

46 АКАДЕМИЯ НАУК СССР 46

**ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР
ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА**

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА · 1978

ПЕРЕРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

ПРИЕМ РАЗРЫВНОГО КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ ГАУССОВСКОЙ ПОМЕХИ

А. П. ТРИФОНОВ

(Воронеж)

1. Большой класс практически используемых сигналов составляют квазидетерминированные сигналы, под которыми понимаются сигналы точно известной формы, содержащие один или несколько неизвестных параметров. Для обнаружения таких сигналов и оценки их параметров часто используется метод максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем называть приемником максимального правдоподобия. Применительно к квазидетерминированным сигналам, которые являются аналитическими функциями неизвестных параметров, анализ приемника максимального правдоподобия выполнен в [1-6] и др.

Однако в ряде приложений находят широкое применение модели сигналов, которые описываются неаналитическими (в общем случае разрывными) функциями неизвестных параметров. Прием таких сигналов на фоне гауссовской помехи в виде белого шума рассматривался в [7-10] и др. При этом основное внимание уделялось оценке параметра разрывного сигнала. В [7, 8] найдены характеристики оценки без учета влияния величины априорного интервала определения неизвестного параметра, которое обсуждается в [9, 10]. В [9] лишь получены границы для вероятности больших (аномальных) ошибок, а в [10] найдена нижняя граница для среднего квадрата ошибок оценивания без конкретизации алгоритма оценки. Ниже с учетом влияния величины априорного интервала определения параметра рассмотрен прием разрывного сигнала на фоне коррелированной гауссовской помехи. Получены асимптотически точные (с увеличением отношения сигнал/шум и априорного интервала) выражения для характеристик обнаружения разрывного сигнала и оценки его параметра по методу максимального правдоподобия.

2. Пусть в течение интервала времени $[0; T]$ наблюдается реализация случайного процесса $x(t) = n(t)$ или $x(t) = s(t, l_0) + n(t)$. Здесь $n(t)$ — реализация стационарного случайного гауссовского процесса с нулевым средним значением $\langle n(t) \rangle = 0$ и функцией корреляции $K(\tau) = \langle n(t)n(t+\tau) \rangle$, $s(t, l_0)$ — полезный сигнал, l_0 — значение неизвестного параметра, считаемого неэнергетическим [1, 5, 6]. Приемник максимального правдоподобия вырабатывает логарифм функционала отношения правдоподобия, который с точностью до постоянных слагаемых равен [5, 6]

$$M(l) = \int_0^T x(t)v(t, l) dt \quad (2.1)$$

для всех $l \in [-L/2; L/2]$, где L — априорный интервал определения неизвестного параметра сигнала. Функция $v(t, l)$ находится из интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t-\tau)v(\tau, l)d\tau = s(t, l), \quad t \in [0; T], \quad |l| \leq L/2.$$

При наличии сигнала $M(l) = z^2 S(l_0, l) + zN(l)$, а при его отсутствии $M(l) = zN(l)$. Здесь

$$S(l_1, l_2) = \int_0^T s(t, l_1)v(t, l_2)dt/z^2 \quad (2.2)$$

— нормированная сигнальная функция, $z^2 = \int_0^T s(t, l)v(t, l)dt$ — отношение

сигнал/шум, а $N(l)$ — реализация гауссовского случайного процесса с нулевым средним значением и функцией корреляции (2.2). Поскольку параметр l предполагается неэнергетическим, то z не зависит от значения параметра l , а $S(l, l+\lambda) = S(\lambda) = S(-\lambda)$ [5, 6].

Ограничимся рассмотрением класса сигналов, для которых при $\lambda \rightarrow 0$

$$S(\lambda) = 1 - \delta|\lambda| + o(|\lambda|), \quad \delta > 0, \quad (2.3)$$

а при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$S(\lambda) = o(|\ln|\lambda||^{-1}). \quad (2.4)$$

