52

52

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1980

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1980 № 4

УДК 621.391.2.001.24

ПРИЕМ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ЧАСТОТОЙ

А. П. Трифонов

Найдены вероятности ошибок при обнаружении гауссового сигнала с прямоугольной спектральной плотностью и неизвестной центральной частотой. Получены асимптотические выражения для смещения и рассеяния оценок максимального правдоподобия центральной частоты и величины спектральной плотности. Точность этих формул возрастает с увеличением времени наблюдения и априорного интервала определения неизвестной частоты.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим прием полосового гауссового случайного сигнала $s(t)$, спектральная плотность которого описывается выражением

$$K_s(\omega, l_0)=\begin{cases} N_s/2, & |\omega\pm l_0|\leqslant\Omega/2, \\ 0, & |\omega\pm l_0|>\Omega/2, \end{cases} \tag{1}$$

на фоне гауссового белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Полагаем, что неизвестная частота l принимает значения из априорного интервала $[L_1; L_2]$, $L_1>\Omega/2$, а для обработки сигнала $s(t)$ используется метод максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем называть приемником максимального правдоподобия [1]. Структура подобного приемника описана, например, в [2, 3] и др. Ниже найдены приближенные выражения для характеристик приемника максимального правдоподобия. Точность полученных формул возрастает с увеличением времени наблюдения и априорного интервала определения неизвестной частоты.

1. ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ ПРИЕМНИКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть на вход приемника в течение интервала времени $[0; T]$ поступает реализация гауссового случайного процесса $x(t)=n(t)$ или $x(t)=s(t)+n(t)$, причем $s(t)$ и $n(t)$ статистически независимы. Приемник максимального правдоподобия для всех $l\in[L_1; L_2]$ должен вырабатывать логарифм функционала отношения правдоподобия, который с точностью до постоянных слагаемых равен [2, 3]

$$M_0(l)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T x(t_1)x(t_2)\Theta(t_1, t_2, l)\,dt_1\,dt_2. \tag{2}$$

Здесь функция $\Theta(t_1, t_2, l)$ находится из интегрального уравнения [3]

$$\frac{N_0}{2}\Theta(t_1, t_2, l)+\int_0^T K_s(t_1-t, l)\Theta(t, t_2, l)\,dt=\frac{2}{N_0}K_s(t_1-t_2, l), \tag{3}$$

где $K_s(t_1-t_2, l)$ — функция корреляции полезного сигнала. Будем считать время наблюдения достаточно большим, так что $T \gg 2\pi/\Omega$. Тогда, решая уравнение (3) при помощи преобразования Фурье, можем переписать (2) как

$$M_0(l) = Tq \int_0^T x^2(t, l)\, dt / N_0(1+q). \tag{4}$$

Здесь $q = N_s/N_0$, а $x(t, l)$ — отклик фильтра с передаточной функцией $G(j\omega, l)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$. Для рассматриваемого случайного сигнала $|G(j\omega, l)| = 1$, когда $|\omega \pm l| \leqslant \Omega/2$, и $|G(j\omega, l)| = 0$, когда $|\omega \pm l| > \Omega/2$.

В отсутствие полезного сигнала на входе приемника функция $M_0(l)$ представляет собой реализацию стационарного случайного процесса. Коэффициент корреляции этого процесса имеет вид

$$R_N(l_1, l_2) = \begin{cases} 1 - |l_1 - l_2|/\Omega, & |l_1 - l_2| \leqslant \Omega, \\ 0, & |l_1 - l_2| > \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

а плотность вероятности равна [3]

$$W_N(M) = \frac{(1+q)^\mu M^{\mu-1}}{q^\mu \Gamma(\mu)} \exp\left[-\frac{M(1+q)}{q}\right], \tag{6}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $\mu = T\Omega/2\pi$.

