0^\infty\exp\left[-\frac{(\xi-m_0-z\eta_1/2)^2}{2\eta_1}\right]\times$$
$$\times\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-x+z\nu/2)^2}{2\nu}\right]-\exp\left[-\xi z-\frac{(\xi+x-z\nu/2)^2}{2\nu}\right]\right\}d\xi, \tag{10}$$

$\nu=(\tau-T_1)/T_2$. Подставляя (10) при $\tau=T_2$ в (6), а (6) в (3), находим вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с неизвестной длительностью:

$$\alpha=1-\Phi\left(\frac{m_0}{\sqrt{\eta_1}}+\frac{z}{2}\sqrt{\eta_1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1}}\int_0^\infty \exp\left[-\xi z-\frac{(\xi-m_0+z\eta_1/2)^2}{2\eta_1}\right]\times \Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta_1}-\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta_1}}\right)d\xi, \tag{11}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi h_1}}\int_0 \exp\left[-\frac{(\xi-m_0-zh_1/2)^2}{2h_1}\right]\times\left[\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-h_1}+\frac{\xi}{\sqrt{1-h_1}}\right)-\exp(-\xi z)\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-h_1}-\frac{\xi}{\sqrt{1-h_1}}\right)\right]d\xi$$

$\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [4]. Формула (11) несколько упрощается при $\eta_1=0$, т. е. когда неизвестная длительность сигнала может принимать значения из интервала $[0;\,T_2]$. В этом случае

$$\alpha=1-\Phi(m_0+z/2)+\exp(-zm_0)\,[1-\Phi(m_0-z/2)]. \tag{12}$$

Если $T_1\to T_2$, т. е. априорный интервал определения неизвестной длительности стягивается в точку, то $\eta_1\to 1$ и из (11) имеем

$$\alpha=\alpha_0=1-\Phi(m_0+z/2), \tag{13}$$

что совпадает с вероятностью ложной тревоги при обнаружении сигнала с априори известной длительностью [2, 4].

Общее выражение для вероятности ложной тревоги довольно громоздко, поэтому может оказаться целесообразным использование асимптотической формулы, справедливой при больших отношениях сигнал/шум z:

$$\alpha\simeq 1-\Phi(m_0+z/2)-\exp(-zm_0)\,\Phi(m_0-z/2)+\exp(-zm_0)\times \Phi(m_0/\sqrt{\eta_1}-z\sqrt{\eta_1}/2)-\Phi(m_0/\sqrt{\eta_1}+z\sqrt{\eta_1}/2)+ \Phi(m_0/\sqrt{\eta_1}+z/2\sqrt{\eta_1}).$$

Перейдем к определению вероятности пропуска сигнала $\beta(\tau_0)$. При наличии на входе приемника сигнала (1) нормированный логарифм функционала отношения правдоподобия равен

$$m(\tau)=M(\tau)/z=\frac{z}{T_2}\left[\text{мин}(\tau,\tau_0)-\frac{\tau}{2}\right]+N(\tau). \tag{14}$$

По определению $\beta(\tau_0)=P[\text{макс}\, m(\tau)<m_0]=P[x(\tau)>0]$, где $x(\tau)$ — реализация марковского процесса с коэффициентами сноса и диффузии

$$a=\frac{z}{2T_2}\begin{cases}-1, & T_1\leqslant\tau<\tau_0\\ 1, & \tau_0<\tau\leqslant T_2\end{cases},\qquad b=\frac{1}{T_2}. \tag{15}$$

Аналогично (6) имеем $\beta(\tau_0)=\int_0^\infty W_s(x,T_2)\,dx$, где $W_s(x,\ T_2)$ — решение уравнения (7) с граничными и начальными условиями (8), (9) при коэффициентах сноса и диффузии (15). Опять, используя для решения (7) метод отражения с переменой знака [6], находим, что

$$\beta(\tau_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_0}}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi+z\eta_0/2)^2+m_0^2-m_0z\eta_0}{2\eta_0}\right]\times \tag{16}$$

$$\times\left\{\exp\left(\frac{m_0\xi}{\eta_0}\right)\Phi\left(m_0\sqrt{\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_1\eta_0}}+\xi\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_0(\eta_0-\eta_1)}}\right)-\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{m_0\xi}{\eta_0}\right)\Phi\left(m_0\sqrt{\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0\eta_1}}-\xi\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_0(\eta_0-\eta_1)}}\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta_0}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)-\exp(-\xi z)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta_0}-\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)\right\}d\xi,$$