При приеме сигналов с неизвестным временным положением на фоне белого шума к этому классу относятся, например, прямоугольный импульс [1, 7, 9, 10], экспоненциальный импульс или любой сигнал, который описывается функцией времени, имеющей один или несколько разрывов непрерывности первого рода [8]. Однако приведенными примерами не исчерпывается класс сигналов, для которых сигнальные функции допускают представление (2.3). Например, узкополосный радиоимпульс с равномерным в ограниченной полосе F_0 спектром

$$s(t) = \sin \pi F_0 t \cos 2\pi f t / \pi t \quad (2.5)$$

является аналитической функцией несущей частоты f . Тем не менее при приеме сигнала (2.5) с неизвестным параметром f на фоне белого шума соответствующая сигнальная функция удовлетворяет (2.3), где теперь $\delta = 1/F_0$. Число сигналов, для которых справедливо соотношение (2.3), существенно возрастает при помехе в виде коррелированного гауссовского шума. Далее под разрывными понимаются сигналы, для которых выполняются (2.3) и (2.4). Это определение обобщает понятие разрывного сигнала с неизвестным временным положением при помехе в виде белого шума [8] на коррелированные помехи и любые неэнергетические параметры.

Заметим, что хотя в силу (2.3) реализации логарифма функционала отношения правдоподобия $M(l)$ (2.1) недифференцируемы, они тем не менее непрерывны с вероятностью единица.

3. Найдем характеристики обнаружения разрывного сигнала. Вероятности ошибок первого (ложной тревоги) α и второго рода (пропуска сигнала) β в приемнике максимального правдоподобия, осуществляющем сравнение абсолютного максимума $M(l)$ (2.1) с порогом M_0 , можно записать как $\alpha = P[H_N > M_0]$ и $\beta(l_0) = P[H_{sN} < M_0]$. Здесь H_N и H_{sN} — величины абсолютных максимумов $M(l)$ ($|l| \leq L/2$) соответственно в отсутствие и при наличии полезного сигнала $s(t, l_0)$ в принятой реализации $x(t)$. Обозначая l_m — положение абсолютного максимума (2.1), для вероятности ложной тревоги имеем

$$\alpha = P[N(l_m) > u], \quad (3.1)$$

где $u=M_0/z$ — нормированный порог. Чтобы вычислить α по этой формуле, необходимо определить функцию распределения величины абсолютного максимума реализаций случайного процесса $N(l)$: $F_N(H)=P[N(l_m)<H]$. Точное выражение для $F_N(H)$ неизвестно, однако, используя результаты [11, 12], можно найти асимптотическое значение этого распределения. В Приложении показано, что при $H \rightarrow \infty$

$$F_N(H) \rightarrow \exp[-(mH/(2\pi)^{1/2}) \exp(-H^2/2)], \quad m=\delta L. \quad (3.2)$$

Для конечных значений H будем аппроксимировать распределение $F_N(H)$ его предельным значением. Поскольку правая часть (3.2) является не убывающей функцией H лишь при $H \geq 1$, положим приближенно

$$F_N(H) \simeq \begin{cases} \exp[-(mH/(2\pi)^{1/2}) \exp(-H^2/2)], & H \geq 1, \\ 0, & H < 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Согласно (3.3) и (3.1), приближенное выражение для вероятности ложной тревоги принимает вид

$$\alpha \simeq \begin{cases} 1 - \exp[-(mu/(2\pi)^{1/2}) \exp(-u^2/2)], & u \geq 1, \\ 1, & u < 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Точность этой приближенной формулы возрастает с увеличением нормированного порога u и параметра m .

Определим вероятность пропуска сигнала $\beta(l_0)$. Обозначим Δ — интервал корреляции шумовой функции $N(l)$ так, что $|S(\lambda)| < \varepsilon$ при $|\lambda| > \Delta$. Согласно (2.4), $\Delta < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Пусть H_s — величина абсолютного максимума $M(l)$ при $|l-l_0| \leq \Delta$; H_N^* — то же самое при $-L/2 \leq l < l_0 - \Delta$, $l_0 + \Delta < l \leq L/2$. Тогда при $m \gg 1$ приближенное значение вероятности пропуска можно записать как

$$\beta(l_0) \simeq P[H_N^* < M_0] P[H_s < M_0] = F_N^*(M_0) F_s(M_0). \quad (3.5)$$

Эта формула будет точной, когда случайные величины H_s и H_N^* статистически независимы. Однако если расстояние между абсолютными максимумами H_s и H_N^* меньше интервала корреляции Δ , то они в общем случае зависимы. В силу стационарности шумовой функции $N(l)$ положение абсолютного максимума H_N^* распределено равномерно в интервале $L-2\Delta$. Значит, вероятность того, что случайные величины H_s и H_N^* статистически зависимы, определяется отношением $\Delta/(L-2\Delta)$. Поэтому при $\Delta < \infty$ и $L \rightarrow \infty$ величины H_s и H_N^* статистически независимы с вероятностью, стремящейся к единице. Соответственно приближенная формула (3.5) является асимптотически точной при $L/\Delta \rightarrow \infty$ или, что то же самое, для большинства сигналов — при $m \rightarrow \infty$.

