

47

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXIII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТЖСК)

8

МОСКВА · 1978

6. Л. И. Гальчук, Б. Л. Розовский, Теория вероятностей и ее применения, 1974, 16, 4, 729.
 7. M. Davis, A note on the poisson disorder problem, Department of computing and control imperial college, London, SW72BT, 1975.

Поступило в редакцию
25 X 1976

УДК 621.391.2

ПРИЕМ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ ПРИЕМНИКОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Ю. С. Радченко, А. П. Трифонов

В [1] приведены результаты исследования влияния выбросов шума (аномалий I рода) на характеристики приемника максимального правдоподобия для случая, когда сигнальная функция (функция неопределенности) имеет лишь один ярко выраженный максимум. Однако широко применяемые на практике последовательности радиоимпульсов и модулированные по амплитуде и фазе сложные сигналы имеют сигнальные функции с заметными побочными максимумами [2]. Приближенный анализ аномалий II рода, обусловленных побочными максимумами сигнальной функции, выполнен в [3, 4] и др. для некоторых частных случаев. Ниже, с учетом аномалий I и II рода, получены характеристики приема сложных сигналов, которые содержат несколько неизвестных неэнергетических параметров и обладают сигнальными функциями с произвольным уровнем побочных максимумов.

Пусть в течение интервала времени $[0, T]$ на вход приемника поступает реализация случайного процесса

$$(1) \quad x(t) = \lambda s(t, \mathbf{l}_0) + n(t).$$

Здесь $\lambda=1$ или $\lambda=0$, $n(t)$ — стационарный гауссов шум, для которого $\langle n(t) \rangle = 0$, $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = K(\tau)$, $s(t, \mathbf{l}_0)$ — полезный сигнал, зависящий от μ -мерного вектора неизвестных неэнергетических параметров $\mathbf{l}_0 = \{l_{01}, \dots, l_{0\mu}\} \in L$. Логарифм функционала отношения правдоподобия может быть записан в виде

$$(2) \quad M(\mathbf{l}) = \int_0^T x(t)v(t, \mathbf{l}) dt = \lambda z^2 S(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}) + zN(\mathbf{l}),$$

где использованы обозначения [1]. Полагаем, что нормированная сигнальная функция $S(\mathbf{l}_0, \mathbf{l})$ кроме главного максимума в точке \mathbf{l}_0 имеет 2ν побочных максимумов, расположенных в точках \mathbf{l}_q ($q = \pm 1, \dots, \pm \nu$). В дальнейшем будем рассматривать только класс функций $S(\mathbf{l}_0, \mathbf{l})$, в точках максимумов которых гауссова кривизна положительна.

Вероятность ложной тревоги в приемнике максимального правдоподобия, сравнивающим абсолютный максимум $M(\mathbf{l})$, $\mathbf{l} \in L$, с порогом k , определяется соотношением $\alpha = P[\max M(\mathbf{l}) > k | \lambda = 0] = 1 - F_N(k)$. Используя представление функции распределения $F_N(k)$ абсолютного максимума шумовой функции $N(\mathbf{l})$ из [1], получаем

$$(3) \quad \alpha = 1 - F_N(k) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \frac{\xi u^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp \left(- \frac{u^2}{2} \right) \right], & u \geq \sqrt{\mu-1}, \\ 1, & u < \sqrt{\mu-1}. \end{cases}$$

Здесь $u = k/z$ — нормированный порог, $\xi = v\sqrt{d}$ — приведенный объем априорной области определения неизвестных параметров, v — μ -мерный евклидов объем области L , d — определитель матрицы

$$S = -[\partial^2 S(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}) / \partial l_i \partial l_j]_{\mathbf{l}_0}, \quad i, j = \overline{1, \mu}.$$

