(60)

(60)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXVI

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

8

МОСКВА · 1981

101

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1981 № 8

УДК 621.391

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИЕМА СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

Трифонов А. П., Галун С. А.

Найдены вероятности ошибок при обнаружении гауссовского случайного импульса с неизвестным временным положением. Получены асимптотические выражения для смещения и рассеяния оценки максимального правдоподобия временного положения. Точность этих формул возрастает с увеличением длительности импульса и априорного интервала определения неизвестного временного положения.

ВВЕДЕНИЕ

Под случайным импульсным сигналом $s(t, \tau_0)$ понимается отрезок реализации шума достаточно большой длительности γ

$$s(t, \tau_0) = I[(t-\tau_0)/\gamma]\xi(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — реализация центрированного стационарного гауссовского случайного процесса с корреляционной функцией $K(\lambda) = \langle\xi(t)\xi(t+\lambda)\rangle$, а $I(\cdot)$ — индикатор единичной длительности. Рассмотрим прием сигнала (1) на фоне белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Полагаем, что неизвестное временное положение τ принимает значения из априорного интервала $[-T_0/2; T_0/2]$. Для обнаружения сигнала $s(t, \tau_0)$ и оценки его временного положения τ_0 используем метод максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем называть приемником максимального правдоподобия [1–4]. Структура подобного приемника описана, например, в [5]. Ниже найдены асимптотически точные (с увеличением длительности сигнала γ и априорного интервала T_0) выражения для характеристик обнаружения случайного сигнала и оценки его временного положения в приемнике максимального правдоподобия.

1. ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ ПРИЕМНИКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть на вход приемника в течение интервала времени $[-T/2; T/2]$ поступает реализация гауссовского случайного процесса $x(t) = n(t)$ или $x(t) = s(t, \tau_0) + n(t)$, причем $s(t, \tau_0)$ и $n(t)$ статистически независимы. Приемник максимального правдоподобия для всех $\tau \in [-T_0/2; T_0/2]$, $T_0 + \gamma < T$ должен вырабатывать логарифм функционала отношения правдоподобия, который с точностью до постоянных слагаемых равен [2, 3, 5]

$$M(\tau) = \iint\limits_{-T/2}^{T/2} x(t_1)x(t_2)\Theta(t_1, t_2, \tau)\,dt_1\,dt_2/2. \tag{2}$$

Здесь функция $\Theta(t_1, t_2, \tau)$ находится из интегрального уравнения [3]

$$\frac{N_0}{2}\Theta(t_1,t_2,\tau)+\int\limits_{-T/2}^{T/2}\Theta(t_1,t,\tau)K_s(t,t_2,\tau)\,dt=\frac{2}{N_0}K_s(t_1,t_2,\tau), \tag{3}$$

где $K_s(t_1, t_2, \tau)=I[(t_1-\tau)/\gamma]I[(t_2-\tau)/\gamma]K(t_1-t_2)$. Будем считать, что длительность случайного импульса (1) значительно больше времени корреляции процесса $\xi(t)$, т. е.

$$\mu\gg1,\ \ \mu=\gamma\Delta f_E/2,\ \ \Delta f_E=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K^2(\omega)\,d\omega/[2\pi\,\text{макс}\,K^2(\omega)], \tag{4}$$

$K(\omega)$ — спектр мощности процесса $\xi(t)$. Тогда решение уравнения (3) можно представить в виде [3, 5]

$$\Theta(t_1, t_2, \tau)=I[(t_1-\tau)/\gamma]I[(t_2-\tau)/\gamma]\Theta_0(t_1-t_2), \tag{5}$$

где

$$\Theta_0(t_1-t_2)=\frac{q}{\pi N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\omega)\exp[j\omega(t_1-t_2)]\,d\omega}{1+q\rho(\omega)}. \tag{6}$$

Здесь $q=\text{макс}\,2K(\omega)/N_0$ — величина, характеризующая отношение средней мощности сигнала (1) к средней мощности белого шума в полосе частот сигнала, а $\rho(\omega)=2K(\omega)/qN_0$.