где $\eta_0=\tau_0/T_2$. Формула (16) несколько упрощается при $\eta_1=0$:

$$\beta(\tau_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi\eta_0}}\int\limits_0^\infty\exp\left[-\frac{(\xi+z\eta_0/2)^2+m_0^2-m_0z\eta_0}{2\eta_0}\right]\operatorname{sh}\left(\frac{m_0\xi}{\eta_0}\right)\times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta_0}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)-\exp(-\xi z)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta_0}-\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)\right]d\xi.$$

Если же $T_1\to T_2$, т. е. $\eta_1\to 1$, то для вероятности пропуска из (16) имеем

(17) $$\beta(\tau_0)=\beta_0=\Phi(m_0-z/2),$$

что совпадает с вероятностью пропуска при обнаружении сигнала с априори известной длительностью [2, 4].

Таким образом, при обнаружении сигнала с неизвестной длительностью приемником максимального правдоподобия вероятности ошибок первого и второго рода могут быть найдены из формул (11) и (16).

Кроме приемника максимального правдоподобия для обнаружения сигнала с неизвестной длительностью можно использовать различные квазиоптимальные системы. В частности, для обнаружения таких сигналов можно использовать подход, развитый в [7] применительно к обнаружению сигналов с неизвестным временны́м положением. Положим, что квазиоптимальный приемник формирует величину

(18) $$M(\hat{\tau})=\frac{2A_0}{N_0}\int\limits_0^{\hat{\tau}}\chi(t)\,dt-\frac{A_0^2\hat{\tau}}{N_0},$$

где $\hat{\tau}$ — некоторая точка из интервала $[T_1;\ T_2]$. Решение о наличии сигнала принимается, когда $M(\hat{\tau})>M_0$. В отсутствие сигнала на входе приемника $M(\hat{\tau})=zN(\hat{\tau})-z^2\hat{\eta}/2$, где $\hat{\eta}=\hat{\tau}/T_2$, а $N(\hat{\tau})$ — гауссова случайная величина с параметрами $(0,\ \sqrt{\hat{\eta}})$. Следовательно, вероятность ложной тревоги при использовании квазиоптимального приемника, реализующего алгоритм (18), равна

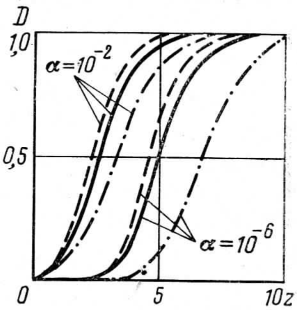

Рис. 1

(19) $$\hat{\alpha}=1-\Phi(m_0/\sqrt{\hat{\eta}}+z\sqrt{\hat{\eta}}/2).$$

При наличии сигнала $M(\hat{\tau})=z^2\,\text{мин}\,(\hat{\eta},\ \eta_0)-z^2\hat{\eta}/2+zN(\hat{\tau})$, так что вероятность пропуска сигнала может быть найдена из формулы

(20) $$\hat{\beta}=\begin{cases}\Phi(m_0/\sqrt{\hat{\eta}}-z\sqrt{\hat{\eta}}/2), & \hat{\eta}\leqslant\eta_0,\\ \Phi(m_0/\sqrt{\hat{\eta}}-z\eta_0/2\sqrt{\hat{\eta}}), & \hat{\eta}\geqslant\eta_0.\end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим характеристики обнаружения сигнала (1), когда его неизвестная длительность $\tau_0=T_2$ ($\eta_0=1$), а априорный интервал определения неизвестной длительности есть $[0;\ T_2]$ ($\eta_1=0$). При использовании приемника максимального правдоподобия вероятность ложной тревоги будет определяться из (12), а выражение для вероятности пропуска сигнала (16) примет вид