Для определения вероятности пропуска сигнала $\beta = P[\max M(\mathbf{l}) < k | \lambda = 1]$ разобьем область L на $2\nu+1$ подобласть L_q ($q=0, \dots, \pm\nu$), в каждой из которых заключен один из максимумов сигнальной функции, и на подобласть L_N , в которой $S(\mathbf{l}_0) \approx 0$. Обозначим величину абсолютного максимума $M(\mathbf{l})$ в $L_q - H_q$, в $L_N - H_N$. Нетрудно показать, что для большого отношения сигнал/шум z

$$(4) \quad H_q \approx z^2 S(\mathbf{l}_q, \mathbf{l}_0) + zN(\mathbf{l}_q).$$

В этом случае $\mathbf{H} = \|\mathbf{H}_q\|$ - гауссов вектор со средним $\langle \mathbf{H} \rangle = z^2 \|S(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_q)\| = z^2 \mathbf{m}$ и корреляционной матрицей $\langle (\mathbf{H} - \langle \mathbf{H} \rangle) + \oplus (\mathbf{H} - \langle \mathbf{H} \rangle) \rangle = z^2 \|S(\mathbf{l}_p, \mathbf{l}_q)\| = z^2 \mathbf{K}$ ($p, q=0, \dots, \pm\nu$). Если область L достаточно велика, так что $\xi \gg 1$, то H_N и H_q можно считать независимыми. Тогда вероятность пропуска приближенно равна

$$(5) \quad \beta = F_N(k) P_S(k) = F_N(k) \int_{-\infty}^u \dots \int_{-\infty}^u \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - z\mathbf{m}) \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{y} - z\mathbf{m}) \right]}{\sqrt{(2\pi)^{2\nu+1} \det \mathbf{K}}} d\mathbf{y}.$$

При этом точность приближенных выражений (3) и (5) возрастает с увеличением u, z, ξ . Применительно к сигнальным функциям с двумя побочными максимумами ($\nu=1$) величиной m формула (5) принимает вид

$$(6) \quad \beta = F_N(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^h \int_{-\infty}^h \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{2} \right] \Phi \left[\frac{h - z(1-m) - m(x+y)}{\sqrt{1-2m^2}} \right] dx dy,$$

где $h = u - zm$, $\Phi(x)$ - интеграл вероятности [2].

Для оценки влияния аномалий II рода на величину β достаточно проследить изменение вероятности $P_S(k) = \beta / F_N(k)$. Расчеты по формуле (6) показывают, что при асимптотически оптимальном пороге $k = z^2/2$ [5] изменение уровня побочных максимумов от 0 до 0,7 вызывает изменение $P_S(k)$ не более, чем на 40%. При этом с ростом отношения сигнал/шум z влияние побочных максимумов быстро уменьшается и при $z \geq 4$ относительное изменение $P_S(k)$ меньше 10%. Следует отметить, что в приемнике максимального правдоподобия вероятность пропуска (5) увеличивается с уменьшением числа побочных максимумов. Поэтому значение β , рассчитанное по формуле (6), может служить верхней границей для вероятности пропуска сложного сигнала с числом побочных максимумов сигнальной функции, большим двух ($\nu > 1$).

Найдем характеристики оценки максимального правдоподобия неизвестных неэнергетических параметров сложного сигнала. В качестве оценки вектора \mathbf{l}_0 будем использовать положение \mathbf{l}_m абсолютного максимума $M(\mathbf{l})$ (2) при $\lambda = 1$. Обозначим

$$(7) \quad \mathbf{l}_m = \mathbf{l}_{mq}, \text{ если } \mathbf{l}_m \in L_q, \text{ и } \mathbf{l}_m = \mathbf{l}_N, \text{ если } \mathbf{l}_m \in L_N.$$

Для достаточно больших z имеет место соотношение [6]

$$(8) \quad \mathbf{l}_{mq} \approx \mathbf{l}_q + z^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{S}_q^{-1},$$