При наличии полезного сигнала на входе приемника функцию $M_0(l)$ можно представить в виде суммы нормированных сигнальной и шумовой функций [4]:

$$M_0(l) = q\sqrt{\mu}[\sqrt{\mu} S(l_0, l) + N(l)], \tag{7}$$

$$S(l_0, l) = \begin{cases} 1 - q|l - l_0|/\Omega(1+q), & |l_0 - l| \leqslant \Omega, \\ 1/(1+q), & |l_0 - l| > \Omega, \end{cases}$$

$$N(l) = M_0(l)/q\sqrt{\mu} - S(l_0, l)\sqrt{\mu}.$$

При этом $\langle N(l) \rangle = 0$, макс $S(l_0, l) = S(l_0, l_0) = \langle N^2(l_0) \rangle = 1$. Когда $|l - l_0| > \Omega$, функция $M_0(l)$ (7) обладает коэффициентом корреляции (5) и плотностью вероятности (6). При $|l - l_0| < \Omega$ функция корреляции описывается выражением

$$\langle N(l_1) N(l_2) \rangle = 1 - \frac{|l_1 - l_2|}{\Omega} - \frac{q^2 + 2q}{\Omega(1+q)^2} \text{мин}(|l_1 - l_0|, |l_2 - l_0|), \tag{8а}$$

если $(l_1 - l_0)(l_2 - l_0) > 0$, и

$$\langle N(l_1) N(l_2) \rangle = 1 - \frac{|l_1 - l_2|}{\Omega}, \tag{8б}$$

если $(l_1 - l_0)(l_2 - l_0) < 0$. Таким образом, при наличии сигнала и $|l - l_0| < \Omega$ шумовая функция $N(l)$ является реализацией нестационарного случайного процесса.

Заметим, что хотя в силу (5), (7), (8) реализации логарифма функционала отношения правдоподобия $M_0(l)$ недифференцируемы, они тем не менее непрерывны с вероятностью единица. Действительно, поскольку реализации гауссового случайного процесса $x(t, l)$ непрерывны по t с вероятностью единица, интеграл (4) существует с той же вероятностью как обычный интеграл Римана от реализации случайного процесса [5]. Далее из непрерывности $x(t, l)$ по l при любых $t \in [0; T]$ следует непрерывность реализаций $M_0(l)$.

2. ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

Приемник максимального правдоподобия выносит решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t)$ на основе сравнения абсолютного максимума $M_0(l)$ (2), (4) при $l \in [L_1; L_2]$ с порогом h. Соответственно вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и ошибок 2-го рода (пропуска сигнала) β можно записать как $\alpha = P[H_N > h]$ и $\beta = P[H_{SN} < h]$. Здесь H_N и H_{SN} — величины абсолютных максимумов $M_0(l)$, $l \in [L_1; L_2]$ в отсутствие и при наличии сигнала $s(t)$ в принятой реализации $x(t)$.

Для определения вероятности ложной тревоги необходимо найти функцию распределения $F_N(H)$ абсолютного максимума $M_0(l)$ в отсутствие сигнала. В Приложении показано, что при $H \to \infty$ и $m \to \infty$

$$F_N(H) \to \exp\left\{-\frac{m}{\Gamma(\mu)}\left[\frac{H(1+q)}{q}\right]^{\mu} \exp\left[-\frac{H(1+q)}{q}\right]\right\}, \tag{9}$$

где $m = (L_2 - L_1)/\Omega$. Для конечных значений m и H будем аппроксимировать $F_N(H)$ его предельным значением. Поскольку правая часть (9) является неубывающей функцией H лишь при $H \geqslant \mu q/(1+q)$, аналогично [1, 6] используем аппроксимацию

$$F_N(H) = \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{m}{\Gamma(\mu)}\left[\dfrac{H(1+q)}{q}\right]^{\mu} \exp\left[-\dfrac{H(1+q)}{q}\right]\right\}, & H \geqslant \mu q/(1+q), \\ 0, & H < \mu q/(1+q). \end{cases} \tag{10}$$

