(51)

(51)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXIV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

11

МОСКВА · 1979

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1979 № 11

УДК 537.86 : 519

ПРИЕМ РАЗРЫВНОГО РАДИОСИГНАЛА НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

А. П. Трифонов

Найдены приближенные выражения для характеристик обнаружения сигнала и оценки его неизвестного неэнергетического параметра по методу максимального правдоподобия. Точность полученных формул возрастает с увеличением отношения сигнал/шум и априорного интервала определения неизвестного параметра. В качестве примера рассмотрен прием радиоимпульса с прямоугольной огибающей и неизвестными временным положением и начальной фазой.

ВВЕДЕНИЕ

Для обнаружения радиосигналов, содержащих неизвестные параметры, и для оценки этих параметров часто используется метод максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем называть приемником максимального правдоподобия. Применительно к сигналам, которые являются аналитическими функциями неизвестных параметров, анализ приемника максимального правдоподобия выполнен в [1–4] и др. Однако в радиотехнической литературе встречаются также модели разрывных сигналов, сигнальные функции (функции неопределенности) которых не имеют второй производной в начале координат. Примеры таких сигналов можно найти в [1, 3, 5–8] и др. Для когерентной обработки разрывного сигнала асимптотически точные характеристики приемника максимального правдоподобия приведены в [8]. Ниже найдены приближенные выражения для характеристик приемника максимального правдоподобия при некогерентном приеме разрывного радиосигнала с неизвестным неэнергетическим параметром. Точность полученных формул возрастает с увеличением отношения сигнал/шум и априорного интервала определения неизвестного параметра.

1. ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ ПРИЕМНИКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть на вход приемника в течение интервала времени $[0;\ T]$ поступает реализация случайного процесса $x(t)=n(t)$ или $x(t)=s(t,\ l_0,\ \varphi_0)+$ $+n(t)$. Здесь $n(t)$ — реализация белого гауссова шума с односторонней спектральной плотностью N_0, а

$$s(t,\ l_0,\ \varphi_0)=F(t,\ l_0)\cos[\omega_0 t+\Psi(t,\ l_0)-\varphi_0] \qquad (1)$$

— узкополосный радиосигнал с неизвестными начальной фазой φ_0 $(|\varphi|\leqslant\pi)$ и неэнергетическим параметром l_0 $(|l|\leqslant L/2)$. Полагая начальную фазу несущественным параметром [1, 2, 9], получаем, что приемник максимального правдоподобия должен вырабатывать функцию [1, 2]

$$R(l)=\sqrt{X^2(l)+Y^2(l)} \qquad (2)$$

для всех $l \in [-L/2;\ L/2]$. Здесь

$$\left.\begin{matrix} X(l) \\ Y(l) \end{matrix}\right\} = \frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)F(t,l)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}[\omega_0 t+\Psi(t,l)]dt.$$

При наличии полезного сигнала

(3) $$R(l)=\{z^4G^2(l_0,\ l)+2z^3N_1(l)+z^2[N_c^2(l)+N_s^2(l)]\}^{1/2},$$

а в его отсутствие

(4) $$R(l)=zr(l)=z\sqrt{N_c^2(l)+N_s^2(l)},$$

(5) $$\left.\begin{matrix} N_c(l) \\ N_s(l) \end{matrix}\right\} = \frac{2}{zN_0}\int_0^T n(t)F(t,l)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}[\omega_0 t+\Psi(t,l)]dt,$$

$$N_1(l)=N_c(l)[S_c(l_0,\ l)\cos\varphi_0+S_s(l_0,\ l)\sin\varphi_0]+$$
$$+N_s(l)[S_c(l_0,\ l)\sin\varphi_0-S_s(l_0,\ l)\cos\varphi_0],$$

$$\left.\begin{matrix} S_c(l_0,l) \\ S_s(l_0,l) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{z^2N_0}\int_0^T F(t,l_0)F(t,l)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}[\Psi(t,l_0)-\Psi(t,l)]dt,$$

