

49

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА • 1979

УДК 621.391.14:62-507

ЭФФЕКТИВНОСТЬ АЛГОРИТМА РАЗЛИЧЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. П. Трифонов

Найдены вероятности неправильных решений при различении сигналов с неизвестными неэнергетическими параметрами на фоне гауссовского шума. Оценены потери в эффективности за счет незнания параметров. Приводятся результаты экспериментальной проверки полученных формул.

§ 1. Введение

Известную ([¹⁻³] и др.) задачу различения двух сигналов сформулируем следующим образом. Пусть на интервале $[0; T]$ наблюдается реализация смеси сигнала и шума

$$(1.1) \quad x(t) = s_1(t, l) + n(t)$$

или

$$(1.2) \quad x(t) = s_2(t, q) + n(t).$$

Здесь $n(t)$ — реализация гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 ; $s_1(t, l)$ и $s_2(t, q)$ — известные функции времени t и неизвестных параметров $l = [l_1, \dots, l_\mu]$, $l \in L$, $q = [q_1, \dots, q_\nu]$, $q \in Q$, L и Q — области в евклидовых пространствах R^μ и R^ν , причем границы этих областей предполагаются достаточно регулярными [⁴]. Неизвестные параметры l и q будем считать неэнергетическими [^{2, 5}], а сигналы — ортогональными, так что

$$(1.3) \quad \int_0^T s_1^2(t, l) dt = E_1 = \text{const}, \quad \int_0^T s_2^2(t, q) dt = E_2 = \text{const},$$

$$\int_0^T s_1(t, l) s_2(t, q) dt = 0$$

для всех $l \in L$, $q \in Q$. С помощью $x(t)$ надо решить, какой из полезных сигналов присутствует на самом деле. Приближенно оптимальное решение этой задачи имеет вид [³]: принимается решение о наличии сигнала $s_1(t, l)$, если

$$(1.4) \quad \max_l P_1(x|l) / \max_q P_2(x|q) > H_0,$$

и решение о наличии сигнала $s_2(t, q)$ в противном случае. В (1.4) $P_1(x|l)$ и $P_2(x|q)$ — условные распределения наблюдаемых данных при наличии сигналов $s_1(t, l)$ и $s_2(t, q)$, а порог H_0 зависит от стоимостей ошибок и априорных вероятностей P_i ($i=1, 2$, $P_1+P_2=1$) появления каждого из сигналов.

Рассмотрим задачу оценки эффективности алгоритма (1.4), т. е. найдем вероятности $P(i|j)$ правильных и неправильных решений, $P(i|j)$ — вероятность принять решение о наличии i -го сигнала, в то время как присутствует j -й сигнал ($i, j=1, 2$). Применительно к детерминированным сигналам и сигналам с неизвестными амплитудами и фазами эта задача рассматривалась в [1-3, 6] и др. В [3] получены приближенные выражения для вероятностей правильных решений при произвольном числе неизвестных параметров сигналов. Формулы, полученные в [3], асимптотически (с увеличением отношения сигнал/шум) точны при различении неортогональных сигналов и сигналов, содержащих неизвестные энергетические параметры (т. е. параметры, от которых зависит энергия сигналов). Однако при различении ортогональных сигналов с неизвестными неэнергетическими параметрами (запаздывание сигнала, несущая частота и др.). использовать результаты [3] для определения эффективности алгоритма (1.4) нельзя, за исключением случая весьма малых объемов областей L и Q . Действительно, когда выполняется (1.3), формула (2.6) в [3] теряет смысл, так как точка, в окрестности которой выполнено в [3] разложение логарифма функции правдоподобия, не определена. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае решением уравнения (2.2) в [3] является любая точка области определения неизвестных параметров.

Ниже найдены приближенные выражения для характеристик алгоритма (1.4), которые могут быть использованы при больших, но конечных отношениях сигнал/шум и нескольких неизвестных неэнергетических параметрах ортогональных сигналов. Точность полученных формул возрастает с увеличением отношения сигнал/шум.

§ 2. Приближенный расчет характеристик различения

Для рассматриваемого частного случая решающее правило (1.4) может быть переписано как

$$(2.1) \quad \max_i M_1(\mathbf{l}) - \max_q M_2(\mathbf{q}) > h,$$

где $h = h_0 + (z_1^2 - z_2^2)/2$, $h_0 = \ln H_0$, $z_i^2 = 2E_i/N_0$ — отношение сигнал/шум для i -го сигнала,

$$M_1(\mathbf{l}) = 2 \int_0^T x(t) s_1(t, \mathbf{l}) dt / N_0, \quad M_2(\mathbf{q}) = 2 \int_0^T x(t) s_2(t, \mathbf{q}) dt / N_0.$$

Пусть принята реализация (1.1). Тогда, согласно (1.3),

$$(2.2) \quad M_1(\mathbf{l}) = z_1^2 S_1(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}) + z_1 N_1(\mathbf{l}), \quad M_2(\mathbf{q}) = z_2 N_2(\mathbf{q}).$$