Так как $\alpha = 1 - F_N(h)$, то приближенное выражение для вероятности ложной тревоги имеет вид

$$\alpha \simeq \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\dfrac{m}{\Gamma(\mu)}\left[\dfrac{h(1+q)}{q}\right]^{\mu} \exp\left[-\dfrac{h(1+q)}{q}\right]\right\}, & h \geqslant \mu q/(1+q), \\ 1, & h < \mu q/(1+q). \end{cases} \tag{11}$$

Точность этой приближенной формулы возрастает с увеличением порога h и параметра m.

В частном случае $\mu = 1$ плотность вероятности (6) описывает квадрат релеевского случайного процесса с параметром $\sigma^2 = q/2(1+q)$. Полагая соответственно в (11) $\mu = 1$, получаем, что эта формула с точностью до обозначений совпадает с аналогичным результатом [7]. Аналитически оценить точность формулы (11) при конечных m и h затруднительно. Поэтому для проверки точности этой формулы проводилось (совместно с Ю. С. Радченко) математическое моделирование. Формула (11) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные зависимости $\alpha(h)$, когда $m \geqslant 5-10$ и $\alpha < 0{,}2-0{,}3$, причем точность аппроксимации возрастает с увеличением m и уменьшением α.

Предполагая, что полезный сигнал присутствует на входе приемника, определим теперь вероятность пропуска сигнала. Обозначим: H_S — величина абсолютного максимума $M_0(l)$ при $|l - l_0| < \Omega$, а H_N^* — величина абсолютного максимума $M_0(l)$ при $L_1 \leqslant l \leqslant l_0 - \Omega$, $l_0 + \Omega \leqslant l \leqslant L_2$. Если $m \gg 1$, то аналогично [6] можно показать, что случайные величины H_N^* и H_s приближенно статистически независимы. Следовательно, вероятность пропуска сигнала может быть записана как

$$\beta \simeq P(H_N^* < h) P(H_s < h) = F_N^*(h) F_s(h). \tag{12}$$

При $m \gg 1$

(13) $$F_N^*(h) \simeq F_N(h),$$

где $F_N(\cdot)$ определяется формулой (10). Обозначим далее l_m положение абсолютного максимума $M_0(l)$ (2), (4) при $l \in [L_1; L_2]$. Тогда при наличии сигнала на входе приемника $H_s = M_0(l_m)$, причем здесь $|l_m - l_0| < \Omega$. В выражении (7), когда $|l - l_0| < \Omega$, функция $S(l_0, l) \neq 0$ и достигает максимума при $l = l_0$. Поэтому, учитывая непрерывность реализаций $N(l)$, для больших μ и $q > 0$ можем приближенно положить $H_s \simeq M_0(l_0)$. В этом приближении из [3] находим

(14) $$F_s(h) \simeq 1 - \Gamma(\mu, h/q)/\Gamma(\mu).$$

Здесь $\Gamma(\cdot, \cdot)$ — неполная гамма-функция. Подставляя (13) и (14) в (12), получаем приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала, точность которого возрастает с увеличением h, μ и m.

3. ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНОЙ ЧАСТОТЫ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

Рассмотрим характеристики приемника максимального правдоподобия, когда производится оценка неизвестной частоты l_0 случайного сигнала со спектральной плотностью (1). При этом предполагается, что сигнал $s(t)$ присутствует на входе приемника с вероятностью единица. В качестве оценки частоты l_0 принимают положение l_m абсолютного максимума $M_0(l)$ при $l \in [L_1; L_2]$. Обозначим P_0 вероятность того, что максимум функции $M_0(l)$ при $|l - l_0| < \Omega$ больше любого выброса $M_0(l)$ при $L_1 \leqslant l \leqslant l_0 - \Omega$, $l_0 + \Omega \leqslant l \leqslant L_2$. Заметим, что когда $|l - l_0| > \Omega$, шумовая функция $N(l)$ является стационарным случайным процессом. Следовательно, согласно [4], при $m \gg 1$ условное смещение оценки будет равно