(6) $$G(l_0,\ l)=\sqrt{S_c^2(l_0,\ l)+S_s^2(l_0,\ l)},\quad z^2=2E/N_0$$

— отношение сигнал/шум, E — энергия сигнала. При этом [2]

$$\langle N_s(l)\rangle=\langle N_c(l)\rangle=0,\quad \langle N_c(l_1)N_c(l_2)\rangle=$$
$$=\langle N_s(l_1)N_s(l_2)\rangle=S_c(l_1,\ l_2),$$
$$\langle N_s(l_1)N_c(l_2)\rangle=-\langle N_c(l_1)N_s(l_2)\rangle=S_s(l_1,\ l_2),$$
$$\text{макс}\,G(l_1,\ l_2)=\text{макс}\,S_c(l_1,\ l_2)=1,$$
$$|S_s(l_1,\ l_2)|\leqslant 1.$$

Так как параметр l предполагается неэнергетическим [1—3], то отношение сигнал/шум z не зависит от l и $G(l+\lambda,\ l)\equiv G(\lambda)=G(-\lambda)$, $S_c(l+\lambda,\ l)\equiv\equiv S_c(\lambda)=S_c(-\lambda)$, $S_s(l+\lambda,\ l)\equiv S_s(\lambda)=-S_s(-\lambda)$. Радиосигнал (1) будем называть разрывным по параметру l, если при $\lambda\to 0$

(7) $$G(\lambda)=1-\delta|\lambda|+o(|\lambda|),\quad \delta>0$$

и функция $G(\lambda)$ не имеет второй производной в нуле. Ограничимся рассмотрением класса разрывных радиосигналов, для которых кроме (7) при $\lambda\to 0$ выполняется соотношение

(8) $$|S_s(\lambda)|=o(\sqrt{|\lambda|}).$$

Из определения функции $G(\lambda)$ (6) имеем, что при выполнении (7), (8) и $\lambda\to 0$

(9) $$S_c(\lambda)=1-\delta|\lambda|+o(|\lambda|).$$

Поскольку $S_c(\lambda)$ — коэффициент автокорреляции для $N_c(l)$ и $N_s(l)$, то из (9) следует, что (5) представляют собой стационарные гауссовы локально-марковские случайные процессы [10, 11]. Покажем, что при выполнении (7)—(9) $r(l)$ (4) является стационарным релеевским локально-марковским процессом. С этой целью введем в рассмотрение стационарный релеевский марковский процесс $\tilde r(l)=\sqrt{\tilde N_c^2(l)+\tilde N_s^2(l)}$, где $\tilde N_c(l)$ и $\tilde N_s(l)$ —

независимые гауссовы процессы, для которых $\langle\tilde{N}_c(l)\rangle=\langle\tilde{N}_s(l)\rangle=0$,

$$\langle\tilde{N}_c(l+\lambda)\tilde{N}_c(l)\rangle=\langle\tilde{N}_s(l+\lambda)\tilde{N}_s(l)\rangle=\tilde{G}(\lambda)=\exp(-\delta|\lambda|). \quad (10)$$