Здесь $S_1(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}) = 2 \int_0^T s_1(t, \mathbf{l}_0) s_1(t, \mathbf{l}) dt / N_0 z_1^2$,

$$N_1(\mathbf{l}) = 2 \int_0^T n(t) s_1(t, \mathbf{l}) dt / N_0 z_1, \quad N_2(\mathbf{q}) = 2 \int_0^T n(t) s_2(t, \mathbf{q}) dt / N_0 z_2$$

— нормированные сигнальная и шумовые функции. Шумовые функции представляют собой реализации гауссовских полей, первые два момента которых равны

$$\begin{aligned} \langle N_1(\mathbf{l}) \rangle &= \langle N_2(\mathbf{q}) \rangle = 0, \quad \langle N_1^2(\mathbf{l}) \rangle = \langle N_2^2(\mathbf{q}) \rangle = 1, \\ \langle N_1(\mathbf{l}) N_2(\mathbf{q}) \rangle &= 0, \quad \langle N_1(\mathbf{l}_1) N_1(\mathbf{l}_2) \rangle = S_1(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle N_2(\mathbf{q}_1) N_2(\mathbf{q}_2) \rangle &= S_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \\ &= 2 \int_0^T s_2(t, \mathbf{q}_1) s_2(t, \mathbf{q}_2) dt / N_0 z_2^2. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$(2.3) \quad S_1(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = S_1(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2), \quad S_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = S_2(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2),$$

которые обеспечивают однородность полей $N_1(\mathbf{l})$ и $N_2(\mathbf{q})$, независимых в силу (1.3) при обеих гипотезах. Достаточные условия, при которых выполняется (2.3) в некоторых частных случаях, рассмотрены в [2, 7-9].

Обозначим через H_1 величину абсолютного максимума функций $M_1(\mathbf{l})/z_1$ при $\mathbf{l} \in \mathbf{L}$, а через H_2 — величину абсолютного максимума $M_2(\mathbf{q})/z_2$ при $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$. Тогда вероятность правильного решения при наличии реализации (1.1)

$$P(1|1) = P[H_2 z_2 + h < H_1 z_1] = P[H_2/\varepsilon + h/z_1 < H_1], \quad \varepsilon = z_1/z_2.$$

Так как случайные величины H_1 и H_2 независимы, то $P(1|1) = \int P_{21}(x\varepsilon - h/z_2) dP_{11}(x)$, а вероятность неправильного решения

$$(2.4) \quad P(2|1) = 1 - P(1|1) = \int [1 - P_{21}(x\varepsilon - h/z_2)] dP_{11}(x).$$

Здесь $P_{ij}(x)$ — функция распределения H_i при наличии j -го сигнала.

Для определения $P_{11}(x)$ воспользуемся подходом, развитым в [9]. Обозначим через Δl_i «длительность» сигнальной функции $S_i(\mathbf{l}_0, \mathbf{l})$ по параметру l_i , $i=1, \mu$. Таким образом, в дальнейшем предполагается существование таких $\Delta l_i < \infty$, что

$$(2.5) \quad S_i(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}) \approx 0, \quad |l_{0i} - l_i| > \Delta l_i, \quad i = \overline{1, \mu}.$$

Область $\mathbf{L}$ разобьем на две подобласти: $\mathbf{L}_s$ и $\mathbf{L}_N$. К подобласти $\mathbf{L}_s$ отнесем все $\mathbf{l} \in \mathbf{L}$, удовлетворяющие неравенствам $|l_{0i} - l_i| < \Delta l_i$, а к подобласти $\mathbf{L}_N$ — значения $\mathbf{l} \in \mathbf{L}$, для которых $|l_{0i} - l_i| > \Delta l_i$. Согласно (2.5), $S_i(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}) \approx 0$, когда $\mathbf{l} \in \mathbf{L}_N$. При этом Δl_i одновременно определяет интервал корреляции случайного поля $N_1(\mathbf{l})$ по параметру l_i [2]. Пусть H_{1N} — величина абсолютного максимума $M_1(\mathbf{l})/z_1$ при $\mathbf{l} \in \mathbf{L}_N$, а H_{1s} — то же самое при $\mathbf{l} \in \mathbf{L}_s$. Если область определения неизвестных параметров велика по сравнению с подобластью $\mathbf{L}_s$, то случайные величины H_{1N} и H_{1s} можно приближенно считать независимыми и

$$(2.6) \quad P_{11}(x) \approx P[H_{1N} < x] P[H_{1s} < x] = P_{1N}(x) P_{1s}(x).$$

Это приближенное равенство будет тем более точным, чем больше отношение $V(\mathbf{L})/V(\mathbf{L}_s)$, где $V(\cdot)$ — многомерный евклидов объем соответствующей области. В дальнейшем будем считать, что

$$(2.7) \quad V(\mathbf{L}) \gg V(\mathbf{L}_s), \quad V(\mathbf{L}_N) \approx V(\mathbf{L}).$$

Для выполнения последних двух соотношений достаточно, чтобы $\Delta l_i \ll L_i$ хотя бы для одного значения $i = \overline{1, \mu}$ [9]. Здесь $L_i = \max l_i - \min l_i$, $l_i \in \mathbf{L}$.