где вектор $\mathbf{N}' = \|\partial N(\mathbf{l}) / \partial l_i |_{\mathbf{l}_q}\|$, матрица $\mathbf{S}_q = -[\partial^2 S(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}) / \partial l_i \partial l_j]_{\mathbf{l}_q}$ ($i, j = \overline{1, \mu}$). Таким образом, оценки \mathbf{l}_{mq} (8) имеют гауссово распределение со средним $\langle \mathbf{l}_{mq} \rangle = \mathbf{l}_q$ и корреляционной матрицей $\langle (\mathbf{l}_{mq} - \mathbf{l}_q) + \oplus (\mathbf{l}_{mq} - \mathbf{l}_q) \rangle = z^{-2} \mathbf{S}_q^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_q^{-1}$. Для достаточно большого приведенного объема ξ плотность вероятности оценки \mathbf{l}_N постоянна в L [1, 6]. Пусть $P_q = P[\mathbf{l}_m \in L_q]$. Тогда условную матрицу рассеяния (матрицу средневариационных ошибок) можно записать в виде

$$(9) \quad \mathbf{V} = \langle (\mathbf{l}_{mi} - \mathbf{l}_{0i}) (\mathbf{l}_{mj} - \mathbf{l}_{0j}) \rangle = \sum_{q=-\nu}^{\nu} (\mathbf{A}_q + z^{-2} \mathbf{S}_q^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_q^{-1}) P_q + \left(1 - \sum_{q=-\nu}^{\nu} P_q \right) \mathbf{V}_N(\mathbf{l}_0).$$

Здесь $\mathbf{A}_q = (\mathbf{l}_q - \mathbf{l}_0) + \oplus (\mathbf{l}_q - \mathbf{l}_0) = \|(\mathbf{l}_{qi} - \mathbf{l}_{0i}) (\mathbf{l}_{qj} - \mathbf{l}_{0j})\|$; $q = 0, \dots, \pm\nu$; $i, j = \overline{1, \mu}$; $\mathbf{V}_N(\mathbf{l}_0) = = \|\mathbf{l}_{0i} \mathbf{l}_{0j} + L_i^2 \delta_{ij} / 12\|$, где δ_{ij} - символ Кронекера.

По определению P_q – вероятность того, что H_q является абсолютным максимумом $M(1)$ в области L . Используя (3) и (4), получаем

$$(10) \quad P_q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi y_q^{\mu-1}}{\sqrt{\mu-1}} \exp \left\{ -\frac{\xi y_q^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp \left(-\frac{y_q^2}{2} \right) \right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{y_q} \dots \int_{-\infty}^{y_q} \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (y-zm) K^{-1} (y-zm) \right]}{\sqrt{(2\pi)^{2\nu+1} \det K}} dy.$$

Для сигнальной функции $S(1, I_0)$ с двумя побочными максимумами величиной m формула (10) преобразуется к виду

$$(11) \quad P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2} - \frac{\xi x^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] \frac{dx}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{cx} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) \Phi \left[\frac{m^2 y + x(1-m) \sqrt{1-m^2}}{\sqrt{1-2m^2}} \right] dy,$$

$$P_1 = \int_{\sqrt{\mu-1}-zm}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} - \frac{\xi (x+zm)^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp \left[-\frac{(x+zm)^2}{2} \right] \right\} \frac{dx}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{(x-z)c} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) \Phi \left[\frac{x \sqrt{1-m^2} - ym}{\sqrt{1-2m^2}} \right] dy,$$

где $c = \sqrt{(1-m)/(1+m)}$. В отсутствие побочных максимумов ($\nu=0$)

$$(12) \quad P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2} - \frac{\xi x^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}; \\ P_q = 0, \quad q \neq 0.$$

Согласно (9), (10) и (11) с увеличением отношения сигнал/шум z $P_0 \rightarrow 1$, $P_q \rightarrow 0$ при $q \neq 0$ и элементы матрицы рассеяния V достигают своих нижних границ (границы Крамера – Рао). Из соотношений (10) и (11) следует, что при $\xi \rightarrow \infty$ $P_q \rightarrow 0$ при $q \neq 0$, т. е. с увеличением приведенного объема априорной области L вклад аномалий II рода в рассеяние оценки падает. При большом приведенном объеме ξ расчеты с использованием формул (11) и (12) практически совпадают для всех $z \geq 1$ и $m \leq 0,5$.