Приближенное значение вероятности $F_N^*(M_0)$ при $m \gg 1$ получаем в виде

$$F_N^*(M_0) \simeq F_N(u), \quad (3.6)$$

где $F_N(\cdot)$ определяется из (3.3). Функция $F_s(M_0)$ в (3.5) представляет собой распределение величины абсолютного максимума $M(l)$ при $|l-l_0| \leq \Delta$. При наличии сигнала и $|l-l_0| \leq \Delta$, $H_s = M(l_m) = z^2 S(l_0, l_m) + zN(l_m)$, где l_m — положение абсолютного максимума H_s . Аналогично [8] можно показать, что при $z \rightarrow \infty$ оценка максимального правдоподобия $l_m \rightarrow l_0$ в среднеквадратическом смысле. Учитывая, что реализация логарифма функционала отношения правдоподобия $M(l)$ непрерывна с вероятностью единицы, имеем: $F_s(M_0) \rightarrow \Phi(u-z)$, где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [1]. Следовательно, при больших, но конечных отношениях сигнал/шум

$$F_s(M_0) \simeq \Phi(u-z). \quad (3.7)$$

Подставляя (3.6) и (3.7) в (3.5), находим приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала

$$\beta \approx \begin{cases} \exp[-(mu/(2\pi)^{1/2}) \exp(-u^2/2)] \Phi(u-z), & u \geq 1, \\ 0, & u < 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

причем точность этой формулы растет с увеличением u , z и m .

Таким образом, при обнаружении квазидетерминированного разрывного сигнала по методу максимального правдоподобия характеристики обнаружения находятся из (3.4), (3.8). Эти формулы позволяют приближенно оценить величины вероятностей ошибок первого и второго рода для больших, но конечных u , z , m и являются асимптотически точными при $u \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$.

4. Рассмотрим характеристики приемника максимального правдоподобия, когда производится оценка неизвестного параметра l_0 сигнала $s(t, l_0)$. При этом предполагается, что $x(t) = s(t, l_0) + n(t)$, т. е. в принятой реализации $x(t)$ всегда присутствует сигнал $s(t, l_0)$. В качестве оценки параметра l_0 принимают положение l_m абсолютного максимума $M(l)$, $|l| \leq L/2$. Обозначим P_0 вероятность того, что максимум функции $M(l) = z^2 S(l_0, l) + zN(l)$ при $|l - l_0| \leq \Delta$ больше любого выброса шума $zN(l)$ при $-L/2 \leq l < l_0 - \Delta$, $l_0 + \Delta \leq l \leq L/2$. Тогда, согласно [6], при $m \gg 1$ условное смещение оценки будет равно

$$d(l_m/l_0) = \langle l_m - l_0 \rangle \approx P_0 d_0 - l_0 (1 - P_0), \quad (4.1)$$

а условное рассеяние (средний квадрат ошибки) запишется так

$$V(l_m/l_0) = \langle (l_m - l_0)^2 \rangle = P_0 \sigma_0^2 + (1 - P_0) (L^2/12 + l_0^2). \quad (4.2)$$