Подставляя (2.6) в (2.4), получаем

$$(2.8) \quad \begin{aligned} P(2|1) \approx & \int [1 - P_{21}(x\varepsilon - h/z_2)] P_{1N}(x) dP_{1s}(x) + \\ & + \int [1 - P_{21}(x\varepsilon - h/z_2)] P_{1s}(x) dP_{1N}(x). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функцию $\Psi(z)$ такую, что $\Psi(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$, а

$$(2.9) \quad \Psi(z)/z < \beta, \quad \beta \geq 0.$$

Перепишав (2.8) как

$$(2.10) \quad \begin{aligned} P(2|1) = & \int_{\Psi(z_1)}^{\infty} [1 - P_{21}(x\varepsilon - h/z_2)] P_{1N}(x) dP_{1s}(x) + \\ & + \int_{-\infty}^{\Psi(z_1)} [1 - P_{21}(x\varepsilon - h/z_2)] P_{1N}(x) dP_{1s}(x) + \\ & + \int_{\Psi(z_1)}^{\infty} [1 - P_{21}(x\varepsilon - h/z_2)] P_{1s}(x) dP_{1N}(x) + \\ & + \int_{-\infty}^{\Psi(z_1)} [1 - P_{21}(x\varepsilon - h/z_2)] P_{1s}(x) dP_{1N}(x) = I_1 + I_1' + I_2 + I_2', \end{aligned}$$

находим оценку сверху для I_i' ($i=1, 2$)

$$(2.11) \quad I_i' \leq P_{1N}[\Psi(z_1)] P_{1s}[\Psi(z_1)].$$

Покажем, что при $z_1 \rightarrow \infty$ и соответствующем выборе β (2.9) вклад интегралов I_i' в величину $P(2|1)$ пренебрежимо мал. С этой целью найдем оценку снизу для I_1 . Поскольку $P_{21}(x)$ — функция распределения величины абсолютного максимума реализаций однородного гауссовского поля, определенного в области с ненулевым объемом, то $P_{21}(x) \leq \Phi(x)$, где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [6]. Следовательно,

$$(2.12) \quad I_1 \geq P_{1N}[\Psi(z_1)] \int_{\Psi(z_1)}^{\infty} [1 - \Phi(x\varepsilon - h/z_2)] dP_{1s}(x).$$

Аналогично [10] можно показать, что $H_{1s} - M_1(I_0)/z_1 \rightarrow 0$ в среднеквадратическом при $z_1 \rightarrow \infty$. Следовательно, когда $z_1 \rightarrow \infty$, $P_{1s}(x) - \Phi(x - z_1) \rightarrow 0$ в каждой точке непрерывности $\Phi(x - z_1)$. Заметим, что в силу (1.3) и введенной нормировки функция распределения $P_{1N}(x)$ не зависит от z_1 и z_2 . Полагая, что величина ε остается конечной, при $z_1 \rightarrow \infty$ имеем

$$(2.13) \quad \begin{aligned} P_{1N}[\Psi(z_1)] - 1 \rightarrow 0, \quad P_{1s}[\Psi(z_1)] - \gamma \rightarrow 0, \\ \int_{\Psi(z_1)}^{\infty} [1 - \Phi(x\varepsilon - h/z_2)] dP_{1s}(x) - \int_{-z_1 b(z_1)}^{\infty} [1 - \Phi(x\varepsilon - h/z_2)] d\Phi(x) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\gamma = \Phi[-z_1 b(z_1)]$, $b(z_1) = 1 - \Psi(z_1)/z_1$. Пусть в (2.9) $\beta \leq 1$. Тогда $b(z_1) > 0$ и при $z_1 \rightarrow \infty$ имеем

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \int_{-z_1 b(z_1)}^{\infty} [1 - \Phi(x\varepsilon + z_1\varepsilon - h/z_2)] d\Phi(x) - \alpha \rightarrow 0, \\ \alpha = \Phi\left(-z_1 \frac{\varepsilon - h/z_1 z_2}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}}\right). \end{aligned}$$

Согласно (2.11)–(2.14), асимптотической оценкой сверху для I_i' является γ , а асимптотической оценкой снизу для I_i является α . Так как

в (2.10) все слагаемые положительны, α одновременно является асимптотической оценкой снизу для вероятности неправильного решения $P(2|1)$.

Следует отметить, что α совпадает с вероятностью неправильного решения при различении сигналов $s_1(t, 1)$ и $s_2(t, q)$, когда значения параметров 1 и q априори известны. Поэтому смысл неравенства $P(2|1) \geq \alpha$ вполне ясен. Действительно, трудно ожидать, что наличие неизвестных параметров у различаемых сигналов приведет к уменьшению вероятности неправильного решения.

