

(50) АКАДЕМИЯ НАУК СССР (50)

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР
ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА • 1979

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ МАКСИМУМОВ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Т. А. РАДЧЕНКО, А. П. ТРИФОНОВ

(Воронеж)

В [1-6] и других работах получены предельные законы распределения максимумов гауссовского стационарного процесса при неограниченном возрастании значений максимумов и длительности реализаций. Однако остается открытым вопрос о том, насколько близка та или другая асимптотическая аппроксимация к истинному распределению и при каких условиях возможно использование асимптотических формул.

1. Рассмотрим дифференцируемый стационарный гауссовский случайный процесс $\varphi(t)$, $t \in [0, T]$, с нулевым средним значением и функцией корреляции $K(\tau)$. Если $K(\tau)$ удовлетворяет некоторым условиям [2] (§ 12.1), то

$$\lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow \infty}} P[h_m < h] = \exp[-\exp(-z)], \quad (1.1)$$

$$h_m = H_m/\sigma, \quad H_m = \max \{\varphi(t) : t \in [0, T]\},$$

$$\xi = T\sqrt{-K''(0)/\sigma^2}, \quad \sigma^2 = K(0),$$

а ξ и h связаны соотношением $z = h^2/2 - \ln(\xi/2\pi)$. Рассматривая (1.1) при фиксированных T и h , получаем приближенное выражение

$$P[h_m < h] \approx \exp[-\xi \exp(-h^2/2)/2\pi], \quad (1.2)$$

которое в ряде работ [6-10] и др. используется для аппроксимации «хвоста» функции распределения максимумов. Функция в правой части (1.2) является неубывающей функцией h лишь при $h \geq 0$. Поэтому для произвольных h в качестве аппроксимации функции распределения можно использовать выражение

$$F(h) = \begin{cases} \exp[-\xi \exp(-h^2/2)/2\pi], & h \geq 0, \\ 0, & h < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Согласно (1.1), точность этой аппроксимации возрастает с увеличением h и ξ . При малых h аппроксимация является довольно грубой [6]. Поскольку при $T \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$) функция распределения максимумов сходится к гауссовской, предлагается функцию распределения аппроксимировать выражением

$$F_1(h) = \begin{cases} \Phi(h) \exp[-\xi \exp(-h^2/2)/2\pi], & h \geq 0, \\ \Phi(h) \exp[-\xi/2\pi], & h < 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $\Phi(h)$ — интеграл вероятности [1]. При больших h аппроксимации (1.3) и (1.4) практически совпадают, а при малых h , как показывает сравнение с экспериментальными данными, аппроксимация (1.4) оказывается несколько более точной. Кроме того, аппроксимация (1.4) асимптотически

точно при $T \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$). На основе аппроксимации (1.4) можно рассчитать, правда лишь численными методами, среднее значение m_1 и средний квадрат M_1 максимумов H_m .

В [1] приведено асимптотическое выражение для плотности вероятности максимумов. Воспользовавшись этим асимптотическим выражением

		m	m_1	m_2	M	M_1	M_2
$\Phi(t)$	$\xi = 10$	1.49	1.27	1.56	2.68	2.58	4.20
	$\xi = 20$	1.82	1.75	1.90	3.72	3.63	4.32
	$\xi = 40$	2.15	2.14	2.22	4.90	4.91	5.39
$\gamma(t)$	$v = 5$	1.80	1.80	1.93	3.64	4.18	4.23
	$v = 10$	2.28	2.24	2.34	5.50	5.59	5.84

при конечных значениях T , приходим к следующей функции распределения:

$$F_2(h) = \exp \left[-(\xi/2\pi)^2 \exp(-h\sqrt{2 \ln(\xi/2\pi)}) \right]. \quad (1.5)$$

Согласно [1, 2], точность этой аппроксимации возрастает с увеличением ξ . На основе аппроксимации (1.5) в [1] найдены формулы для среднего значения и дисперсии нормированных максимумов, откуда

$$m_2 = \langle H_m \rangle = \sigma [C/\sqrt{2 \ln(\xi/2\pi)} + \sqrt{2 \ln(\xi/2\pi)}],$$

$$M_2 = \langle H_m^2 \rangle = \sigma^2 [(\pi^2/6 + C^2)/2 \ln(\xi/2\pi) + 2C + 2 \ln(\xi/2\pi)], \quad (1.6)$$

C — постоянная Эйлера.