(15) $$d(l_m | l_0) = \langle l_m - l_0 \rangle \simeq P_0 d_0 + (1 - P_0)[(L_1 + L_2)/2 - l_0],$$

а условное рассеяние (средний квадрат ошибки) запишется так:

(16) $$V(l_m | l_0) = \langle (l_m - l_0)^2 \rangle \simeq P_0 \sigma_0^2 + (1 - P_0)[l_0^2 - l_0(L_1 + L_2) + (L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2)/3].$$

Здесь усреднение выполняется по реализациям помехи $n(t)$ и сигнала $s(t)$ при фиксированном значении l_0, а d_0 и σ_0^2 обозначают соответственно условные смещение и рассеяние надежной оценки. Под надежной оценкой [4] понимается оценка, найденная в предположении $|l_m - l_0| < \Omega$.

В соответствии с определением вероятность надежной оценки $P_0 = P(H_s > H_N^*)$. Так как при $m \gg 1$ случайные величины H_s и H_N^* приближенно независимы, имеем

(17) $$P_0 \simeq \int F_N^*(H)\, dF_s(H),$$

где $F_N^*(\cdot)$ и $F_s(\cdot)$ — распределения случайных величин H_N^* и H_s соответственно. Известно [3] и др. что распределение $M_0(l)$ при $\mu \to \infty$ сходится к гауссовому. Поэтому аналогично [4] можно показать, что когда $\mu \to \infty$, величина интеграла (17) определяется поведением подынтегральных функций при $H > \psi(\mu)$. Здесь $\psi(\mu)$ — такая функция, что $\psi(\mu) \to \infty$, если $\mu \to \infty$, но $\psi(\mu)/\sqrt{\mu} \to 0$. Предположив далее, что $q > 0$, для приближенного вычисления P_0 при больших значениях μ можем использовать аппроксимации подынтегральных функций, асимптотически точные, когда $\mu \to \infty$ и $H \to \infty$. Такие аппроксимации найдены ранее в форме (10), (13), (14).

Подставляя их в (17), получаем

$$(18)\qquad P_0 \simeq \frac{1}{\Gamma(\mu)\,(1+q)^{\mu}} \int\limits_{\mu}^{\infty} x^{\mu-1} \exp\left[-\frac{x}{1+q} - \frac{m x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \exp(-x)\right] dx,$$

причем точность этой формулы возрастает с увеличением μ и m. При любых $x>0$ справедливо разложение

$$\exp\left[-\frac{m x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \exp(-x)\right] = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k m^k x^{\mu k}}{k!\,\Gamma^k(\mu)} \exp(-kx).$$

Подставляя это разложение в (18), находим

$$(19)\qquad P_0 \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m^k (1+q)^{\mu k}}{k!\,\Gamma^{k+1}(\mu)\,(kq+k+1)^{\mu(k+1)}}\, \Gamma\left(\mu(k+1)-1,\ \mu\frac{kq+k+1}{1+q}\right).$$

Отсюда следует, что когда $q\to\infty$, $P_0\to 1$ даже при конечных, хотя и больших значениях μ. Таким образом, в отсутствие помехи $n(t)$ оценка максимального правдоподобия частоты случайного сигнала со спектральной плотностью (1) всегда является надежной.