Если теперь в (2.9) выбрать

$$\beta = \min \left\{ 1; 1 + \frac{h}{z_1 z_2 \sqrt{\varepsilon^2 + 1}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}} \right\},$$

то $\gamma = o(\alpha)$ при $z_1 \rightarrow \infty$. Таким образом, асимптотическое значение интеграла в (2.8), когда $z_1 \rightarrow \infty$, определяется поведением подынтегральных функций при $x > \Psi(z_1)$. Следовательно, для приближенного вычисления $P(2|1)$ при больших отношениях сигнал/шум можно использовать аппроксимации подынтегральных функций, асимптотически точные при $z_1 \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow \infty$. Для сигналов, имеющих хотя бы пять непрерывных производных по всем неизвестным параметрам, такие аппроксимации предложены в [9]:

$$(2.15) \quad P_{1s}(x) \approx \frac{z_1^{\mu/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{2z_1^2 - y^2}{4}\right) D_{-\mu/2}(2z_1 - y) dy,$$

$$(2.16) \quad P_{1N}(x) \approx \begin{cases} \exp\left[-\frac{\xi_1 x^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right], & x \geq \sqrt{\mu-1}, \\ 0, & x < \sqrt{\mu-1}, \end{cases}$$

$$(2.17) \quad P_{21}(x) \approx \begin{cases} \exp\left[-\frac{\xi_2 x^{v-1}}{(2\pi)^{(v+1)/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right], & x \geq \sqrt{v-1}, \\ 0, & x < \sqrt{v-1}. \end{cases}$$

Здесь $D_p(\cdot)$ — функция параболического цилиндра, $\xi_1 = \sqrt{d_1} V(L)$, $\xi_2 = \sqrt{d_2} V(Q)$, $d_1 = |-\partial^2 S_1(l_0, 1) / \partial l_i \partial l_j|_{l=l_0}$, $d_2 = |-\partial^2 S_2(q_0, q) / \partial q_k \partial q_n|_{q=q_0}$, $i, j=1, \mu$, $k, n=1, v$. В дальнейшем величины ξ_1 и ξ_2 будем называть приведенным объемом областей L и Q соответственно. Подставляя (2.15)–(2.17) в (2.8), получаем приближенное выражение для вероятности неправильного решения, точность которого возрастает с увеличением отношения сигнал/шум z_1 и приведенных объемов ξ_1, ξ_2 .

Следует отметить, что формула (2.15), как и аналогичные выражения в [3], получена с помощью разложения функции $M_1(1)/z_1$ в ряд Тейлора в окрестности истинного значения l_0 . Однако в отличие от [3] это разложение использовалось для аппроксимации $M_1(1)/z_1$ лишь в подобласти L_s , где вероятностью появления более чем одного максимума можно пренебречь.

В некоторых случаях более простым оказывается вычисление вероятности неправильного решения в форме

$$(2.18) \quad P(2|1) = \int P_{11}(x/\varepsilon + h/z_1) dP_{21}(x) \approx \\ \approx \int P_{1s}(x/\varepsilon + h/z_1) P_{1N}(x/\varepsilon + h/z_1) dP_{21}(x).$$

Положим теперь, что принята реализация (1.2). Тогда $M_1(\mathbf{l}) = z_1 N_1(\mathbf{l})$, $M_2(\mathbf{q}) = z_2^2 S_2(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}) + z_2 N_2(\mathbf{q})$. Разбивая область Q на подобласти Q_N и Q_s , как это делалось выше для области L , и полагая, что для Q_N и Q выполняется неравенство, аналогичное (2.7), можно записать вероятность ошибки в виде

$$(2.19) \quad P(1|2) = \int P_{22}(x\varepsilon - h/z_2) dP_{12}(x) \approx \\ \approx \int P_{2s}(x\varepsilon - h/z_2) P_{2N}(x\varepsilon - h/z_2) dP_{12}(x),$$

где $P_{2s}(x)$ и $P_{2N}(x)$ определяются из (2.15), (2.16) при замене μ на ν , z_1 на z_2 и ξ_1 на ξ_2 , а $P_{12}(x)$ из (2.17), где надо заменить ν на μ , а ξ_2 на ξ_1 .

§ 3. Симметричная система передачи

Выражения для вероятностей неправильных решений (2.18), (2.19) несколько упрощаются, когда система передачи данных является симметричной [9], т. е.

$$(3.1) \quad P_1 = P_2 = 1/2, \quad z_1^2 = z_2^2 = z^2, \quad h = 0.$$

Полагая в этом случае $\nu = \mu$ и

$$(3.2) \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi,$$

находим среднюю вероятность ошибки

$$(3.3) \quad P_e = P_1 P(2|1) + P_2 P(1|2) = P(1|2) = P(2|1) = \int P_{1s}(x) P_{1N}(x) dP_{21}(x).$$

Поскольку теперь $P_{1N}(x) \approx P_{21}(x)$, то, интегрируя в (3.3) по частям, получаем

$$(3.4) \quad P_e = (1 - P_0)/2.$$

Здесь

$$(3.5) \quad P_0 = \frac{z^{\mu/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\mu-1}}^{\infty} \exp \left[\frac{2z^2 - x^2}{4} - \frac{2\xi x^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] D_{-\mu/2}(2z-x) dx.$$

Величина P_0 совпадает с вероятностью надежной оценки максимального правдоподобия параметров $\mathbf{l}$ (или $\mathbf{q}$) [9], если приведенный объем области определения этих параметров принять равным 2ξ . Заметим, что равенство (3.2), которое перепишем как $\sqrt{d_1} V(\mathbf{L}) = \sqrt{d_2} V(\mathbf{Q})$, может выполняться и в случае, когда параметры $\mathbf{l}$ и $\mathbf{q}$ имеют различный физический смысл.