Здесь усреднение выполняется по реализациям помехи $n(t)$ при фиксированном значении l_0 , а d_0 и σ_0^2 обозначают соответственно условное смещение и рассеяние надежной оценки. Под надежной оценкой [5, 6, 13] понимается оценка, найденная в предположении $|l_m - l_0| \leq \Delta$, т. е. при условии, что априорный интервал определения неизвестного параметра не превышает «длительности» Δ сигнальной функции (2.2). Иначе, надежной оценкой можно назвать оценку, полученную при условии, что ни один «ложный» выброс $M(l)$ (2.1) не превышает максимума этой функции, расположенного в достаточно малой окрестности l_0 [1-3, 5, 6, 10, 13] и др. Точные значения d_0 и σ_0^2 определить не удастся. Однако в [8] применительно к оценке временного положения разрывного сигнала на фоне белого шума показано, что при $z \rightarrow \infty$, $d_0 \rightarrow 0$, $\sigma_0^2 \rightarrow c/\delta^2 z^4$, где c — некоторая постоянная. В [7] для оценки временного положения прямоугольного импульса на фоне белого шума найдено, что, когда $z \gg 1$, $d_0 \approx 0$, $c \approx 6.5$. При $z \rightarrow \infty$ в силу непрерывности реализаций $M(l)$ с вероятностью единица характеристики надежной оценки определяются поведением функции $S(l_0, l)$ в малой окрестности l_0 . Согласно (2.3), когда $|l_0 - l| \rightarrow 0$, поведение рассматриваемой сигнальной функции (а следовательно, и функции корреляции помехи на выходе приемника максимального правдоподобия) такое же, как для прямоугольного импульса с неизвестным временным положением [7, 8]. Откуда следует, что для больших отношений сигнал/шум справедливы приближенные выражения

$$d_0 \approx 0, \quad \sigma_0^2 \approx c/\delta^2 z^4 \approx 6.5/\delta^2 z^4, \quad (4.3)$$

точность которых возрастает с увеличением отношения сигнал/шум.

В соответствии с определением вероятность надежной оценки $P_0 = P[H_s > H_N^*]$. Так как при $m \rightarrow \infty$ случайные величины H_s и H_N^* асимптотически независимы, для больших, но конечных m имеем приближенно

$$P_0 \approx \int F_N^*(H) dF_s(H). \quad (4.4)$$

Здесь $F_N^*(\cdot)$ и $F_s(\cdot)$ — распределения случайных величин H_N^*/z и H_s/z соответственно. Аналогично [3] можно показать, что, когда $z \rightarrow \infty$, величина интеграла (4.4) определяется поведением подынтегральных функций

при $H > \Psi(z)$. При этом предполагается, что $\Psi(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$, но $\Psi(z)/z \rightarrow 0$. Следовательно, для приближенного вычисления P_0 при больших отношениях сигнал/шум можно использовать аппроксимации подынтегральных функций, асимптотически точные при $z \rightarrow \infty$ и $H \rightarrow \infty$. Такие аппроксимации были найдены ранее в форме (3.6), (3.7). Подставляя их в (4.4), получаем

$$P_0 \simeq (1/\sqrt{2\pi}) \int_1^{\infty} \exp[-(x-z)^2/2 - (mx/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2)] dx, \quad (4.5)$$

причем точность этой формулы возрастает с увеличением m и z . Асимптотические значения d_0 , σ_0^2 и P_0 не зависят от l_0 , поэтому из (4.1), (4.2) нетрудно найти безусловные характеристики оценки, если известно априорное распределение неизвестного параметра. Пусть, например, l_0 — значение случайной величины, распределенной равномерно в интервале L . Тогда безусловные смещение и рассеяние оценки будут равны

$$d \simeq 0, \quad V \simeq cP_0/\delta^2 z^4 + (1-P_0)L^2/6. \quad (4.6)$$

Таким образом, характеристики оценки максимального правдоподобия параметра разрывного сигнала могут быть найдены из (4.1)–(4.3), (4.5), (4.6). Эти формулы позволяют приближенно оценить величину смещения и рассеяния оценки максимального правдоподобия при больших, но конечных z , m и являются асимптотически точными при $z \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$.

5. Для иллюстрации основных соотношений рассмотрим прием прямоугольного импульса с неизвестным временным положением на фоне белого шума. В этом случае

$$s(t-\tau_0) = \begin{cases} a_0, & |t-\tau_0| \leq \Delta_0/2, \\ 0, & |t-\tau_0| > \Delta_0/2. \end{cases} \quad (5.1)$$

Пусть неизвестное временное положение τ сигнала (5.1) определено на интервале $[-T_0/2; T_0/2]$, а время наблюдения $T > T_0 + \Delta_0$. Тогда нормированная сигнальная функция (2.2) определяется выражением [1]

$$S(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 1 - |\tau_1 - \tau_2|/\Delta_0, & |\tau_1 - \tau_2| \leq \Delta_0, \\ 0, & |\tau_1 - \tau_2| > \Delta_0, \end{cases}$$