Найдем далее характеристики надежной оценки. С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$(20)\qquad m(l) = [M_0(l) - M_0(L)]/q\sqrt{\mu}.$$

Здесь предполагается, что l, $L \in [L_0-\Omega;\ l_0+\Omega]$. Положение абсолютного максимума функции (20) совпадает с надежной оценкой неизвестной частоты. Следовательно, распределение оценки запишется так:

$$F_m(L) = P[l_m < L] = P[\max_{[l_0-\Omega;\ L)} m(l) > \max_{[L;\ l_0+\Omega]} m(l)].$$

Из этого выражения следует, что распределение оценки можно выразить через двумерное распределение абсолютных максимумов функции (20):

$$F(u,v,L) = P[\max_{[l_0-\Omega;\ L)} m(l) < u,\ \max_{[L;\ l_0+\Omega]} m(l) < v].$$

Учитывая, что при $\mu\to\infty$ процесс $m(l)$ является асимптотически гауссовым, найдем его функцию корреляции $K_m(l_1, l_2)$. Используя формулы (8), получаем, что

$$(21)\qquad K_m(l_1, l_2) = \frac{2+2q+q^2}{\Omega(1+q)^2} \min(|L-l_1|, |L-l_2|),$$

когда $(L-l_1)(L-l_2)\geqslant 0$, $K_m(l_1, l_2)=0$, когда $(L-l_1)(L-l_2)\leqslant 0$. Таким образом, если $\mu\gg 1$, то отрезки реализаций процесса (20) на интервалах $[l_0-\Omega;\ L)$ и $[L;\ l_0+\Omega]$ приближенно независимы. Значит для больших μ

$$F(u,v,L) \simeq P[\max_{[l_0-\Omega;\ L)} m(l) < u]\, P[\max_{[L;\ l_0+\Omega]} m(l) < v] = F_{1L}(u)\, F_{2L}(v),$$

а распределение надежной оценки принимает вид [8]

$$(22)\qquad F_m(L) \simeq \int\limits_{0}^{\infty} F_{2L}(u)\, dF_{1L}(u).$$

Воспользовавшись формулировкой теоремы Дуба, приведенной в [9], получаем, что при $\mu\to\infty$ процесс (20) является асимптотически марковским гауссовым процессом на интервалах, длительность которых не превосходит Ω. Ограничившись рассмотрением интервала $[l_0-\Omega/2; l_0+\Omega/2]$, из (7) и (21) находим коэффициенты сноса и диффузии этого процесса:

$$(23) \qquad a=\frac{q\sqrt{\mu}}{\Omega(1+q)}\begin{cases}1, & l<l_0,\\ -1, & l>l_0,\end{cases} \qquad b=\frac{2+2q+q^2}{\Omega(1+q)^2}.$$

Приближенные выражения для распределений $F_{1L}(u)$ и $F_{2L}(v)$ определяются из решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова с коэффициентами (23) при соответствующих граничных и начальных условиях, как это сделано в [8, 10]. Получив таким образом приближенное выражение для распределения оценки (22), аналогично [8, 10] находим асимптотические ($\mu\to\infty$, $q>0$) значения условных смещения и дисперсии надежной оценки:

$$(24) \qquad d_0=0,\ \sigma_0^2=13\pi^2(2+2q+q^2)^2/2T^2q^4.$$

Отметим, что дисперсия надежной оценки частоты не зависит от ширины полосы частот Ω, занимаемой спектральной плотностью случайного сигнала. В частном случае $q\ll 1$

$$(25) \qquad \sigma_0^2=26\pi^2/T^2q^4.$$

При $\mu\to\infty$ распределение выходного сигнала приемника максимального правдоподобия $M_0(l)$ (2), (4) сходится к гауссовому. Сигнальная функция (7) и функция корреляции шумовой функции (8) при $q\ll 1$ совпадают по форме и имеют такой же вид, как при приеме прямоугольного импульса на фоне белого шума [8]. Следовательно, когда $q\ll 1$ и $\mu\to\infty$, для расчета дисперсии надежной оценки частоты можно непосредственно воспользоваться результатами [8, 11]. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом частном случае формула (25) с точностью до обозначений совпадает с результатами [8, 11]. Если же $q\gg 1$, то из (24) имеем