Формулы (3.4), (3.5) для средней вероятности ошибки довольно громоздки, и расчет эффективности алгоритма (1.4) по этим формулам возможен только численными методами. Поэтому представляет интерес получение упрощенных, хотя и менее точных, вариантов формул (3.4), (3.5). При весьма больших отношениях сигнал/шум можно приближенно положить

$$\exp \left[-\frac{2\xi x^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] \approx 1 - \frac{2\xi x^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

Подставим это приближенное значение подынтегральной функции в (3.5) и заменим (при $z \gg 1$) пределы интегрирования на бесконечные. Выполнив интегрирование с учетом асимптотического поведения $D_{-\mu/2}(x)$ при $x \rightarrow \infty$, находим

$$(3.6) \quad P_e \approx \frac{\xi z^{\mu-1}}{\pi^{(\mu+1)/2} 3^{\mu/2} 2^\mu} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

В рассматриваемом приближении средняя вероятность ошибки при различении двух ортогональных сигналов с неизвестными неэнергетическими параметрами полностью совпадает с вероятностью аномальной ошибки оценки максимального правдоподобия параметров какого-либо из различаемых сигналов [9].

Оценим проигрыш в эффективности различения за счет незнания неэнергетических параметров ортогональных сигналов. При различении ортогональных детерминированных сигналов средняя вероятность ошибки [6]

$$(3.7) \quad P_e^* = 1 - \Phi(z/\sqrt{2}).$$

Учитывая асимптотическое поведение $\Phi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и используя (3.6), получаем для больших z

$$P_e/P_e^* \approx \xi z^\mu / (3\pi)^{\mu/2} 2^\mu.$$

Из этой формулы следует, что относительный проигрыш в эффективности различения возрастает с увеличением отношения сигнал/шум z , приведенного объема ξ и числа неизвестных параметров μ . В то же время при различении неортогональных сигналов и $z \rightarrow \infty$ имеем $P_e/P_e^* \approx 1$ [3].

§ 4. Различение сигналов с неизвестными амплитудами

Положим, что наблюдается реализация

$$(4.1) \quad x(t) = a_{01}s_1(t, l_0) + n(t)$$

или

$$(4.2) \quad x(t) = a_{02}s_2(t, q_0) + n(t),$$

где a_1 и a_2 — неизвестные амплитуды полезных сигналов. При различении двух сигналов с неизвестными амплитудами и несколькими неэнергетическими параметрами алгоритм (1.4) принимает вид

$$(4.3) \quad \max_{a_1, l} [a_1 M_1(l) - 1/2 a_1^2 z_{01}^2] - \max_{a_2, q} [a_2 M_2(q) - 1/2 a_2^2 z_{02}^2] > h_0.$$

Здесь z_{0i}^2 ($i=1, 2$) — отношение сигнал/шум для i -го сигнала с единичной амплитудой. Выполняя в (4.3) максимизацию по a_i , находим, что решение о наличии первого сигнала принимается, когда

$$[\max_l M_1(l)]^2 / z_{01}^2 - [\max_q M_2(q)]^2 / z_{02}^2 > 2h_0.$$

При наблюдении реализации (4.1)

$$(4.4) \quad M_1(l)/z_{01} = z_1 S_1(l_0, l) + N_1(l), \quad M_2(q)/z_{02} = N_2(q),$$

т. е. эти функции совпадают с $M_1(l)/z_1$ и $M_2(q)/z_2$ в § 2, где следует положить $z_i = a_{0i} z_{0i}$. Используя обозначения § 2, вероятность неправильного решения можем записать как

$$(4.5) \quad P(2|1) = P[H_1^2 - H_2^2 < 2h_0] = \int_0^\infty [P_{11}(\sqrt{H+2h_0}) -$$

$$\begin{aligned}
 & -P_{11}(-\sqrt{H+2h_0})]d[P_{21}(\sqrt{H})-P_{21}(-\sqrt{H})]= \\
 & = \int_0^{\infty} [P_{11}(\sqrt{x^2+2h_0})-P_{11}(-\sqrt{x^2+2h_0})]d[P_{21}(x)-P_{21}(-x)].
 \end{aligned}$$

Приближенное значение вероятности ошибки получаем, подставляя в (4.5) аппроксимации функций распределения, приведенные в § 2

$$(4.6) \quad P(2|1) = \int P_{1s}(\sqrt{x^2+2h_0})P_{1N}(\sqrt{x^2+2h_0})dP_{21}(x).$$

Соответственно при наличии реализации (4.2) вероятность неправильного решения

$$(4.7) \quad P(1|2) = \int P_{2s}(x)P_{2N}(x)dP_{12}(\sqrt{x^2+2h_0}).$$

Формулы (4.6), (4.7) записаны с учетом того, что функции (2.16), (2.17) равны нулю при отрицательных аргументах.