а параметр $m = T_0/\Delta_0$. Сравним вероятности ошибок первого и второго рода при обнаружении разрывного сигнала (5.1) с вероятностями ошибок при обнаружении дифференцируемого сигнала. В качестве примера такого сигнала удобно использовать колокольный импульс

$$s_1(t-\tau_0) = a_1 \exp[-(t-\tau_0)^2/\Delta_1^2]. \quad (5.2)$$

Будем считать, что сигналы (5.1) и (5.2) имеют одинаковую эквивалентную длительность Δ_E , которую определим формулой [7]

$$\Delta_E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt / \max |s(t)|^2. \quad (5.3)$$

Для сигнала (5.1) эквивалентная длительность $\Delta_E = \Delta_0$. Следовательно, параметр $m = T_0/\Delta_0 = T_0/\Delta_E$ определяет количество сигналов с эквивалентной длительностью Δ_0 , которые могут быть размещены на априорном интервале определения неизвестного временного положения. Для сигнала (5.2) эквивалентная длительность $\Delta_E = \Delta_1(\pi/2)^{1/2}$. При равных для сигналов (5.1) и (5.2) величинах отношения сигнал/шум z и эквивалентной длительности Δ_E предельные значения вероятностей ошибок обнаружения сигнала (5.2) с неизвестным временным положением на фоне белого шума определяются соотношениями [4]

$$\alpha_1 \rightarrow 1 - \exp[-(m/2(2\pi)^{1/2}) \exp(-u^2/2)], \quad \beta_1 \rightarrow \Phi(u-z). \quad (5.4)$$

Из (5.4) и (3.8) следует, что, когда $u \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \beta_1$, т.е. вероятности пропуска для сигналов (5.1) и (5.2) асимптотически равны. В то же время, согласно (3.4) и (5.4), $\alpha/\alpha_1 \rightarrow 2u$, т.е. относительные потери в эффективности обнаружения разрывного сигнала по сравнению с обнаружением дифференцируемого сигнала возрастают с уменьшением требуемого уровня ложных тревог.

При обнаружении сигнала (5.1) приближенные значения вероятностей ошибок часто ищут, предполагая, что неизвестное временное положение сигнала принимает одно из m возможных дискретных значений [14]

$$\alpha_m = 1 - \Phi^m(u), \quad \beta_m = \Phi^{m-1}(u) \Phi(u-z). \quad (5.5)$$

Сравнивая эти выражения с (3.4) и (3.8), когда $u \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow \infty$, получаем: $\beta_m \rightarrow \beta$, $\alpha/\alpha_m \rightarrow u^2$. Следовательно, при больших u (малых α) расчет вероятности ложной тревоги по приближенной формуле (5.5) приводит к существенно заниженным значениям α . При этом точность (3.4), как и (3.8), растёт с увеличением u , m и z , в то время как поведение точности приближенных формул (5.5) неизвестно.

Применительно к оценке временного положения сигнала (5.1) на фигуре для значений $\tau_0=0$, $m=10$ приведена зависимость нормированного условного рассеяния оценки $\rho(z) = V(\tau_m/\tau_0=0)/V_{\max}$. Здесь $V_{\max} = T_0^2/12$ — максимальное рассеяние оценки, т.е. при $z=0$. Для сравнения на фигуре пунктиром нанесено нормированное рассеяние оценки [3] $\rho_1(z) = 24 P_1 / (\pi z^2 m^2 + 1 - P_1)$ временного положения сигнала (5.2), где

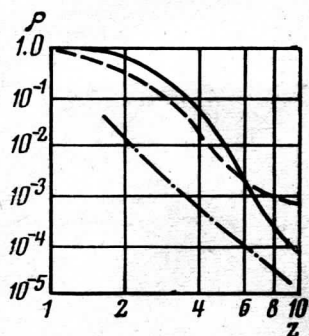
$$P_1 = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^\infty \exp[-(x-z)^2/2 - (m/(2\sqrt{2\pi})) \exp(-x^2/2)] dx. \quad (5.6)$$