$$(26) \qquad \sigma_0^2=13\pi^2/2T^2.$$

Подставляя (18) или (19) и (24) в (15) и (16), получаем выражения для смещения и рассеяния оценки. Эти выражения позволяют приближенно оценить величины смещения и рассеяния оценки неизвестной частоты при больших, но конечных μ, m и являются асимптотическими точными, когда $\mu\to\infty$ и $m\to\infty$. Заметим в заключение, что при $q\to\infty$ (т. е. в отсутствие белого шума) согласно (15), (16), (19) оценка частоты несмещенная, а ее рассеяние совпадает с дисперсией надежной оценки (26).

4. ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ЧАСТОТОЙ

Положим теперь, что у случайного сигнала $s(t)$ неизвестна не только частота l, но и величина спектральной плотности N_s. Согласно (4) оценка частоты l_m может быть определена как положение абсолютного максимума функции

$$(27) \qquad r(l)=\int_0^T x^2(t,l)\,dt, \qquad l\in[L_1; L_2].$$

Следовательно, оценка частоты инвариантна к величине спектральной плотности (1). Однако характеристики оценки l_m в общем случае зависят от истинного значения неизвестной спектральной плотности N_{s0}. В этой связи измерение неизвестной спектральной плотности необходимо для последующего расчета характеристик приема случайного сигнала. Рассмотрим структуру и характеристики оценки максимального правдоподобия N_{sm} спектральной плотности случайного сигнала с неизвестной частотой. Логарифм функционала отношения правдоподобия для обоих неизвестных параметров l и N_s имеет вид $M(l, N_s)=Tqr(l)/N_0(1+q)-\mu\ln(1+q)$. Максимизируя это выражение по l и N_s, получаем оценку величины спектральной плотности:

(28) $$N_{sm}=Tr(l_m)/\mu-N_0.$$

Найдем смещение и рассеяние оценки спектральной плотности:

$$d(N_{sm}|N_{s0}, l_0)=\langle N_{sm}\rangle-N_{s0},\quad V(N_{sm}|N_{s0}, l_0)=\langle (N_{sm}-N_{s0})^2\rangle.$$

Усреднение в этих формулах выполняется по реализациям помехи и сигнала при фиксированных истинных значениях спектральной плотности N_{s0} и частоты l_0. Из сравнения (27) и (4) следует, что $r(l_m)=N_0(1+q_0)M_0(l_m)/Tq_0$, где $q_0=N_{s0}/N_0$. Следовательно, для расчета ее характеристик оценку (28) можно переписать как $N_{sm}=N_0(1+q_0)M_0(l_m)/q_0\mu-N_0$ или как

(29) $$N_{sm}=N_0(1+q_0)\,\text{макс}\,(H_N^*, N_s)/q_0\mu-N_0.$$

При $m\gg 1$ случайные величины H_N^* и H_s, как отмечалось выше, приближенно независимы. Воспользовавшись аппроксимациями (10), (13), (14) распределений этих случайных величин, получаем приближенные выражения

(30) $$\begin{aligned} d(N_{sm}|N_{s0}, l_0)&\simeq(N_0+N_{s0})(f_1-1),\\ V(N_{sm}|N_{s0}, l_0)&\simeq(N_0+N_{s0})^2(f_2-2f_1+1). \end{aligned}$$

Здесь

$$f_1=\mu^{-1}\int\limits_{\mu/(1+q_0)}^{\infty}[1-F(x)]dx+(1+q_0)^{-1},$$

$$f_2=2\mu^{-2}\int\limits_{\mu/(1+q_0)}^{\infty}x[1-F(x)]dx+(1+q_0)^{-2},$$

$$F(x)=\exp\left\{-\frac{mx^\mu(1+q_0)^\mu}{\Gamma(\mu)}\exp[-x(1+q_0)]\right\}\left[1-\frac{\Gamma(\mu,x)}{\Gamma(\mu)}\right].$$