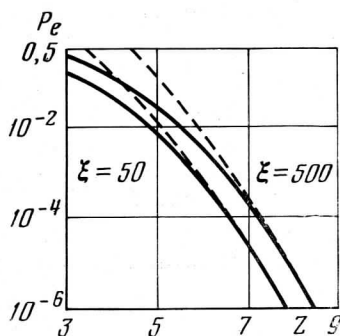


Рис. 1

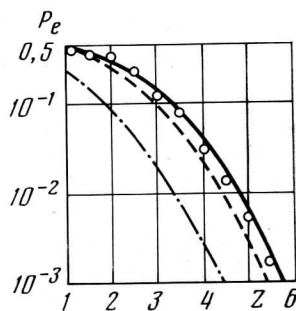


Рис. 2

Если $h_0=0$ и отношения сигнал/шум для обоих сигналов одинаковы ($z_1^2=z_2^2$), то формулы (4.6) и (4.7) совпадают с (2.18) и (2.19) соответственно. Это совпадение объясняется тем, что при достаточно больших приведенных объемах, когда верны формулы (2.16), (2.17), вероятность выполнения неравенства $H_i < 0$ пренебрежимо мала. Таким образом, при указанных условиях незнание амплитуд сигналов практически не влияет на эффективность алгоритма различения.

§ 5. Различение сигналов с одним неизвестным параметром

Конкретизируем общие соотношения § 3 применительно к различению сигналов, содержащих один неэнергетический параметр. Тогда средняя вероятность ошибки определяется формулой (3.4), где

$$(5.1) \quad P_0 = \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{2z^2-x^2}{4} - \frac{\xi}{\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] D_{-\eta/2}(2z-x) dx.$$

Для расчета P_e по формулам (3.4), (5.1) необходимо использование численных методов, поэтому может оказаться полезным применение формулы (3.6), которая при $\mu=1$ принимает вид

$$(5.2) \quad P_e \approx \xi \exp(-z^2/4) / 2\pi\sqrt{3}.$$

Для оценки погрешности, к которой приводит применение формулы (3.6), на рис. 1 приведены зависимости $P_e(z)$ при $\mu=1$, рассчитанные по формулам (3.4) и (5.1) (сплошные линии), и зависимости, рассчитанные по (5.2) (пунктир).

Положим далее, что различаемые сигналы имеют одинаковую форму гауссовской кривой и отличаются лишь величиной запаздывания

$$(5.3) \quad s_1(t, l) = s(t-l), \quad s_2(t, q) = s(t-q), \quad s(t) = a \exp(-t^2/\tau_0^2).$$

Пусть $l \in \{t_1, t_2\}$, $q \in \{t_3, t_4\}$, $t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = T_0$, $T - T_0 \gg \tau_0$. Если $t_3 - t_2 \gg \tau_0$, то сигналы (5.3) можно считать ортогональными и им соответствуют одинаковые нормированные сигнальные функции $S_1(l_1, l_2) = S_2(q_1, q_2) = S(\Delta) = \exp(-\Delta^2/2\tau_0^2)$. Здесь $\Delta = l_1 - l_2$ или $\Delta = q_1 - q_2$. Для рассматриваемых сигналов приведенный объем

$$(5.4) \quad \xi = T_0 [-d^2 S(\Delta)/d\Delta^2]_{\Delta=0}^{1/2} = T_0/\tau_0.$$

На рис. 2 приведена зависимость $P_e/(z)$, рассчитанная по формулам (3.4), (5.1) для $\xi=50$ (сплошная линия). На этом же рисунке для сравнения нанесена штрих-пунктиром зависимость $P_e^*(z)$ для ортогональных сигналов с известными запаздываниями (3.7). Заметим, что формальный расчет вероятности ошибок для сигналов (5.3) по формуле (7.3) в [3] приводит к зависимости, практически совпадающей с $P_e^*(z)$ при $z > 1,5 \div 2$.

Приближенное значение средней вероятности ошибки при различении двух сигналов с неизвестными запаздываниями можно также получить предполагая, что неизвестные запаздывания каждого из сигналов могут принимать одно из m дискретных значений. Тогда

$$(5.5) \quad P_e = \frac{m}{2m-1} \left[1 - \int \Phi^{2m-1}(x) d\Phi(x-z) \right].$$

Для сигнала гауссовской формы $m \approx \xi/\sqrt{2\pi}$. Аналогичный подход использовался в [9, 11] и др. для расчета характеристик обнаружения и в [5] и др. — для расчета вероятности надежной оценки максимального правдоподобия. Зависимость $P_e(z)$ (5.5) нанесена на рис. 2 пунктиром. Как следует из рис. 2, значения средней вероятности ошибки, вычисленные для сигналов (5.3) по различным приближенным формулам, могут заметно отличаться. При этом, если точность формул (3.4), (5.1) возрастает с увеличением отношения сигнал/шум и приведенного объема, то поведение точности приближенной формулы (5.5) неизвестно.