$$\beta=\beta(\tau_0=T_2)=\Phi(m_0-z/2)-\exp(zm_0)[1-\Phi(m_0+z/2)].$$

Если для обнаружения используется квазиоптимальный приемник, то согласно (19), (20) при $\hat{\tau}=T_2/2$ ($\hat{\eta}=1/2$) вероятности ошибок первого и второго рода равны: $\hat{\alpha}=1-\Phi(2m_0/\sqrt{2}+z/2\sqrt{2})$, $\hat{\beta}=\Phi(m_0/\sqrt{2}-z/2\sqrt{2})$. На рис. 1 приведены зависимости вероятности правильного обнаружения $D=1-\beta$ сигнала с неизвестной длительностью (при $\tau_0=T_2$) от величины отношения сигнал/шум при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги. Сплошные кривые представляют зависимости $D(z)$ для приемника максимального правдоподобия, а штрих-пунктиром нанесены зависимости $D(z)$ для квазиоптимального приемника. На этом же рисунке для сравнения пунктиром нанесены кривые обнаружения для сигнала с известной длительностью (13), (17). Из рассмотрения кривых рис. 1 следует, что при $\tau_0=T_2$ потери в качестве обнаружения за счет незнания длительности сигнала относительно невелики при использовании приемника максимального правдоподобия. Применение квазиоптимального приемника приводит к заметно большим потерям. При помощи кривых рис. 1 можно определить выигрыш в качестве обнаружения при использовании приемника максимального правдоподобия вместо более простого квазиоптимального приемника, реализующего алгоритм (18). Приведенная на рис. 1 зависимость $D(z)$ для приемника максимального правдоподобия при $\tau_0=T_2$ представляет собой верхнюю границу вероятности правильного обнаружения. С уменьшением истинного значения длительности сигнала $D(z)$ уменьшается и при $\tau_0=0$ достигает минимального значения $D=\alpha$.

2. ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА

Рассмотрим характеристики оценки максимального правдоподобия τ_m длительности τ_0 сигнала (1), предполагая, что он всегда присутствует на входе приемника. Так как τ_m — положение абсолютного максимума (2) или (14), то функцию распределения оценки можно записать в виде

$$P_m(T)=P[\tau_m<T]=P[\max_{T_1\leqslant\tau<T} m(\tau)>\max_{T\leqslant\tau\leqslant T_2} m(\tau)]. \tag{21}$$

Обозначая $\mu(\tau)=m(\tau)-m(T)$, перепишем (21) как

$$P_m(T)=P[\max_{T_1\leqslant\tau<T}\mu(\tau)>\max_{T\leqslant\tau\leqslant T_2}\mu(\tau)].$$

Следовательно, распределение оценки можно выразить через двумерную функцию распределения абсолютных максимумов процесса $\mu(\tau)$:

$$P(u,v,T)=P[\max_{T_1\leqslant\tau<T}\mu(\tau)<u,\ \max_{T\leqslant\tau\leqslant T_2}\mu(\tau)<v].$$

Отрезки реализаций случайного процесса $\mu(\tau)-\langle\mu(\tau)\rangle$ при $T_1<\tau<T$ и $T<\tau<T_2$ представляют собой интегралы от реализаций белого шума на неперекрывающихся интервалах. Поэтому

$$P(u,v,T)=P[\max_{T_1\leqslant\tau<T}\mu(\tau)<u]P[\max_{T\leqslant\tau\leqslant T_2}\mu(\tau)<v]=P_{1T}(u)P_{2T}(v),$$

а распределение оценки равно [8]

$$P_m(T)=\int_0^\infty P_{2T}(u)\,dP_{1T}(u). \tag{22}$$

Обозначим: $y(\tau)=u-\mu(\tau)$, $T_1\leqslant\tau<T$ и $x(\tau)=v-\mu(\tau)$, $T\leqslant\tau\leqslant T_2$. Тогда $P_{1T}(u)=P[y(\tau)>0]$, $P_{2T}(v)=P[x(\tau)>0]$. Заметим, что $x(\tau)$ и $y(\tau)$ – реализации марковского процесса с коэффициентами сноса и диффузии (15). Следовательно, например, для $P_{2T}(v)$ можем записать