Точность приближенных формул (30) возрастает с увеличением μ и m. Эти формулы существенно упрощаются, если вероятность аномальной ошибки при оценке частоты пренебрежимо мала. Действительно, в этом случае μ или q_0 или оба эти параметра будут настолько велики, что вероятностью выполнения неравенства $H_N^*>N_s$ можно пренебречь и переписать (29) в виде $N_{sm}\simeq N_0(1+q_0)H_s/q_0\mu-N_0$. При помощи аппроксимации (14) распределения случайной величины H_s находим в рассматриваемом приближении $d(N_{sm}|N_{s0}, l_0)\simeq 0$, $V(N_{sm}|N_{s0}, l_0)\simeq(N_{s0}+N_0)^2/\mu$. Эти формулы совпадают с характеристиками оценки спектральной плотности при априори известной частоте l_0 случайного сигнала.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим стационарный случайный процесс $\lambda(t)$, $t\in[0;\ T]$ с плотностью вероятности

$$W(\lambda)=\lambda^{\nu}\exp(-\lambda)/\Gamma(\nu+1),\ \nu>-1,\ 0\leqslant\lambda<\infty \tag{П.1}$$

и коэффициентом корреляции $R_\lambda(\tau)=\exp(-|\tau|)$. Согласно [12, 13] процесс $\lambda(t)$ является марковским, с коэффициентами сноса и диффузии $a_\lambda=\nu+1-\lambda$, $b_\lambda=2\lambda$. Марковский процесс с такими коэффициентами сноса и диффузии может быть определен как решение стохастического дифференциального уравнения [14] $d\lambda(t)/dt=$ $=\nu+{}^1/_2-\lambda(t)+\sqrt{2\lambda(t)}\,\xi(t)$. Здесь $\xi(t)$ — гауссовый белый шум, для которого $\langle\xi(t)\rangle=0$, $\langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle=\delta(\tau)$. Перейдем к процессу $\chi(t)=\sqrt{2\lambda(t)}$, который может быть получен из решения уравнения

$$\frac{d\chi(t)}{dt}=\frac{\nu+1/2}{\chi(t)}-\frac{\chi(t)}{2}+\xi(t). \tag{П.2}$$

Для марковских процессов, удовлетворяющих стохастическому дифференциальному уравнению вида (П.2), в [14] найдена приближенная формула

$$P[\underset{0<t<T}{\chi(t)}<h]\simeq\exp(-n_0T), \tag{П.3}$$

где

$$\frac{1}{n_0}=2\int\limits_{\chi_0}^{h}\frac{d\chi}{W_{st}(\chi)};\qquad W_{st}(\chi)=\frac{\chi^{2\nu+1}\exp(-\chi^2/2)}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

— стационарная плотность вероятности процесса $\chi(t)$, а χ_0 — значение случайного процесса, лежащее в области максимума $W_{st}(\chi)$. Выбирая $\chi_0=\sqrt{2\nu+1}$, имеем

$$\frac{1}{n_0}=2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)\int\limits_{\sqrt{2\nu+1}}^{h}\frac{\exp(\chi^2/2)}{\chi^{2\nu+1}}d\chi.$$

Удерживая лишь первый член в асимптотическом разложении этого интеграла при $h\gg1$, получаем [15] $n_0\simeq h^{2(\nu+1)}\exp(-h^2/2)/2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)$. Таким образом, при больших h согласно (П.3)

$$P[\underset{0<t<T}{\chi(t)}<h]\simeq\exp\left[-\frac{Th^{2(\nu+1)}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\exp(-h^2/2)\right]. \tag{П.4}$$

Полагая здесь $\nu=0$, приходим к аналогичному результату для релеевского марковского процесса [7]. Как следует из вывода формулы (П.3) в [14], точность приближенной формулы (П.4) растет с увеличением T и h. Поэтому, переходя в (П.4) к процессу $\lambda(t)$ при $T\to\infty$ и $H\to\infty$, получаем

$$P[\underset{0<t<T}{\lambda(t)}<H]\to\exp\left[-\frac{TH^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}\exp(-H)\right].$$