Возможность использования (1.4)–(1.6) для расчета характеристик максимумов реализаций случайного процесса конечной длительности исследовалась с помощью моделирования на ЭВМ БЭСМ-6. Моделировался гауссовский процесс с функцией корреляции $K(\tau) = \exp(-\tau^2/2)$. Реализации процесса $\varphi(t)$, $t \in [0, T]$, формировались из некоррелированной гауссовской стационарной последовательности случайных чисел x_i с параметрами распределения (0; 1) методом скользящего суммирования [11]:

$$\varphi(t_j) = \sum_{i=-p}^p a_i x_{j-i}. \quad \text{Здесь } a_i = (2\Delta^2/\pi)^{1/4} \exp(-i^2\Delta^2); \Delta - \text{ шаг дискретизации.}$$

Параметры Δ и p выбирались таким образом, чтобы нормированная среднеквадратичная погрешность представления $\varphi(t)$ в виде дискретной последовательности $\varphi(t_j)$ не превышала 5%. В описываемом эксперименте $\Delta = 0.1$, $p = 30$. В каждой реализации отыскивался максимум H_m . По совокупности N реализаций ($N = 2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^4$) вычислялись эмпирические среднее значение m , средний квадрат M и значения функции распределения максимумов для различных h и ξ .

В таблице приведены полученные в результате моделирования величины m и M , а также характеристики, рассчитанные по формулам (1.4)–(1.6) для трех значений ξ . Из таблицы видно, что с ростом ξ точность рассмотренных приближенных формул возрастает.

На рис. 1 нанесены экспериментальные значения функции распределения максимумов. Здесь же сплошными кривыми изображены зависимости $F_1(h)$ (1.4) и пунктиром — зависимости $F_2(h)$ (1.5). Поскольку во многих задачах необходимо знать поведение «хвостов» функции распределения, на рис. 2 приведены значения вероятности $1 - F(h)$ для больших h . Обозначения на рис. 2 соответствуют обозначениям на рис. 1. Отметим, что экспериментальные значения вероятности $1 - F(h)$ для $\xi = 100$ приведены в [10], где обозначено $\alpha = 1 - F(h)$.

2. Рассмотрим недифференцируемый гауссовский случайный процесс $\gamma(t)$, $t \in [0, T]$. Будем считать, что при $\tau \rightarrow 0$ его функция корреляции допускает представление

$$K(\tau) = \sigma^2 [1 - \delta |\tau| + o(|\tau|)], \quad \delta > 0. \quad (2.1)$$

Для нахождения аппроксимаций для функции распределения абсолютных максимумов недифференцируемого случайного процесса используется понятие о τ -выходах реализации процесса за фиксированный уровень $[\text{3}]$. В $[\text{4}, \text{5}]$ показано, что поток τ -выходов гауссовского процесса с функцией

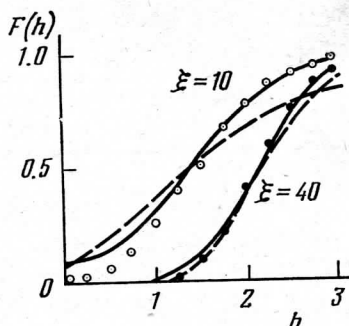


Рис. 1

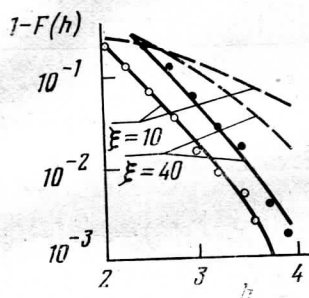


Рис. 2

корреляции (2.1) за уровень H при $H \rightarrow \infty$ является асимптотически пуассоновским. Поэтому из $[\text{4}, \text{5}]$ следует (1.1), где теперь $z = h^2/2 - \ln(vh/\sqrt{2\pi})$, $v = \delta T$. Аналогично (1.3), (1.4) при фиксированных T и h приходим к аппроксимациям функции распределения абсолютных максимумов

$$F(h) = \begin{cases} \exp[-vh \exp(-h^2/2)/\sqrt{2\pi}], & h \geq 1, \\ 0, & h < 1, \end{cases}$$

или

$$F_1(h) = \begin{cases} \Phi(h) \exp[-vh \exp(-h^2/2)/\sqrt{2\pi}], & h \geq 1, \\ \Phi(h) \exp[-v/\sqrt{2\pi}e], & h < 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Согласно $[\text{4}, \text{5}]$, точность этих аппроксимаций возрастает с увеличением v и h . Кроме того, аппроксимация (2.2) асимптотически точна при $T \rightarrow 0$ ($v \rightarrow 0$). Заметим, что расчет первых двух моментов m_1 и M_1 абсолютных максимумов с помощью аппроксимации (2.2) возможен лишь численными методами.