Когда $\lambda\to 0$, функция $\tilde{G}(\lambda)$ совпадает с (7) и (9) с точностью до $o(|\lambda|)$, а условие (8) обеспечивает локальную независимость процессов $N_c(l)$ и $N_s(l)$ (5). Таким образом, на малых интервалах значений параметра l статистические характеристики процессов $N_c(l)$, $N_s(l)$ и $\tilde{N}_c(l)$, $\tilde{N}_s(l)$ асимптотически одинаковы. Следовательно, будут одинаковы локальные свойства процессов $r(l)$ и $\tilde{r}(l)$, так что $r(l)$ (4) — стационарный релеевский локально-марковский случайный процесс. Заметим при этом, что реализации локально-марковского процесса $r(l)$ (4) непрерывны, как и реализации марковских процессов диффузионного типа [1, 12]. В [11] отмечается, что вероятностные характеристики пересечений высокого уровня для марковского и локально-марковского процессов обладают общими асимптотическими свойствами. В частности, асимптотически совпадают вероятностные характеристики превышения этими процессами достаточно высокого уровня. Действительно, в силу непрерывности реализаций марковского и локально-марковского процессов длительность отрезков реализаций этих процессов, превышающих некоторый уровень H, при $H\to\infty$ стремится к нулю. Следовательно, когда $H\to\infty$, вероятность непревышения уровня H определяется лишь локальными свойствами процесса. Проиллюстрируем это утверждение примером двух гауссовых процессов: марковского и локально-марковского. Функция автокорреляции марковского процесса $\tilde{N}_c(l)$ или $\tilde{N}_s(l)$ определяется формулой (10). Примером локально-марковского гауссова процесса могут служить $N_c(l)$ или $N_s(l)$ (5) с функцией автокорреляции, допускающей представление (9). Асимптотическое выражение для вероятности непревышения уровня H реализацией гауссова марковского процесса найдено в [12]: $P[\tilde{N}_c(l)<H]\to\exp[-mH\exp(-H^2/2)/\sqrt{2\pi}]$ при $H\to\infty$ и $m=\delta L$. Это выражение совпадает с аналогичным результатом для локально-марковского процесса [8], причем этот результат получен без использования локально-марковских свойств процесса с функцией корреляции (9).

Таким образом, поскольку при выполнении (7), (8) случайный процесс $r(l)$ является локально-марковским, то для больших значений H

$$\underset{|l|\leqslant L/2}{P[r(l)<H]}\simeq \underset{|l|\leqslant L/2}{P[\tilde{r}(l)<H]}. \quad (11)$$

Как известно [12], нестационарная плотность вероятности марковского процесса $\tilde{r}(l)$ удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка. В результате решения этого уравнения при соответствующих граничных условиях в [12] получена приближенная формула

$$\underset{|l|\leqslant L/2}{P[\tilde{r}(l)<H]}\simeq \exp(-\nu L). \quad (12)$$

Здесь для релеевского марковского процесса $\tilde{r}(l)$

$$\frac{1}{\nu}\simeq\frac{1}{\delta}\int_1^H\frac{\exp(x^2/2)}{x}dx. \quad (13)$$

Удерживая лишь первый член в асимптотическом разложении интеграла (13) при $H\gg 1$, получаем [13]

$$\frac{1}{\nu}\simeq\frac{1}{\delta H^2}\exp(H^2/2)[1+O(H^{-2})]. \quad (14)$$

Значит, при больших значениях H, согласно (11), (12), (14),

$$(15)\qquad \underset{|l|\leqslant L/2}{P[r(l)<H]}\simeq \underset{|l|\leqslant L/2}{P[\tilde r(l)<H]}\simeq \exp[-mH^2\exp(-H^2/2)],$$

где $m=\delta L$. При этом, как следует из вывода формулы (12) в [12], точность приближенной формулы (15) растет с увеличением m и H, т. е. при $m\to\infty$ и $H\to\infty$

$$(16)\qquad F_N(H)=\underset{|l|\leqslant L/2}{P[r(l)<H]}\to \exp[-mH^2\exp(-H^2/2)].$$

Эта формула определяет асимптотическое поведение функции распределения $F_N(H)$ абсолютного максимума помехи (4) на выходе приемника максимального правдоподобия.