$$P_{2T}(v)=\int_0^\infty W_{2T}(x,T_2)\,dx, \tag{23}$$

где $W_T(x, T_2)$ – решение уравнения (7) с коэффициентами (15) при начальном условии $W_T(x, T)=\delta(x-v)$ и с граничными условиями (8). Воспользовавшись методом отражения с переменой знака, находим при $T<\tau_0$

$$W_{2T}(x,T_2)=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{(\eta_0-\eta)(1-\eta_0)}}\int_0^\infty\left[\exp\left\{-\frac{[v-\xi-z(\eta_0-\eta)/2]^2}{2(\eta_0-\eta)}\right\}-\right.$$
$$\left.-\exp\left\{zv-\frac{[v+\xi+z(\eta_0-\eta)/2]^2}{2(\eta_0-\eta)}\right\}\right]\left[\exp\left\{-\frac{[\xi-x+z(1-\eta_0)/2]^2}{2(1-\eta_0)}\right\}-\right.$$
$$\left.-\exp\left\{-z\xi-\frac{[\xi+x-z(1-\eta_0)/2]^2}{2(1-\eta_0)}\right\}\right]d\xi \tag{24}$$

и при $T>\tau_0$

$$W_{2T}(x,T_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\eta)}}\left[\exp\left\{-\frac{[v-x+z(1-\eta)/2]^2}{2(1-\eta)}\right\}-\right.$$
$$\left.-\exp\left\{-zv-\frac{[v+x-z(1-\eta)/2]^2}{2(1-\eta)}\right\}\right]. \tag{24a}$$

Здесь $\eta=T/T_2$. Подставляя (24) в (23), получаем при $T<\tau_0$

$$P_{2T}(v)=\sqrt{\frac{2}{\pi(\eta_0-\eta)}}\times$$
$$\times\int_0^\infty \operatorname{sh}\left(\frac{v\xi}{\eta_0-\eta}\right)\exp\left\{-\frac{[\xi+z(\eta_0-\eta)/2]^2+v^2-zv(\eta_0-\eta)}{2(\eta_0-\eta)}\right\}\times$$
$$\times\left[\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta_0}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)-\right.$$
$$\left.-\exp(-z\xi)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta_0}-\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)\right]d\xi \tag{25}$$

и при $T>\tau_0$

$$P_{2T}(v)=\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta}+\frac{v}{\sqrt{1-\eta}}\right)-$$
$$-\exp(-zv)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta}-\frac{v}{\sqrt{1-\eta}}\right). \tag{25a}$$

Аналогично, при $T<\tau_0$ находим

(26)
$$P_{1T}(u)=\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{\eta-\eta_1}+\frac{u}{\sqrt{\eta-\eta_1}}\right)-$$
$$-\exp(-zu)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{\eta-\eta_1}-\frac{u}{\sqrt{\eta-\eta_1}}\right),$$

а при $T>\tau_0$

(26а)
$$P_{1T}(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi(\eta-\eta_0)}}\int\limits_0^\infty \operatorname{sh}\left(\frac{u\xi}{\eta-\eta_0}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{[\xi+z(\eta-\eta_0)/2]^2+u^2-zu(\eta-\eta_0)}{2(\eta-\eta_0)}\right\}\times$$
$$\times\left[\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{\eta_0-\eta_1}+\frac{\xi}{\sqrt{\eta_0-\eta_1}}\right)-\right.$$
$$\left.-\exp(-z\xi)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{\eta_0-\eta_1}-\frac{\xi}{\sqrt{\eta_0-\eta_1}}\right)\right]d\xi.$$

Для получения распределения оценки максимального правдоподобия длительности сигнала надо подставить (25) и (26) в (22). При $T_1\leqslant T\leqslant\tau_0$ имеем

(27)
$$P_m(T)=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi(\eta_0-\eta)}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\left[\sqrt{\frac{2}{\pi(\eta-\eta_1)}}\exp\left\{-\frac{[u+z(\eta-\eta_1)/2]^2}{2(\eta-\eta_1)}\right\}+\right.$$
$$\left.+z\exp(-zu)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{\eta-\eta_1}-\frac{u}{\sqrt{\eta-\eta_1}}\right)\right]\operatorname{sh}\left(\frac{u\xi}{\eta_0-\eta}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{[\xi+z(\eta_0-\eta)/2]^2+u^2-zu(\eta_0-\eta)}{2(\eta_0-\eta)}\right\}\times$$
$$\times\left[\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta_0}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)-\right.$$
$$\left.-\exp(-z\xi)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta_0}-\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta_0}}\right)\right]du\,d\xi,$$