Сплошная и пунктирная кривые на фигуре рассчитаны при одинаковых значениях эквивалентной длительности (5.3) сигналов (5.1), (5.2). Сравним вероятности аномальных ошибок ($\bar{P}_0 = 1 - P_0$ и $\bar{P}_1 = 1 - P_1$) при оценке параметра τ сигналов (5.1), (5.2). Для достаточно больших отношений сигнал/шум формулы (4.5), (5.6) можно переписать как $P_0 \approx 1 - (mz/4\pi^{1/2}) \exp(-z^2/4)$, $P_1 \approx 1 - (m/4\pi^{1/2}) \exp(-z^2/4)$. Откуда следует, что при $z \rightarrow \infty$ $\bar{P}_0/\bar{P}_1 = (1 - P_0)/(1 - P_1) \rightarrow z$. Значит, при больших отношениях сигнал/шум вероятность аномальной ошибки для разрывного сигнала может быть значительно больше, чем для дифференцируемого.

На фигуре штрихпунктиром нанесена также нормированная нижняя граница для рассеяния оценки временного положения разрывного сигнала, рассчитанная по результатам [10]: $\rho_{\min} = 24/z^4 m^2 + 3 \exp(-z^2)$. Заметим, что эта граница получена в [10] при тех же предположениях, что и приближенные формулы (4.2), (4.5), т.е. при больших m и z . Из сравнения сплошной и штрихпунктирной кривых следует, что применительно к оценке максимального правдоподобия граница, полученная в [10], существенно занижена по сравнению с результатами расчета по асимптотически точным формулам (4.2), (4.3), (4.5).

В ряде работ [5, 13] и других приближенное значение вероятности аномальных ошибок находят, предполагая, что неизвестное временное положение сигнала (5.1) принимает одно из $m = T_0/\Delta_0$ дискретных значений

$$\bar{P}_m = 1 - (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^\infty \exp[-(x-z)^2/2] \Phi^{m-1}(x) dx. \quad (5.7)$$



Из сравнения (5.7) и (4.5) следует, что при $z \rightarrow \infty \bar{P}_0/\bar{P}_m \rightarrow z^2/4$. Значит, расчет вероятности аномальных ошибок по формуле (5.7) при больших отношениях сигнал/шум приводит к существенно заниженным значениям. Заметим, что если точность формулы (4.5) возрастает с увеличением m и z , то поведение точности формулы (5.7) неизвестно.

С целью изучения возможности использования полученных асимптотических формул для умеренных значений u , m и z было выполнено (совместно с Т. А. Радченко) моделирование приема сигнала (5.1) на фоне белого шума на ЭВМ БЭСМ-6. В результате моделирования получены экспериментальные зависимости вероятностей ошибок первого и второго рода, а также рассеяния оценки от параметров u , m и z . Асимптотические формулы для характеристики приема разрывного сигнала, приведенные в пп. 3, 4, удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости при $u \geq 2$, $m \geq 10$ и $z \geq 1$.

Найденные в работе асимптотически точные выражения для характеристики обнаружения квазидетерминированного разрывного сигнала и оценки его неизвестного параметра по методу максимального правдоподобия могут быть использованы для приближенного расчета характеристик приемника максимального правдоподобия, когда сигнальная функция недифференцируема в нуле; априорный интервал определения неизвестного параметра значительно больше «протяженности» сигнальной функции; отношение сигнал/шум и нормированный порог при обнаружении достаточно велики.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Пусть $r(t)$ — стационарный случайный гауссовский процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции $R(t)$, причем при $t \rightarrow 0$ $R(t) = 1 - |t|^\gamma + o(|t|^\gamma)$, $\gamma > 0$, а при $t \rightarrow \infty$ $R(t) = o(|\ln |t||^{-1})$. Согласно [11, 12], назовем τ -выходом слева такой выход реализации процесса $r(t)$ за уровень H , перед которым в течение времени, не меньшего τ , не было пересечений этого уровня. В [11, 12] показано, что поток τ -выходов реализаций процесса $r(t)$ за уровень H является асимптотически пуассоновским при $H \rightarrow \infty$. Используя полученное в этих работах асимптотическое выражение для среднего числа τ -выходов, при $H \rightarrow \infty$ имеем

$$P[r(t) < H] \rightarrow \exp \left[- (At_0 H^{2/\gamma-1} / (2\pi)^{1/2}) \exp(-H^2/2) \right] \quad (0 < t < t_0). \quad (\text{П.1})$$