2. ОБНАРУЖЕНИЕ РАДИОСИГНАЛА

Приемник максимального правдоподобия выносит решение о наличии или отсутствии полезного сигнала (1) на основе сравнения абсолютного максимума $R(l)$ (2) при $|l|\leqslant L/2$ с порогом R_0. Вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и ошибок 2-го рода (пропуска сигнала) β можно записать как $\alpha=P[H_N>R_0]$ и $\beta=P[H_{sN}<R_0]$. Здесь H_N и H_{sN} — величины абсолютных максимумов $R(l)$, $|l|\leqslant L/2$ соответственно в отсутствие и при наличии сигнала (1) в принятой реализации $x(t)$. Так как $H_N=zr(l_m)$, где $r(l_m)$ — величина абсолютного максимума реализации стационарного релеевского локально-марковского процесса, то

$$(17)\qquad \alpha=P[r(l_m)>u],$$

$u=R_0/z$ — нормированный порог. Чтобы вычислить α по формуле (17), необходимо определить функцию распределения $F_N(H)$ абсолютного максимума случайного процесса $r(l)$ (4). Если принимается радиосигнал, разрывный по параметру l в смысле (7)—(9), то при $H\to\infty$ и $m\to\infty$ функция распределения $F_N(H)$ определяется из (16). Для конечных значений m и H распределение $F_N(H)$ будем аппроксимировать его предельным значением. Поскольку правая часть (16) является неубывающей функцией H лишь при $H\geqslant\sqrt{2}$, аналогично [4] используем аппроксимацию

$$(18)\qquad F_N(H)\simeq\begin{cases}\exp[-mH^2\exp(-H^2/2)], & H\geqslant\sqrt{2},\\ 0, & H<\sqrt{2}.\end{cases}$$

Согласно (17), (18) приближенное выражение для вероятности ложной тревоги принимает вид

$$(19)\qquad \alpha\simeq\begin{cases}1-\exp[-mu^2\exp(-u^2/2)], & u\geqslant\sqrt{2},\\ 1, & u<\sqrt{2}.\end{cases}$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением нормированного порога u и параметра m.

Предполагая, что полезный сигнал присутствует на выходе приемника, определим теперь вероятность пропуска сигнала β. Обозначим через Δ интервал корреляции случайных процессов $N_c(l)$ и $N_s(l)$ [1, 3]. Поскольку интервал корреляции помехи на выходе приемника максимального правдоподобия приближенно равен «длительности» выходного сигнала $G(l_0, l)$ [1—3], то $G(l_0, l)\simeq 0$ при $|l-l_0|>\Delta$. Пусть H_s — абсолютный максимум $R(l)$ (3) при $|l-l_0|<\Delta$, а $H_N{}^*$ — абсолютный максимум $R(l)$ при $-L/2\leqslant l\leqslant l_0-\Delta$, $l_0+\Delta\leqslant l\leqslant L/2$. Так как помеха на выходе приемника максимального правдоподобия является стационарным процессом, положение абсолютного максимума H_N^* распределено равновероятно в интервале длиной $L-2\Delta$. Величины двух выбросов выходного сигнала H_s и H_N^* могут быть статистически зависимы, если расстояние между ними не превышает Δ, что возможно с вероятностью $P_r \leqslant \Delta/(L-2\Delta)$. Следовательно, если $L \gg \Delta$ или, что то же самое для большинства сигналов, $m \gg 1$, то $P_r \simeq 0$, и случайные величины H_s и H_N^* можно приближенно считать независимыми. Вероятность пропуска при этом записывается как

$$\beta \simeq P(H_N^* < R_0) P(H_s < R_0) = F_N^*(R_0) F_s(R_0). \tag{20}$$

Когда $m \gg 1$, приближенное значение $F_N^*(R_0)$ получаем в виде

$$F_N^*(R_0) \simeq F_N(u), \tag{21}$$

где $F_N(\cdot)$ определяется формулой (18). Случайная величина $H_s = R(l_m)$, причем $|l_m - l_0| < \Delta$. В выражении для $R(l)$ (3), когда $|l-l_0| < \Delta$, функция $G(l_0, l) \neq 0$ и достигает максимума при $l = l_0$. Поэтому, учитывая непрерывность $N_c(l)$ и $N_s(l)$, для больших z, можем приближенно положить $H_s \simeq R(l_0)$. В этом приближении