При наличии полезного сигнала (1) на входе приемника $M(\tau)$ (2) можно представить как сумму сигнальной и шумовой функций [2]. Вводя безразмерный параметр $l=\tau/\gamma$ и опуская всюду далее несущественное постоянное слагаемое

$$c=\frac{q\gamma}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\omega)}{1+q\rho(\omega)}\,d\omega,$$

получаем

$$M(l)=S_1(l)+N_1(l),\quad l\in[-m/2;\ m/2], \tag{7}$$

где $m=T_0/\gamma$, $S_1(l)=\langle M(l)\rangle$, $N_1(l)=M(l)-\langle M(l)\rangle$. Сигнальную функцию $S_1(l)$ запишем следующим образом:

$$\begin{gathered} S_1(l)=A_sS(l_0, l),\\ A_s=\text{макс}\,S_1(l)=\gamma q^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)[1+q\rho(\omega)]^{-1}\,d\omega/4\pi. \end{gathered} \tag{8}$$

Причем, когда $|l-l_0|>1$, $S(l_0, l)=0$, а при $|l-l_0|\to0$

$$S(l_0, l)=1-|l-l_0|+o(|l-l_0|). \tag{9}$$

В соответствии с (7) $\langle N_1(l)\rangle=0$ и, если $\delta l=\text{макс}\{|l_1-l_2|,\ |l_1-l_0|,\ |l_2-l_0|\}<$ <1, то

$$\langle N_1(l_1)N_1(l_2)\rangle=\sigma_{NS}^2R_{NS}(l_1, l_2),\ \ \sigma_{NS}^2=\gamma q^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)\,d\omega/4\pi. \tag{10}$$

Здесь $R_{NS}(l_1, l_2)$ при $\delta l \to 0$ допускает представление

$$(11)\qquad R_{NS}(l_1, l_2)= \\ =\begin{cases} 1-|l_1-l_2|-g \text{ мин } (|l_1-l_0|, |l_2-l_0|)+o(\delta l), & (l_1-l_0)(l_2-l_0)\geqslant 0, \\ 1-|l_1-l_2|+o(\delta l), & (l_1-l_0)(l_2-l_0)\leqslant 0; \end{cases}$$

$$g=q\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^3(\omega)[3+2q\rho(\omega)][1+q\rho(\omega)]^{-2}d\omega \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)\,d\omega.$$

Когда $|l_1-l_2|<1$ и макс $\{|l_1-l_0|, |l_2-l_0|\}\geqslant 1$,

$$(12)\qquad \langle N_1(l_1)N_1(l_2)\rangle=\sigma_{N0}^2 R_{N0}(l_1-l_2),$$

$$\sigma_{N0}^2=\gamma q^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)[1+q\rho(\omega)]^{-2}\,d\omega/4\pi,$$

а $R_{N0}(l_1-l_2)$ при $|l_1-l_2|\to 0$ имеет вид

$$(13)\qquad R_{N0}(l_1-l_2)=1-|l_1-l_2|+o(|l_1-l_2|).$$

Наконец, если $|l_1-l_2|\geqslant 1$, макс $\{|l_1-l_0|, |l_2-l_0|\}\geqslant 1$, то $\langle N_1(l_1)N_1(l_2)\rangle=$ $=0$.

При отсутствии полезного сигнала (1) на входе приемника для (2) выполняются соотношения

$$(14)\qquad \begin{aligned} &\langle M(l)\rangle=0, \\ &\langle M(l_1)M(l_2)\rangle=\sigma_{N0}^2 R_{N0}(l_1-l_2), \quad |l_1-l_2|<1, \\ &\langle M(l_1)M(l_2)\rangle=0, \quad |l_1-l_2|\geqslant 1. \end{aligned}$$

Здесь σ_{N0}^2, $R_{N0}(l_1-l_2)$ определяются из (12), (13) соответственно. При этом, хотя в силу (9), (11), (13) реализации $M(l)$ (2) недифференцируемы, они тем не менее непрерывны с вероятностью 1. Последнее утверждение нетрудно доказать, воспользовавшись, например, результатами [6].

Отметим также, что из [3, 7] следует асимптотически гауссовский характер случайных функций $M(\tau)$, $M(l)$ и $N_1(l)$ при $\mu\to\infty$.

2. ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Приемник максимального правдоподобия выносит решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t, \tau_0)$ на основе сравнения абсолютного максимума $M(\tau)$ (2) при $\tau\in[-T_0/2; T_0/2]$ с порогом h. Соответственно вероятности ошибок I рода (ложной тревоги) α и ошибок II рода (пропуска сигнала) β можно записать как $\alpha=P[H_N>h]$ и $\beta=P[H_{SN}<h]$. Здесь H_N и H_{SN} — величины абсолютных максимумов $M(l)$, $l\in[-m/2; m/2]$ в отсутствие и при наличии сигнала (1) в принятой реализации $x(t)$. Обозначая l_m — положение абсолютного максимума $M(l)$, для вероятности ложной тревоги имеем

$$(15)\qquad \alpha=P[M(l_m)/\sigma_{N0}>u]=1-F_N(u),$$

где $F_N(\cdot)$ — функция распределения величины абсолютного максимума $M(l)/\sigma_{N0}$ в отсутствие сигнала (1); $u=h/\sigma_{N0}$ — нормированный порог. Точное выражение для $F_N(H)$ неизвестно. Однако при $\mu\to\infty$ функция $M(l)/\sigma_{N0}$ является реализацией асимптотически гауссовского стационарного случайного процесса, коэффициент корреляции которого $R_{N0}(l_1-l_2)$ (14) при $|l_1-l_2|\to 0$ удовлетворяет условию (13). Поэтому можем использовать найденную в [4] аппроксимацию распределения $F_N(H)$

$$F_N(H)\simeq\begin{cases}\exp[-(mH/\sqrt{2\pi})\exp(-H^2/2)], & H\geqslant 1,\\ 0, & H<1,\end{cases}\tag{16}$$

точность которой возрастает с увеличением μ, m и H. Согласно (15), (16), приближенное выражение для вероятности ложной тревоги принимает вид

$$\alpha\simeq\begin{cases}1-\exp[-(mu/\sqrt{2\pi})\exp(-u^2/2)], & u\geqslant 1,\\ 1, & u<1.\end{cases}\tag{17}$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением μ, m и u.

Предполагая, что полезный сигнал (1) присутствует на входе приемника, определим вероятность пропуска сигнала β. Обозначим: H_s – величина абсолютного максимума $M(l)$ (7) при $|l-l_0|<1$, а $H_N{}^*$ – величина абсолютного максимума $M(l)$ (7) при $-m/2\leqslant l\leqslant l_0-1$, $l_0+1\leqslant l\leqslant m/2$. В соответствии с (12), (13) интервал корреляции случайного процесса $N_1(l)$ (7) равен единице, и, кроме того, при $\mu\to\infty$ процесс $N_1(l)$ является асимптотически гауссовским. Следовательно, аналогично [4] можно показать, что случайные величины $H_N{}^*$ и H_s приближенно статистически независимы, если $m\gg 1$ и $\mu\gg 1$. Так что вероятность пропуска сигнала может быть записана как

$$\beta\simeq P[H_N{}^*<h]P[H_s<h]=F_N{}^*(u)F_s(u/\varkappa).\tag{18}$$

Здесь $F_N{}^*(\cdot)$ и $F_s(\cdot)$ – функции распределения величин абсолютных максимумов процессов $M(l)/\sigma_{N0}$ при $-m/2\leqslant l\leqslant l_0-1$, $l_0+1\leqslant l\leqslant m/2$ и $M(l)/\sigma_{NS}$ при $|l-l_0|<1$ соответственно, а $\varkappa\equiv\sigma_{NS}/\sigma_{N0}$. Когда $m\gg 1$,

$$F_N{}^*(u)\simeq F_N(u),\tag{19}$$

где $F_N(\cdot)$ определяется формулой (16).