В $[\text{3}]$ приведено другое асимптотическое выражение для функции распределения абсолютных максимумов реализаций недифференцируемого случайного процесса. Воспользовавшись этим асимптотическим выражением при конечных T , приходим к аппроксимации функции распределения вида

$$F_2(h) = \exp[-v^2 \sqrt{2 \ln v} \exp(-h \sqrt{2 \ln v} / \sqrt{\pi})], \quad (2.3)$$

точность которой возрастает с увеличением v $[\text{3}]$. Расчет первых двух моментов распределения (2.3) дает значения

$$m_2 = \sigma [C/\sqrt{2 \ln v} + \sqrt{2 \ln v} + \ln(\ln v/\pi)/2\sqrt{2 \ln v}],$$

$$M_2 = \sigma^2 \{ \pi^2/12 \ln v + [C/\sqrt{2 \ln v} + \sqrt{2 \ln v} + \ln(\ln v/\pi)/2\sqrt{2 \ln v}]^2 \}. \quad (2.4)$$

Возможность использования формул (2.2)–(2.4) исследовалась с помощью моделирования гауссовского процесса $\gamma(t)$, $t \in [0, T]$, с корреля-

ционной функцией $K(\tau) = 1 - |\tau|$, $|\tau| \leq 1$ и $K(\tau) = 0$, $|\tau| > 1$. Моделирование $\gamma(t)$ выполнялось аналогично описанному выше моделированию дифференцируемого процесса $\varphi(t)$. Отличие заключалось в выборе коэффициентов $a_i = \Delta^{1/2}$ и величины p . Для обеспечения нормированной среднеквадратичной ошибки воспроизведения реализаций $\gamma(t)$ не более 10% были взяты значения $\Delta = 0.01$, $p = 50$.

В таблице приведены полученные в результате моделирования величины m и M , а также характеристики, рассчитанные по (2.2)–(2.4). На

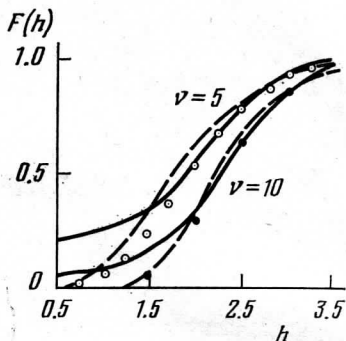


Рис. 3

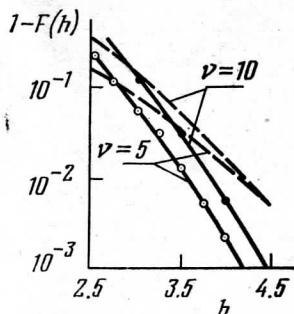


Рис. 4

рис. 3 нанесены экспериментальные значения $F(h)$, а на рис. 4 — значения $1-F(h)$ для процесса $\gamma(t)$. На этих же рисунках сплошными кривыми изображены соответствующие зависимости, рассчитанные по (2.2), и пунктиром — зависимости, рассчитанные по (2.3). Все экспериментальные характеристики недифференцируемого процесса получены в результате обработки $N = 2 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^4$ реализаций случайного процесса $\gamma(t)$.

Дата поступления 3 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970.
2. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.
3. Беляев Ю. К. Новые результаты и обобщения задач типа пересечений. Доп. к кн. [2].
4. Pickands J. III Uprossing probabilities for stationary Gaussian process. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, Nov.
5. Питербарг В. И. О работе Пикандса «Вероятности пересечения для стационарного гауссовского процесса». Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика, 1972, 5.
6. Беляев Ю. К. Распределение максимума случайного поля и его приложение к задачам надежности. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, № 2.
7. Фалькович С. Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. М., «Советское радио», 1961.
8. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
9. Трифонов А. П. Асимптотические характеристики оптимального обнаружения квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовой помехи. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 4.
10. Маршаков В. К., Трифонов А. П. Теоретическое и экспериментальное исследование приемника максимального правдоподобия. Радиотехника и электроника, 1974, 20, № 11.
11. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М., «Советское радио», 1971.