$$F_s(R_0) = 1 - Q(z, u). \tag{22}$$

Здесь

$$Q(z, u) = \int_u^\infty x \exp\left(-\frac{x^2+z^2}{2}\right) I_0(zx)\, dx$$

— функция Маркума [1, 9]. Подставляя (21) и (22) в (20), получаем, что вероятность пропуска сигнала может быть вычислена по приближенной формуле

$$\beta \simeq \begin{cases} \exp[-mu^2 \exp(-u^2/2)][1-Q(z, u)], & u \geqslant \sqrt{2}, \\ 0, & u < \sqrt{2}, \end{cases} \tag{23}$$

причем точность этой формулы растет с увеличением u, m и z.

Конкретизируем полученные общие выражения применительно к обнаружению узкополосного радиоимпульса с прямоугольной огибающей и неизвестным временны́м положением

$$s(t, \tau_0, \varphi_0) = \begin{cases} a \cos(\omega_0 t - \varphi_0), & |t-\tau| < \Delta/2, \\ 0, & |t-\tau| > \Delta/2. \end{cases} \tag{24}$$

Для этого сигнала

$$G(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/\Delta, & |\tau| < \Delta, \\ 0, & |\tau| > \Delta, \end{cases} \quad z^2 = a^2 \Delta / N_0. \tag{25}$$

Будем считать, что неизвестное временно́е положение τ сигнала (24) может принимать значения из интервала $[-T_0/2;\ T_0/2]$. Тогда характеристики обнаружения сигнала (24) приемником максимального правдоподобия получаем, подставляя в (19) и (23) значения $m = T_0/\Delta$ и z^2 из (25). Оценим проигрыш в эффективности обнаружения сигнала (24) за счет незнания его временно́го положения. Сравнение эффективности обнаружения для различных условий приема обычно производят в зависимости от выбранного критерия оптимальности. Так, при байесовском обнаружении сравнивают значения среднего риска, для критерия идеального наблюдателя — полную вероятность ошибки, для критерия Неймана — Пирсона — вероятность пропуска при фиксированном уровне ложных тревог. Однако при всех упомянутых критериях количественный показатель эффективности обнаружения выражается через вероятности ошибок 1-го и 2-го рода. Поэтому, не конкретизируя критерий оптимальности, сопоставим непосредственно вероятности ошибок при обнаружении сигнала (24) с известным и неизвестным временны́м положением. Такое сопоставление позволяет оценить влияние величины априорного интервала T_0, длительности сигнала Δ и порога u на потери в эффективности обнаружения. При обнаружении радиосигнала, у которого неизвестна только начальная фаза, вероятности ошибок равны [1]

$$(26)\qquad \alpha_0=\exp(-u^2/2),\quad \beta_0=1-Q(z,\,u).$$

Из сравнения (23) и (26) следует, что при $u\gg1$ и $z\gg1$ $\beta\simeq\beta_0$, а из (19) и (26) имеем $\alpha/\alpha_0\simeq mu^2$. Таким образом, относительные потери в эффективности обнаружения возрастают с увеличением m и с уменьшением требуемого уровня ложных тревог, так как $\alpha\to0$ при $u\to\infty$.

Сравним вероятности ошибок 1-го и 2-го рода при некогерентном приеме сигнала (24) с вероятностями ошибок при когерентном приеме. Если начальная фаза радиосигнала (24) известна, вероятности ошибок согласно [8] определяются формулами

$$(27)\qquad \alpha_1\simeq\begin{cases}1-\exp[-mu\exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}], & u\geqslant1,\\ 1, & u<1,\end{cases}$$

$$(28)\qquad \beta_1\simeq\begin{cases}\exp[-mu\exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}]\Phi(u-z), & u\geqslant1,\\ 0, & u<1,\end{cases}$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [1]. Из (23) и (28) при $u\gg1$ и $z\gg1$ получаем, что $\beta\simeq\beta_1$. В то же время согласно (19) и (27) $\alpha/\alpha_1\simeq u/\sqrt{2\pi}$. Следовательно, относительные потери в эффективности обнаружения из-за некогерентной обработки возрастают с уменьшением требуемого уровня ложных тревог.