С целью изучения возможности использования приведенных формул для умеренных значений отношения сигнал/шум был разработан лабораторный макет, позволяющий производить различение сигналов с неизвестными запаздываниями. В этом макете [9] формировался выходной сигнал фильтра, согласованного с сигналом, близким по форме к (5.3). В соответствии с алгоритмом (2.1) (при $h=0$) решение о наличии одного из сигналов (5.3) выносилось в результате сравнения абсолютных максимумов выходного сигнала согласованного фильтра на интервалах $\{t_1, t_2\}$ и $\{t_3, t_4\}$. Экспериментальные значения P_e для $\xi=50$ нанесены на рис. 2. Каждое значение P_e при $z \leq 3,5$ вычислялось по результатам обработки 10^3 , а при $z > 3,5$ — не менее 10^4 реализаций смеси сигнала и шума. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальной зависимости $P_e(z)$ формулами (3.4), (5.1) уже при $z \geq 1$.

§ 6. Различение сигналов с двумя неизвестными параметрами

Перейдем к случаю, когда различаемые сигналы содержат по два неизвестных неэнергетических параметра. При выполнении (3.1), (3.2) средняя вероятность ошибки определяется формулой (3.4), где

$$(6.1) \quad P_0 \approx \int_1^{\infty} \exp \left[\frac{3z^2}{2} - zx - \frac{x\xi}{\pi\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] \Phi(x-2z) dx.$$

Пусть области определения неизвестных параметров заданы неравенствами $|l_i| \leq L_i/2$, $|q_i| \leq Q_i/2$, $i=1, 2$. Тогда $\xi = \xi_{l_1} \xi_{l_2} \sqrt{1-R_1^2} = \xi_{q_1} \xi_{q_2} \sqrt{1-R_2^2}$. Здесь ξ_{l_i} — приведенный объем для каждого из параметров l_i ; R_1 — коэффициент корреляции совместных оценок максимального правдоподобия параметров l_1 и l_2 [2, 5] при наличии реализации (1.1); ξ_{q_i} и R_2 — то же самое для параметров q_1 и q_2 при наличии реализации (1.2). Предполагается, что приведенный объем ξ_{l_i} вычисляется при известном значении параметра l_2 полезного сигнала. Аналогично определяются ξ_{l_2} , ξ_{q_i} .

Конкретизируем эти соотношения применительно к различению узкополосных радиосигналов с неизвестными запаздываниями и начальными фазами, когда

$$(6.2) \quad \begin{aligned} s_1(t, l) &= F(t-l_1) \cos(\omega_0 t - l_2), \\ s_2(t, q) &= F(t-q_1) \cos(\omega_0 t - q_2). \end{aligned}$$

Пусть $F(t) = a \exp(-t^2/\tau_0^2)$, а запаздывания l_1 и q_1 определены на таких же интервалах, как и в § 5. Тогда получаем

$$(6.3) \quad \xi_{l_1} = \xi_{q_1} = \xi_0 = T_0/\tau_0, \quad \xi_{l_2} = \xi_{q_2} = 2\pi, \quad R_1 = R_2 = 0.$$

Подставляя (6.3) в (6.1), находим

$$(6.4) \quad P_0 \approx \int_1^{\infty} \exp \left[\frac{3z^2}{2} - zx - \xi_0 x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] \Phi(x-2z) dx,$$

причем величина ξ_0 здесь совпадает с (5.4). На рис. 3 для $\xi_0 = 50$ приведена зависимость $P_e(z)$, рассчитанная по формулам (3.4), (6.4) (кривая 1). На этом же рисунке нанесены зависимости $P_e(z)$ для: а) сигналов с известными фазами и неизвестными запаздываниями (3.4), (5.1) (кривая 2); б) сигналов с неизвестными начальными фазами и известными запаздываниями [6] (кривая 3); в) детерминированных сигналов (3.7) (кривая 4). Сравнение кривых 1–4 на рис. 3 позволяет оценить потери в эффективности различения за счет незнания одного или двух параметров сигналов.

Приближенную формулу расчета P_e можно получить аналогично (5.5), предполагая, что неизвестное запаздывание каждого сигнала принимает одно из m дискретных значений. Тогда, используя выражение для вероятности надежной оценки максимального правдоподобия, найденное в [5], можем записать

$$(6.5) \quad P_e \approx \frac{m}{2m-1} \left\{ 1 - \int_0^{\infty} x \exp \left(-\frac{x^2+z^2}{2} \right) I_0(xz) [1 - e^{-x^2/2}]^{2m-1} dx \right\},$$

где $I_0(\cdot)$ — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка. Зависимость $P_e(z)$, рассчитанная по формуле (6.5), нанесена на рис. 3 пунктиром.