а при $\tau_0\leqslant T\leqslant T_2$

(27а)
$$P_m(T)=1-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi(\eta-\eta_0)}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\left[\sqrt{\frac{2}{\pi(1-\eta)}}\exp\left\{-\frac{[u+z(1-\eta)/2]^2}{2(1-\eta)}\right\}+\right.$$
$$\left.+z\exp(-zu)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{1-\eta}-\frac{u}{\sqrt{1-\eta}}\right)\right]\operatorname{sh}\left(\frac{u\xi}{\eta-\eta_0}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{[\xi+z(\eta-\eta_0)/2]^2+u^2-zu(\eta-\eta_0)}{2(\eta-\eta_0)}\right\}\times$$
$$\times\left[\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{\eta_0-\eta_1}+\frac{\xi}{\sqrt{\eta_0-\eta_1}}\right)-\right.$$

$$-\exp(-z\xi)\,\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{\eta_0-\eta_1}-\frac{\xi}{\sqrt{\eta_0-\eta_1}}\right)\Bigg]\,du\,d\xi.$$

В явном виде функцию $P_m(T)$ достаточно просто получить, если $z=0$. Тогда $P_m(T)$ – функция распределения положения абсолютного максимума шумовой функции $N(\tau)$, которая представляет собой реализацию чисто диффузионного (винеровского) процесса [6]. Полагая в (27) $z=0$, находим функцию распределения $P_m(T)=(2/\pi)\ \mathrm{arctg}\sqrt{(T-T_1)/(T_2-T)}$ $(T_1\leqslant T\leqslant T_2)$ и плотность вероятности

(28) $$W_m(T)=1/\pi\sqrt{(T_2-T)(T-T_1)}$$

положения абсолютного максимума реализации винеровского процесса на интервале $[T_1;\ T_2]$. Из (28) получаем первые два момента положения τ_{mN} абсолютного максимума шумовой функции $N(\tau)$:

(29) $$\langle\tau_{mN}\rangle=(T_1+T_2)/2,\quad \langle\tau_{mN}^2\rangle-\langle\tau_{mN}\rangle^2=(T_2-T_1)^2/8.$$

Согласно (29) среднее значение положения абсолютного максимума шумовой функции $N(\tau)$ совпадает с серединой априорного интервала $[T_1;\ T_2]$, где плотность вероятности (28) минимальна.

Обозначив далее через $\eta_m=\tau_m/T_2$ нормированную оценку длительности, условные смещение и рассеяние оценки τ_m можем записать как

(30) $$d(\tau_m/\tau_0)=\langle\tau_m-\tau_0\rangle=T_2(1-\eta_0-J_1),$$
$$V(\tau_m/\tau_0)=\langle(\tau_m-\tau_0)^2\rangle=T_2^2(1-2J_2-2\eta_0+2\eta_0J_1+\eta_0^2).$$

Здесь

$$J_1=\int_{\eta_1}^{1}P(\eta)\,d\eta,\qquad J_2=\int_{\eta_1}^{1}\eta P(\eta)\,d\eta,$$

а $P(\eta)=P[\eta_m<\eta]$ – распределение нормированной оценки, которое определяется согласно (27). В общем случае, для вычисления распределения оценки и ее числовых характеристик (30) необходимо использование численных методов. Однако выражения (27), (30) заметно упрощаются при больших отношениях сигнал/шум. Положив для простоты $\eta_1=0$, найдем асимптотические выражения для характеристик оценки. Когда истинное значение длительности совпадает с одной из граничных точек априорного интервала, например, $\eta_0=\eta_1=0$, асимптотическое выражение для плотности вероятности оценки имеет вид

$$W_m(\eta/\eta_0=0)\simeq\frac{z}{\sqrt{2\pi\eta}}\exp\left(-\frac{z^2\eta}{8}\right)-$$
$$-\frac{z^2}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{\eta}\right)\right],\quad \eta\geqslant 0,$$