Введем далее в рассмотрение стационарный случайный процесс $\tilde\lambda(t)$ с плотностью вероятности (П.1) и коэффициентом корреляции $\tilde R_\lambda(\tau)$. Потребуем, чтобы при $\tau\to0$ $\tilde R_\lambda(\tau)=1-|\tau|+o(|\tau|)$. По аналогии с [16] назовем процесс $\tilde\lambda(t)$ локально-марковским, поскольку на малых интервалах времени статистические характеристики процессов $\tilde\lambda(t)$ и $\lambda(t)$ асимптотически совпадают. Заметим также, что как реализации процесса $\lambda(t)$, так и реализации процесса $\tilde\lambda(t)$ непрерывны с вероятностью единица.

В работах, посвященных проблеме пересечений [5, 17] и др., неоднократно отмечается, что вероятностные характеристики пересечений высокого уровня определяются лишь локальными свойствами случайного процесса. В частности, асимптотически совпадают вероятностные характеристики превышения достаточно высокого уровня марковским и локально-марковскими процессами. Для случая гауссовых марковского и локально-марковского случайных процессов это совпадение отмечалось в [7]. Действительно, в силу непрерывности реализации марковского и локально-марковского процессов длительность отрезков реализаций этих процессов, превышающих некоторый уровень H, при $H\to\infty$ стремится к нулю. Таким образом, по крайней мере для процессов с непрерывными реализациями вероятность непревышения уровня H, когда $H\to\infty$, определяется лишь локальными свойствами процесса. Об этом также свидетельствуют практически все конкретные результаты по определению вероятностных характеристик пересечений, приведенные в [5, 17] и др. Следовательно, для локально-марковского процесса $\widetilde{\lambda}(t)$ при $T\to\infty$ и $H\to\infty$ можно записать

$$P[\underset{0<t<T}{\widetilde{\lambda}(t)}<H]\to\exp\left[-\frac{TH^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}\exp(-H)\right].$$

Переходя здесь к локально-марковскому процессу с плотностью вероятности (6) и коэффициентом корреляции (5), получаем (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Маршаков, А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1974, 19, 11, 2266.
2. Р. Л. Стратонович, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 7, 1063.
3. П. А. Бакут и др., Вопросы статистической теории радиолокации, под ред. Г. П. Тартаковского, 1, Изд. Советское радио, 1963.
4. Е. И. Куликов, А. П. Трифонов, Оценка параметров сигналов на фоне помех, Изд. Советское радио, 1978.
5. Г. Крамер, М. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, Изд. Мир, 1969.
6. А. П. Трифонов, Изд. АН СССР, Техническая кибернетика, 1978, 4, 146.
7. А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1979, 24, 11, 2226.
8. А. С. Терентьев, Радиотехника и электроника, 1968, 13, 4, 652.
9. T. Kailath, IEEE Trans. Inform. Theory, 1966, IT-12, 4, 442.
10. А. П. Трифонов, Радиотехника и электроника, 1977, 22, 1, 90.
11. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, Проблемы передачи информации, 1975, 11, 3, 31.
12. В. И. Тихонов, Н. К. Кульман, Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов, Изд. Советское радио, 1975.
13. О. В. Сарманов, Труды МИАН СССР, 1961, 60, 238.
14. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, Изд. Советское радио, 1961.
15. Э. Копсон, Асимптотические разложения, Изд. Мир, 1966.
16. I. A. McFadden, J. Roy. Statist. Soc., 1967, B29, 3, 489.
17. Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, Сб. статей, перев. с англ. под ред. Ю. К. Беляева, Изд. Мир, 1978.

Поступила в редакцию
27 II 1979