Обнаружение радиосигналов с неизвестным временны́м положением рассматривалось также в [9], где предполагалось, что квазиоптимальный обнаружитель содержит блок оценки временно́го положения сигнала. При этом структура блока оценки не конкретизировалась, а неизвестное временно́е положение сигнала предполагалось заданным на интервале порядка длительности полезного сигнала ($m\simeq1-2$). Полученные здесь соотношения представляют собой развитие результатов [9] для случая, когда блок оценки в квазиоптимальном обнаружителе вырабатывает оценку максимального правдоподобия, а интервал определения неизвестного временно́го положения значительно больше длительности сигнала ($m\gg1$).

При анализе обнаружения сигнала (24) в приемнике максимального правдоподобия приближенные значения вероятностей ошибок часто ищут, предполагая, что неизвестное временно́е положение принимает одно из m дискретных значений [14]. Этот подход, основанный на искусственном сведении аналоговой системы к дискретной, дает следующие приближенные выражения для вероятностей ошибок:

$$(29)\qquad \alpha_m\simeq1-(1-\alpha_0)^m,\quad \beta_m\simeq(1-\alpha_0)^{m-1}\beta_0.$$

Здесь α_0 и β_0 определяются из (26). Сравнивая (29) с (19) и (23), когда $u\gg1$ и $z\gg1$, получаем $\beta_m\simeq\beta$, $\alpha/\alpha_m\simeq u^2$. Следовательно, для больших u (малых α) расчет вероятности ложной тревоги по приближенной формуле

(29) приводит к существенно заниженным значениям α. При этом точность формул (19), (23) растет с увеличением u, m и z, в то время как поведение точности приближенных формул (29) неизвестно.

3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА РАДИОСИГНАЛА

Рассмотрим характеристики приемника максимального правдоподобия, когда производится оценка неизвестного параметра l_0 сигнала (1). При этом предполагается, что в принятой реализации $x(t)$ всегда присутствует сигнал $s(t, l_0, \varphi_0)$. В качестве оценки параметра l_0 принимают положение l_m абсолютного максимума $R(l)$ при $|l|\leqslant L/2$. Обозначим P_0 — вероятность того, что максимум функции $R(l)$ при $|l-l_0|<\Delta$ больше любого выброса выходной помехи $zr(l)$ при $-L/2\leqslant l\leqslant l_0-\Delta$, $l_0+\Delta\leqslant l\leqslant L/2$. Тогда, согласно [3, 4], при $m\gg1$ условное рассеяние оценки (средний квадрат ошибки) запишется как

$$V(l_m|l_0)=\langle(l_m-l_0)^2\rangle=P_0\sigma^2+(1-P_0)\left(\frac{L^2}{12}+l_0^2\right),$$

где σ^2 — дисперсия надежной оценки (средний квадрат нормальной ошибки) [2, 3].