Для экспериментальной проверки приведенных на рис. 3 приближенных зависимостей был разработан лабораторный макет, позволяющий производить различение радиосигналов с неизвестными запаздываниями и начальными фазами. Полезные сигналы формировались путем пропускания короткого радиоимпульса через последовательно соединенные, слабо связанные резонансные контуры. Затем полезный сигнал смешивался с широкополосным гауссовским шумом и поступал на согласованный фильтр. В качестве согласованного фильтра использовалась аналогичная последовательность резонансных контуров, в результате чего огибающая сигнальной функции на выходе согласованного фильтра имела форму, близкую к гауссовской. По реализации огибающей выходного сигнала согласованного фильтра в соответствии с алгоритмом (2.1) (при $h=0$) принималось решение о наличии какого-либо из сигналов (6.2). Экспериментальные значения P_e для $\xi_0=50$ приведены на рис. 3. Каждое значение P_e при $z \leq 4,5$ определялось в результате обработки 10^3 , а при $z > 4,5$ — не менее 10^4 реализаций смеси сигнала и шума. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальной зависимости $P_e(z)$ приближенными формулами (3.4), (6.4) (кривая 1).

§ 7. Некоторые обобщения

Полученные асимптотические формулы справедливы при больших отношениях сигнал/шум, если выполняются следующие условия: 1) помехой является белый шум; 2) объемы подобластей L_s и Q_s существенно меньше объемов областей L и Q ; 3) различаемые сигналы ортогональны (1.3), а поля выходных помех однородны (2.3).

Первое ограничение легко может быть снято, как это указано в § 8 работы [3]. Действительно, если $n(t)$ — коррелированная гауссовская помеха, то во все предыдущие формулы достаточно подставить соответствующие сигнальные функции [3, 9].

Второе условие для большинства практически используемых сигналов обычно выполняется, если $\xi_i \gg 1$, $i=1, 2$. К тому же изменение или невыполнение условия 2 часто можно легко учесть в окончательных выражениях (2.18), (2.19). С этой целью введем в рассмотрение область L_s' , к которой отнесем значения l из евклидова пространства параметров R^n , которые удовлетворяют неравенствам $|l_i - l_{i0}| < \Delta l_i$, $i=\overline{1, \mu}$ (2.5). Аналогично определим область Q_s' . Таким образом, L_s' и Q_s' — это области высокой корреляции для каждого из различаемых сигналов [2]. Очевидно, при выполнении условия 2 области L_s' и Q_s' совпадают с подобластями L_s и Q_s соответственно. Пусть условие 2 не выполняется. Например, подобласть L_s совпадает со всей областью L , $V(L_s') \gg V(L)$, а $V(Q_s) \ll V(Q)$ по-прежнему. Тогда приближенные выражения для вероятностей ошибок получаем, полагая $P_{11}(x) \approx P_{1s}(x)$, $P_{12}(x) \approx \Phi(x)$. Если $V(L_s) \ll V(L)$, а подобласть Q_s совпадает с областью Q и $V(Q_s') \gg V(Q)$, то следует в (2.18), (2.19) подставить $P_{22}(x) \approx P_{2s}(x)$, $P_{21}(x) \approx \Phi(x)$. Наконец, когда $V(L_s') \gg V(L)$ и $V(Q_s') \gg V(Q)$, справедливы аппроксимации $P_{11}(x) \approx P_{1s}(x)$, $P_{22}(x) \approx P_{2s}(x)$, $P_{12}(x) = P_{21}(x) \approx \Phi(x)$. При выполнении последних неравенств можно также использовать результаты [3]. Для этого достаточно в качестве решения уравнения (2.2) в [3] выбрать любую фиксированную внутреннюю точку априорной области определения неизвестных параметров.

Условие 3 является существенным для принятой методики расчета ве-

роятностей ошибок. Если оно не выполняется, то часто эффективность алгоритма различения можно оценить с помощью результатов [3].

В заключение автор благодарит А. К. Сенаторова за помощь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М., «Сов. радио», 1970.
2. Фалькович С. Е. Оценка параметров сигнала. М., «Сов. радио», 1970.
3. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Эффективность алгоритма различения сигналов с неизвестными параметрами. Проблемы передачи информации, 1971, 7, 2, 47–57.
4. Беляев Ю. К. Распределение максимума случайного поля и его приложение к задачам надежности. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1970, 2, 77–84.
5. Куликов Е. И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М., «Сов. радио», 1969.
6. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966.
7. Куликов Е. И., Трифонов А. П. О некоторых свойствах сигнала на выходе оптимального приемника. Радиотехника и электроника, 1968, 13, 12, 2254–2257.
8. Трифонов А. П. Некоторые свойства сигнальной функции двух параметров. Радиотехника и электроника, 1972, 17, 3, 620–623.
9. Маршаков В. К., Трифонов А. П. Теоретическое и экспериментальное исследование приемника максимального правдоподобия. Радиотехника и электроника, 1974, 19, 11, 2266–2275.
10. Куликов Е. И., Маршаков В. К., Трифонов А. П. Анализ предельной точности оценок максимального правдоподобия с учетом аномальных ошибок. Радиотехника и электроника, 1972, 17, 8, 1745–1749.
11. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., «Сов. радио», 1960.

Поступила в редакцию
20 октября 1975 г.
После переработки
22 сентября 1978 г.