При наличии сигнала (1) на входе приемника $H_s=M(l_m)$, причем здесь $|l_m-l_0|<1$. В соответствии с (9), (10) функция $S_1(l)$ достигает максимума при $l=l_0$, а реализации шумовой функции $N_1(l)$ непрерывны с вероятностью 1. Следовательно, при больших μ и $q>0$ достаточно исследовать поведение абсолютного максимума H_s в малой окрестности точки l_0. С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$\Delta(l)=[M(l)-M(\lambda)]/\sigma_{NS},\quad l,\lambda\in[l_0-1;\ l_0+1].\tag{20}$$

Учитывая, что при $\mu\to\infty$ процесс $\Delta(l)$ является асимптотически гауссовским, найдем его функцию корреляции $K_\Delta(l_1,\ l_2)$. Обозначая $\delta=$ $=$макс $\{|l_i-l_0|,\ |l_i-\lambda|,\ i=1,2\}$ и используя формулы (10), (11), получаем, что при $\delta\to 0$

$$K_\Delta(l_1,\ l_2)=(2-g)\,\text{мин}(|\lambda-l_1|,\ |\lambda-l_2|)+o(\delta),\tag{21}$$

когда $(\lambda-l_1)(\lambda-l_2)\geqslant 0$, и $K_\Delta(l_1,\ l_2)=o(\delta)$, когда $(\lambda-l_1)(\lambda-l_2)\leqslant 0$. Таким образом, если $\mu\gg 1$, то отрезки реализаций процесса (20) на интервалах $[\lambda-\delta;\ \lambda)$ и $[\lambda;\ \lambda+\delta]$ приближенно независимы. Возвращаясь к распределению $F_s(\cdot)$, можем теперь записать

$$F_s(h)\simeq P[\underset{l_0-\delta\leqslant l\leqslant l_0+\delta}{M(l)}<h]=P[\underset{l_0-\delta\leqslant l\leqslant l_0+\delta}{\Delta_0(l)}<v-m_0].\tag{22}$$

Здесь $\Delta_0(l)=\Delta(l)$ при $\lambda=l_0$, $m_0=M(l_0)/\sigma_{NS}$, $v=h/\sigma_{NS}$, а δ фиксировано и выбрано настолько малым, чтобы в (9), (21) можно было учитывать лишь главные члены асимптотики.

Используя свойства функции $\Delta(l)$ (20), преобразуем (22) следующим образом:

$$F_s(h)=P\underset{l_0-\delta\leqslant l\leqslant l_0}{[\Delta_0(l)<v-m_0]}P\underset{l_0\leqslant l\leqslant l_0+\delta}{[\Delta_0(l)<v-m_0]}=\int\limits_{-\infty}^{v}F_1(v-x)F_2(v-x)W_0(x)\,dx, \tag{23}$$

где обозначено

$$F_1(x)=P\underset{l_0-\delta\leqslant l\leqslant l_0}{[\Delta_0(l)<x]},\quad F_2(x)=P\underset{l_0\leqslant l\leqslant l_0+\delta}{[\Delta_0(l)<x]}, \tag{24}$$

а $W_0(x)$ — плотность вероятности случайной величины m_0. При этом, когда $\mu\gg1$ [3],

$$W_0(x)=\exp[-(x-z)^2/2]/\sqrt{2\pi}, \tag{25}$$

$$z=A_s/\sigma_{NS}=q\sqrt{\gamma/4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)\,[1+q\rho(\omega)]^{-1}d\omega\Bigg/\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)\,d\omega\right)^{1/2} \tag{26}$$

— отношение сигнал/шум [2]. Для отношения сигнал/шум (26) нетрудно установить простые верхнюю и нижнюю границы

$$\sqrt{\mu}q/(1+q)\leqslant z\leqslant\sqrt{\mu}q. \tag{27}$$

Следовательно, $z\to\infty$, когда $\mu\to\infty$ и $q>0$.

Найдем далее распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (24). Воспользовавшись теоремой Дуба [8], получаем, что при $\mu\to\infty$ процесс (20) является асимптотически марковским в малой окрестности точки l_0 с коэффициентами сноса и диффузии

$$a(l)=z\begin{cases}1, & l<l_0,\\ -1, & l>l_0;\end{cases}\quad b=2-g. \tag{28}$$