В соответствии с определением вероятность надежной оценки $P_0=$ $=P[H_s>H_N^*]$. Так как при $m\gg1$ случайные величины H_s и H_N^* приближенно независимы, имеем

$$P_0\simeq\int F_N^*(H)\,dF_s(H). \tag{30}$$

Здесь $F_N^*(\cdot)$ и $F_s(\cdot)$ — распределения случайных величин H_N^*/z и H_s/z. Аналогично [15] можно показать, что когда $z\to\infty$, величина интеграла (30) определяется поведением подынтегральных функций при $H>\Theta(z)$. При этом предполагается, что $\Theta(z)\to\infty$, когда $z\to\infty$, и $\Theta(z)/z\to0$. Следовательно, для приближенного вычисления P_0 при больших отношениях сигнал/шум можно использовать аппроксимации подынтегральных функций, асимптотически точные при $z\to\infty$ и $H\to\infty$. Такие аппроксимации найдены ранее — (18) и (22). Подставляя их в (30), получаем

$$P_0\simeq\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}x\exp\left[-\frac{x^2+z^2}{2}-mx^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]I_0(zx)\,dx,$$

причем точность этой приближенной формулы возрастает с увеличением m и z.

Найдем дисперсию надежной оценки параметра разрывного радиосигнала. При больших отношениях сигнал/шум и $|l-l_0|<\Delta$, когда $G(l_0, l)\neq0$, выражение (3) можно приближенно переписать как [2, 3] $R(l)\simeq z^2G(l_0, l)+$ $+zN(l)$. При фиксированных l_0 и φ_0 $N(l)=N_1(l)/G(l_0, l)$ — гауссов процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$\langle N(l+\lambda)N(l)\rangle=G(\lambda)\cos[\gamma(\lambda)-\gamma(l-l_0+\lambda)+\gamma(l_0-l)],\quad \gamma(\lambda)=\mathrm{arctg}\,[S_s(\lambda)/S_c(\lambda)]. \tag{31}$$

Функция $G(l_0, l)$ (6) достигает максимума при $l=l_0$, а реализации процесса $N(l)$ непрерывны. Поэтому при больших отношениях сигнал/шум характеристики надежной оценки максимального правдоподобия определяются поведением сигнальной функции $G(l_0, l)$ и функции корреляции (31) в малой окрестности точки l_0 [2, 3]. В малой окрестности точки l_0 для сигнальной функции справедливо представление (7). Соответственно для функции корреляции (31) при $\lambda\to0$ в малой окрестности l_0 при помощи (8), (9) получаем

$$\langle N(l+\lambda)N(l)\rangle=1-\delta|\lambda|+o(|\lambda|). \tag{32}$$

Согласно (7) и (32) поведение рассматриваемой сигнальной функции и функции корреляции шума при $|l-l_0|\to 0$ такое же, как при приеме прямоугольного видеоимпульса с неизвестным временны́м положением на фоне белого шума, если его длительность принять равной $1/\delta$ [1]. Следовательно, при больших отношениях сигнал/шум, аналогично [5], для дисперсии надежной оценки параметра l_0 имеем $\sigma^2\simeq 13/2\delta^2z^4$. Если l_0 — значение случайной величины, распределенной равновероятно в интервале $[-L/2;\ L/2]$, то безусловное рассеяние оценки запишется как

$$V(l_m)=\frac{13(1-P_a)}{2\delta^2z^4}+\frac{P_aL^2}{6}. \tag{33}$$

Здесь

$$P_a=1-P_0=1-\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}x\exp\left[-\frac{x^2+z^2}{2}-mx^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]I_0(zx)\,dx \tag{34}$$

— вероятность аномальных ошибок. Применительно к оценке временно́го положения сигнала (24) рассеяние оценки максимального правдоподобия принимает вид

$$V(l_m)=\frac{T_0^2}{6}\left[\frac{39(1-P_a)}{m^2z^4}+P_a\right], \tag{35}$$

а параметр $m=T_0/\Delta$. При этом точность формул (33)—(35) возрастает с увеличением m и z.