Для оценки границ применимости асимптотически точных (при $z \rightarrow \infty$ и $\xi \rightarrow \infty$) формул (3), (5) и (9), (10) на ЭВМ «БЭСМ-6» было проведено моделирование обнаружения и оценки временного положения эрмитова сигнала второго порядка

$$(13) \quad s(t-\tau_0) = a \exp[-(t-\tau_0)^2/2\gamma^2] H_2[(t-\tau_0)/\gamma],$$

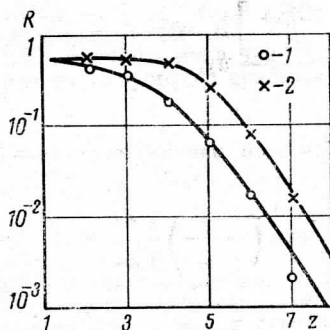
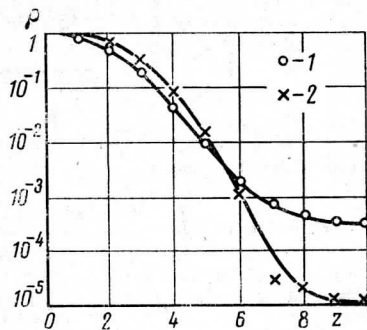
где $H_2(x) = 4x^2 - 2$. Его сигнальная (автокорреляционная) функция

$$(14) \quad S(\tau-\tau_0) = \exp \left[-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{4\gamma^2} \right] \left[1 - \frac{(\tau-\tau_0)^2}{\gamma^2} + \frac{(\tau-\tau_0)^4}{8\gamma^4} \right]$$

имеет два побочных максимума величиной $m=0,354$ на расстоянии $3,59\gamma$ от центрального пика.

Для моделирования были выбраны значения $\xi=20$ и $\xi=100$. Значение приведенного объема $\xi=20$ соответствует априорному интервалу определения неизвестного временного положения, который почти полностью занят сигнальной функцией (14). В этом случае влияние аномалий II рода наиболее велико. При $\xi=100$ рассеяние оценки определяется в основном аномалиями I рода.

Методом скользящего суммирования [7] на априорном интервале, соответствующем $\xi=20$ и 100 , формировалась реализация $M(\tau)$ (2). Абсолютный максимум $M(\tau)$ при $\lambda=1$ и $\lambda=0$ сравнивался с порогом $k=z^2/2$ и подсчитывалось число ложных тревог и пропусков сигнала. В качестве оценки временного положения сигнала (13) выбиралось положение абсолютного максимума $M(\tau)$ при $\lambda=1$. Экспериментальные значения средней вероятности ошибки $R=(\alpha+\beta)/2$ и нормированного условного расхождения $\rho=V/V_{\max}$ представлены на рис. 1 и 2 соответственно. Там же нанесены

Рис. 1. (1 - $\xi=20$; 2 - $\xi=100$)Рис. 2. (1 - $\xi=20$; 2 - $\xi=100$)

зависимости $R(z)$ и $\rho(z)$, рассчитанные по формулам (3), (6) и (9), (11). При моделировании число испытаний выбиралось таким образом, что с вероятностью 0,95 границы доверительной области отклоняются от экспериментальных значений R и ρ не более, чем на 5-6%.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Маршаков, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1974, 19, 11, 2266.
2. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, Изд. Советское радио, 1966.
3. Л. Е. Варакин, Радиотехника и электроника, 1973, 18, 8, 1591.
4. Е. В. Мамонтов, Изв. вузов МВССО СССР (Радиоэлектроника), 1974, 5, 117.
5. А. П. Трифонов, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1972, 3, 185.
6. С. Е. Фалькович, Оценка параметров сигналов, Изд. Советское радио, 1970.
7. Ю. Г. Полляк, Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах, Изд. Советское радио, 1971.

Поступило в редакцию
1 XI 1976