Поэтому распределения (24) можно найти из решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова [9] с коэффициентами (28) при соответствующих начальных и граничных условиях [10, 11]. Получаем

$$F_1(x)=F_2(x)=\Phi\left(\frac{z\delta+x}{\sqrt{b\delta}}\right)-\exp\left(-\frac{2zx}{b}\right)\Phi\left(\frac{z\delta-x}{\sqrt{b\delta}}\right) \tag{29}$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [7]. Подставляя (25), (29) в (23) и учитывая, что при $\mu\to\infty$ и $q>0$, в соответствии с (27), $z\to\infty$, находим

$$\begin{aligned}F_s(h)\simeq\Phi\left(\frac{u}{\varkappa}-z\right)-2\exp\left[\frac{\psi^2z^2}{2}+\psi z\left(z-\frac{u}{\varkappa}\right)\right]\Phi\left[\frac{u}{\varkappa}-(\psi+1)z\right]+\\+\exp\left[2\psi^2z^2+2\psi z\left(z-\frac{u}{\varkappa}\right)\right]\Phi\left[\frac{u}{\varkappa}-(2\psi+1)z\right],\end{aligned} \tag{30}$$

$$\psi=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)\,d\omega\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho^2(\omega)[2+q\rho(\omega)]}{[1+q\rho(\omega)]^2}\,d\omega\right\}^{-1}=\frac{2\varkappa^2q\sqrt{\mu}}{z\varkappa^2+q\sqrt{\mu}}$$

$$\varkappa=\sigma_{NS}/\sigma_{N0}=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)\,d\omega\Big/\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)[1+q\rho(\omega)]^{-2}d\omega\right\}^{1/2},$$

причем $1\leqslant\varkappa\leqslant1+q$.

Таким образом, согласно (18), (19), (30), приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала имеет вид

$$\beta\simeq\exp\left[-\frac{mu}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right]\left\{\Phi\left(\frac{u}{\varkappa}-z\right)-2\exp\left[\frac{\psi^2z^2}{2}+\right.\right.$$
$$\left.+\psi z\left(z-\frac{u}{\varkappa}\right)\right]\Phi\left[\frac{u}{\varkappa}-(\psi+1)z\right]+$$
$$\left.+\exp\left[2\psi^2z^2+2\psi z\left(z-\frac{u}{\varkappa}\right)\right]\Phi\left[\frac{u}{\varkappa}-(2\psi+1)z\right]\right\},\tag{31}$$

когда $u\geqslant1$, и $\beta\simeq0$, когда $u<1$. Точность этого приближенного выражения возрастает с увеличением u, m и μ.

При анализе обнаружения сигнала (1) в приемнике максимального правдоподобия приближенные значения вероятностей ошибок можно найти, предполагая, что неизвестное временное положение принимает одно из m дискретных значений [3]. Этот подход, основанный на несколько искусственном сведении аналоговой системы к дискретной, дает следующие приближенные выражения для вероятностей ошибок:

$$\alpha_m\simeq1-(1-\alpha_0)^m,\qquad\beta_m\simeq(1-\alpha_0)^{m-1}\beta_0.\tag{32}$$

Здесь [3]

$$\alpha_0=1-\Phi(u),\quad\beta_0=\Phi\left(\frac{u}{\varkappa}-z\right)$$

— вероятности ошибок при обнаружении сигнала (1) с априори известным временным положением τ_0 и $\mu\gg1$. Сравнивая (32) и (17) при $u\gg1$, получаем $\alpha/\alpha_m\simeq u^2$. Следовательно, для больших u (малых α) расчет вероятности ложной тревоги по приближенной формуле (32) приводит к существенно заниженным значениям α. Сравнение результатов численных расчетов вероятности пропуска сигнала (1) по формулам (32) и (31) показывает, что расчет β по формуле (32) приводит к значению вероятности пропуска, завышенному приблизительно в 2 раза по сравнению с (31). При этом точность формул (17), (31) растет с увеличением u, m и μ, в то время как поведение погрешности приближенных формул (32) неизвестно.