При когерентном приеме [8] рассеяние оценки временно́го положения сигнала (24) опять определяется формулой (35). Необходимо лишь подставить в эту формулу соответствующее значение вероятности аномальной ошибки

$$P_{a1}\simeq 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{1}^{\infty}\exp[-(x-z)^2/2-mx\exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}]\,dx. \tag{36}$$

Сравним вероятности аномальных ошибок при когерентном и некогерентном приеме сигнала (24). Для достаточно больших отношений сигнал/шум формулы (34) и (36) можно переписать как $P_a\simeq mz^2\exp(-z^2/4)/8$, $P_{a1}\simeq$ $\simeq mz\exp(-z^2/4)/4\sqrt{\pi}$, откуда следует, что когда $z\gg 1$, $P_a/P_{a1}\simeq z\sqrt{\pi}/2$. Значит при больших отношениях сигнал/шум вероятность аномальной ошибки при некогерентном приеме может быть значительно больше, чем при когерентном.

В ряде работ [2, 3, 6] и др. приближенное значение вероятности аномальных ошибок находят, предполагая, что неизвестное временно́е положение сигнала (24) принимает одно из m дискретных значений:

$$P_{am}\simeq 1-\int\limits_{0}^{\infty}x\exp\left(-\frac{x^2+z^2}{2}\right)I_0(zx)\,[1-\exp(-x^2/2)]^{m-1}\,dx. \tag{37}$$

Из сравнения (34) и (37) следует, что при $m\gg 1$ и $z\gg 1$ $P_a/P_{am}\simeq z^2/4$. Значит расчет вероятности аномальных ошибок по формуле (37) при больших отношениях сигнал/шум приводит к существенно заниженным значениям этой вероятности. Заметим, что если точность формулы (34) возрастает с увеличением m и z, то поведение точности приближенной формулы (37), полученной на основе искусственного сведения аналоговой системы к дискретной, неизвестно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье найдены асимптотически точные выражения для характеристик обнаружения разрывного сигнала и оценки его неизвестного параметра по методу максимального правдоподобия. Полученные формулы могут быть использованы для приближенного расчета характеристик приемника максимального правдоподобия, когда сигнальная функция недифференцируема в нуле и выполняются соотношения (7), (8); априорный интервал определения неизвестного параметра значительно больше «протяженности» сигнальной функции ($m\gg1$); отношение сигнал/шум z и нормированный порог u при обнаружении достаточно велики. С увеличением u, m и z точность этих приближенных формул возрастает, в то время как поведение точности других приближенных формул для характеристик обнаружения и оценки обычно неизвестно. Сопоставление расчетов по приближенным формулам (19), (23), (35) с результатами экспериментальных исследований показывает возможность их использования уже при $m\geqslant10$, $z>1\div2$, $u>2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, Изд. Советское радио, 1966.
2. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов, Оценка параметров сигналов на фоне помех, Изд. Советское радио, 1978.
3. С. Е. Фалькович, Оценка параметров сигнала, Изд. Советское радио, 1970.
4. В. К. Маршаков, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1974, **19**, 11, 2266.
5. А. С. Терентьев, Радиотехника и электроника, 1968, **13**, 4, 652.
6. А. Ф. Фомин, Помехоустойчивость систем передачи непрерывных сообщений, Изд. Советское радио, 1975.
7. Г. И. Тузов, Статистическая теория приема сложных сигналов, Изд. Советское радио, 1977.
8. А. П. Трифонов, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1978, 4, 146.
9. В. Т. Горяинов, Изв. вузов МВССО СССР (Радиоэлектроника), 1970, **13**, 7, 787.
10. I. A. McFadden, J. Roy. Statist. Soc., 1967, **B29**, 3, 489.
11. Ю. К. Беляев, Новые результаты и обобщения задач типа пересечений. Дополнения к книге Г. Крамер, М. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, Изд. Мир, 1969.
12. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, Изд. Советское радио, 1961.
13. Э. Копсон, Асимптотические разложения, Изд. Мир, 1966.
14. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков, Выделение сигналов на фоне случайных помех, Изд. Советское радио, 1960.
15. Е. И. Куликов, В. К. Маршаков, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1972, **17**, 8, 1745.

Поступила в редакцию
15 XI 1977