Здесь

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} [A(x)/x], \quad A(x) = 1 + \int_0^\infty e^{yP[\max_{0 < t < x} \chi(t) > y]} dy, \quad (\text{П.2})$$

а $\chi(t)$ — гауссовский процесс, для которого $\langle \chi(t) \rangle = -|t|^\gamma$, $\langle [\chi(t_1) - \langle \chi(t_1) \rangle][\chi(t_2) - \langle \chi(t_2) \rangle] \rangle = |t_1|^\gamma + |t_2|^\gamma - |t_1 - t_2|^\gamma$. Найдем $A(x)$, для чего вероятность под знаком интеграла в (П.2) перепишем как

$$P[\max_{0 < t < x} \chi(t) > y] = 1 - P(y), \quad (\text{П.3})$$

$$P(y) = P[y - \chi(t) > 0] = P[\mu(t) > 0] \quad (0 < t < x). \quad (\text{П.4})$$

При $\gamma=1$, $\mu(t)$ — марковский процесс с коэффициентом сноса $a=1$ и коэффициентом диффузии $b=2$. Поэтому вероятность (П.4) определяется выражением

$$P(y) = \int_0^\infty W(\mu, x) d\mu, \quad (\text{П.5})$$

где $W(\mu, x) = W(\mu, t)|_{t=x}$, а $W(\mu, t)$ — решение уравнения [1]

$$\frac{\partial W(\mu, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mu} [aW(\mu, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} [bW(\mu, t)] = 0 \quad (\text{П.6})$$

при начальном и граничных условиях $W(\mu, t)|_{t=0} = \delta(\mu - y)$, $W(\mu, t)|_{\mu=0} = W(\mu, t)|_{\mu=\infty} = 0$. Применяя для решения уравнения (П.6) метод отражения с пе-

ременной знака и подставляя результат в (П.5), из (П.3) находим

$$P[\max_{0 \leq t \leq x} \chi(t) > y] = 1 - \Phi((y+x)/(2x)^{1/2}) + e^{-y}[1 - \Phi((y-x)/(2x)^{1/2})]. \quad (\text{П.7})$$

Согласно (П.7) и (П.2), $A(x) = (2+x)\Phi((x/2)^{1/2}) + (x/\pi)^{1/2} \exp(-x/4)$, так что $A=1$. Переходя затем в (П.1) от случайного процесса $r(t)$ к шумовой функции $N(l)$, получаем (3.2).

ЛИТЕРАТУРА

Поступило 19 IV 1977

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.
2. Маршаков В. К., Трифонов А. П. Теоретическое и экспериментальное исследование приемника максимального правдоподобия. Радиотехника и электроника, 1974, 19, № 11.
3. Куликов Е. И., Маршаков В. К., Трифонов А. П. Анализ предельной точности оценок максимального правдоподобия с учетом аномальных ошибок. Радиотехника и электроника, 1972, 17, № 8.
4. Трифонов А. П. Асимптотические характеристики оптимального обнаружения квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовой помехи. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, № 4.
5. Куликов Е. И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М., «Советское радио», 1969.
6. Фалькович С. Е. Оценка параметров сигнала. М., «Советское радио», 1970.
7. Терентьев А. С. Распределение вероятности временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра. Радиотехника и электроника, 1968, 13, № 4.
8. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Оценка параметра разрывного сигнала в белом гауссовом шуме. Проблемы передачи информации, 1975, 11, № 3.
9. Zakai M., Ziv J. On the Threshold Effect in Radar Range Estimation. IEEE Trans. Inform. Theory, 1969, IT-15, No. 1.
10. Бакут П. А., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д. Новые оценки для предельной точности измерения задержки сигнала. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, № 2.
11. Pickands J. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian process. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 145, Nov.
12. Питербарг В. И. О работе Д. Пикандса «Вероятности пересечения для стационарного гауссовского процесса». Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1972, № 5.
13. Фомин А. Ф. Помехоустойчивость систем передачи непрерывных сообщений. М., «Советское радио», 1975.
14. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., «Советское радио», 1960.