3. ОЦЕНКА ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Рассмотрим характеристики приемника максимального правдоподобия, когда производится оценка неизвестного временного положения τ_0 импульсного случайного сигнала (1). При этом предполагается, что сигнал $s(t,\tau_0)$ присутствует на входе приемника с вероятностью 1. В качестве оценки безразмерного временного положения $l_0\equiv\tau_0/\gamma$ принимают положение l_m абсолютного максимума $M(l)$ (7) при $l\in[-m/2; m/2]$. Согласно [2], при $m\gg1$ условное смещение оценки будет равно $d(l_m|l_0)=\langle l_m-l_0\rangle\simeq\simeq P_0d_0-(1-P_0)l_0$, а условное рассеяние (средний квадрат ошибки) запишется так: $V(l_m|l_0)=\langle(l_m-l_0)^2\rangle\simeq P_0\sigma_0^2+(1-P_0)(m^2/12+l_0^2)$. Здесь усреднение выполняется по реализациям помехи $n(t)$ и сигнала $s(t, \tau_0)$ при фиксированном значении $l_0=\tau_0/\gamma$; P_0 – вероятность надежной оценки, а d_0 и σ_0^2 обозначают соответственно условные смещение и рассеяние надежной оценки. Под надежной оценкой [2] понимается оценка, найденная в предположении $|l_m-l_0|<1$.

В соответствии с определением [2], вероятность надежной оценки $P_0=P[H_s>H_N^*]$. Так как при $m\gg1$ и $\mu\gg1$ случайные величины H_s и H_N^* приближенно независимы, имеем

$$P_0\simeq\int F_N^*(H)\,dF_s(H/\varkappa), \tag{33}$$

где $F_N^*(\cdot)$ и $F_s(\cdot)$ – распределения случайных величин H_N^*/σ_{N0} и H_s/σ_{Ns} соответственно.

Аналогично [2] при больших значениях μ (или z) для приближенного вычисления P_0 будем использовать аппроксимации подынтегральных функций, асимптотически точные, когда $\mu\to\infty$ и $H\to\infty$. Такие аппроксимации найдены ранее в форме (19), (30). Подставляя их в (33), получаем

$$\begin{aligned}P_0\simeq{}&\frac{2\psi z}{\varkappa}\exp\left(\frac{\psi^2z^2}{2}+\psi z^2\right)\int_1^\infty\exp\left[-\frac{mx}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]\times\\&\times\left\{\exp\left(-\frac{\psi zx}{\varkappa}\right)\Phi\left[\frac{x}{\varkappa}-(\psi+1)z\right]-\right.\\&\left.-\exp\left[\frac{3\psi^2z^2}{2}+\psi z\left(z-\frac{2x}{\varkappa}\right)\right]\Phi\left[\frac{x}{\varkappa}-(2\psi+1)z\right]\right\}dx,\end{aligned}\tag{34}$$

причем точность этой формулы возрастает с увеличением m и μ.

Формула (34) довольно громоздка и расчет по ней возможен только численными методами. Однако из (34) можно получить упрощенное выражение для вероятности аномальной ошибки $P_a=1-P_0$, справедливое при весьма больших отношениях сигнал/шум

$$P_a\simeq\frac{zm\varkappa\psi^2\exp[-z^2\varkappa^2/2(1+\varkappa^2)]}{\varkappa^4(2\psi^2+3\psi+1)+\varkappa^2\psi(4\psi+3)+2\psi^2}\sqrt{\frac{2(1+\varkappa^2)}{\pi}}.$$

Найдем далее характеристики надежной оценки l_m, $|l_m-l_0|<1$. Как известно [2, 4, 7], при больших отношениях сигнал/шум z характеристики оценки максимального правдоподобия определяются поведением логарифма функционала отношения правдоподобия в малой окрестности истинного значения оцениваемого параметра l_0. Поэтому при $z\to\infty$, что всегда имеет место, когда $q>0$ и $\mu\to\infty$ (27), достаточно исследовать, при помощи функции (20), поведение $M(l)$ (7) в малой окрестности l_0. Положение абсолютного максимума функции (20) совпадает с надежной оценкой неизвестного безразмерного временного положения. Следовательно, распределение оценки запишется так

$$F_m(\lambda)=P[l_m<\lambda]=P[\max_{l<\lambda}\Delta(l)>\max_{\lambda\leqslant l}\Delta(l)].$$

Из этого выражения следует, что распределение оценки можно выразить через двумерное распределение абсолютных максимумов функции (20).

$$F(u,v,\lambda)=P[\underset{l<\lambda}{\text{макс}}\,\Delta(l)<u,\ \underset{\lambda\leqslant l}{\text{макс}}\,\Delta(l)<v].$$