а смещение и рассеяние нормированной оценки равны

(31) $$d(\eta_m/\eta_0=0)\simeq 2/z^2,\quad V(\eta_m/\eta_0=0)\simeq 16/z^4.$$

Заметим, что при максимальном истинном значении длительности $\eta_0=1$ $(\tau_0=T_2)$ для любых отношений сигнал/шум рассеяние оценки такое же, как и при $\eta_0=0$, т. е. $V(\eta_m/\eta_0=0)=V(\eta_m/\eta_0=1)$, а соответствующие смещения отличаются только знаком: $d(\eta_m/\eta_0=0)=-d(\eta_m/\eta_0=1)$. Если же истинное значение длительности расположено внутри априорного интервала, т. е. если $0<\eta_0<1$ $(0<\tau_0<T_2)$, асимптотическое выражение для плот-

ности вероятности нормированной оценки может быть записано как

$$W_m(\eta/0<\eta_0<1)\simeq\frac{3z^2}{2}\exp(z^2|\eta-\eta_0|)\left[1-\Phi\left(\frac{3z}{2}\sqrt{|\eta-\eta_0|}\right)\right]-$$

$$-\frac{z^2}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{z}{2}\sqrt{|\eta-\eta_0|}\right)\right].$$

Смещение и рассеяние нормированной оценки теперь определяются выражениями

$$d(\eta_m/0<\eta_0<1)\simeq 0, \tag{32}$$

$$V(\eta_m/0<\eta_0<1)\simeq\frac{160}{z^4}[{}_2F_1(1,1/2,4,8/9)-1]\simeq\frac{25,6}{z^4}.$$

26

Для оценки погрешности полученных асимптотических выражений на рис. 2 приведена зависимость смещения нормированной оценки от отношения сигнал/шум при $\eta_0=\eta_1=0$, рассчитанная по точным формулам (27),

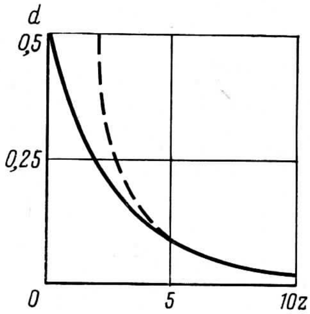

Рис. 2

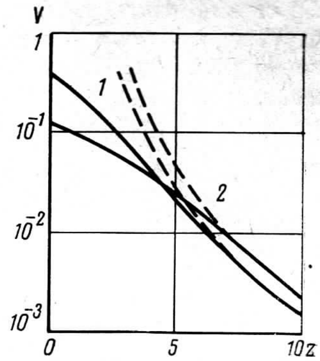

Рис. 3

(30) и по асимптотической формуле (31) (пунктир). На рис. 3 кривой *1* показана точная зависимость рассеяния нормированной оценки от отношения сигнал/шум при $\eta_0=\eta_1=0$ и кривой *2* — аналогичная зависимость для $\eta_0=0,5$, $\eta_1=0$. Здесь же пунктиром нанесены приближенные зависимости $V(z)$, рассчитанные по асимптотическим формулам (31), (32). Как следует из рис. 2, 3, асимптотические формулы (31), (32) удовлетворительно аппроксимируют точные зависимости при $z>5-6$.

В заключение автор благодарит Ю. С. Радченко за помощь в расчете графиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Маршаков, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1974, **19**, 11, 2266.
2. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, 2, Изд. Советское радио, 1975.
3. Е. И. Куликов, Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, Изд. Советское радио, 1969.
4. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, Изд. Советское радио, 1966.
5. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов, Радиотехника, 1972, **27**, 1, 10.
6. В. И. Тихонов, Н. К. Кульман, Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов, Изд. Советское радио, 1975.
7. В. Т. Горяинов, Изв. вузов МВССО СССР (Радиоэлектроника), 1970, **13**, 7, 787.
8. А. С. Терентьев, Радиотехника и электроника, 1968, **13**, 4, 652.

Поступила в редакцию
22 X 1975