Причем при больших μ

$$F(u,v,\lambda)\simeq P[\underset{[\lambda-\delta;\ \lambda)}{\text{макс}}\,\Delta(l)<u]P[\underset{[\lambda;\ \lambda+\delta]}{\text{макс}}\,\Delta(l)<v]=F_{1\lambda}(u)F_{2\lambda}(v),$$

а распределение надежной оценки принимает вид [10]

$$F_m(\lambda)\simeq\int_0^\infty F_{2\lambda}(u)\,dF_{1\lambda}(u). \tag{35}$$

Так как при $\mu\to\infty$ процесс (20) является асимптотически марковским в малой окрестности точки l_0, то приближенные выражения для распределений $F_{1\lambda}(u)$ и $F_{2\lambda}(v)$ (35) можно найти из решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова [9] с коэффициентами (28) при соответствующих начальных и граничных условиях, как это сделано в [10, 11]. Получив таким путем приближенное выражение для распределения оценки (35), аналогично [10, 11], находим асимптотические ($\mu\to\infty$, $q>0$) значения смещения и дисперсии надежной оценки

$$d_0\simeq 0,\ \sigma_0^2\simeq 13(2-g)^2/8z^4. \tag{36}$$

Подставляя (26) в (36), дисперсию надежной оценки запишем в виде

$$\sigma_0^2\simeq\frac{26\pi^2}{q^4\gamma^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho^2(\omega)[2+q\rho(\omega)]}{[1+q\rho(\omega)]^2}\,d\omega\right\}^2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho^2(\omega)}{1+q\rho(\omega)}\,d\omega\right\}^{-4}. \tag{37}$$

Отметим, что при $q\to\infty$ (т. е. в отсутствие белого шума) $\sigma_0^2\to 0$. Таким образом, в отсутствие белого шума оценка максимального правдоподобия временного положения случайного импульса (1) является сингулярной. Действительно, полагая в (6) $q\to\infty$, получаем $\Theta_0(t_1-t_2)=(2/N_0)\delta(t_1-t_2)$. Подставляя эту функцию в (2), находим, что при $q\to\infty$ вне зависимости от конкретного вида реализации $\xi(t)$ оценка максимального правдоподобия совпадает с истинным значением τ_0. Для этого достаточно, чтобы $\xi(t)$ обращалось в нуль только в счетном множестве точек из интервала $[\tau_0-\gamma/2;\ \tau_0+\gamma/2]$. Нетрудно убедиться [6], что для рассматриваемого случайного сигнала это требование выполняется. Заметим, что аналогичный результат получен в [12] для оценки разности хода случайных сигналов.

Формула (37) значительно упрощается в двух крайних случаях: $q\ll 1$ и $q\gg 1$. В случае, когда $q\ll 1$, но $q^2\mu\gg 1$ (что обеспечивает высокую апостериорную точность оценки), дисперсия надежной оценки

$$\sigma_0^2\simeq 13/(2q^4\mu^2). \tag{38}$$

Из формулы (38) следует, что при слабом ($q\ll 1$) полезном сигнале (1) дисперсия надежной оценки временного положения не зависит от формы корреляционной функции $K(\tau)$ процесса $\xi(t)$, а определяется лишь его эквивалентной полосой частот Δf_E. С другой стороны, для сильного ($q\gg 1$) полезного сигнала (1) справедливо выражение

$$\sigma_0^2\simeq\frac{26\pi^2}{q^2\gamma^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\omega)\,d\omega\right)^{-2}. \tag{39}$$

Конкретизируем полученные выражения для случая приема экспоненциально коррелированного узкополосного случайного импульса с функцией корреляции $K(\tau)=\sigma^2\exp(-\alpha|\tau|)\cos\omega_0\tau$. В этом случае $q=2\sigma^2\alpha/N_0$, $\Delta f_\text{э}=\alpha/2$ и $\rho(\omega)=\alpha^2\{[\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2]^{-1}+[\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2]^{-1}\}$. Так что $\varkappa=(1+q)^{3/4}$, $z=2\sqrt{\mu}[1-1/\sqrt{1+q}]$, что, очевидно, согласуется с (27). Выражение (37) для дисперсии надежной оценки принимает вид

$$\sigma_0^2\simeq\frac{13}{32\mu^2q^2}[1-(1+q/2)/(1+q)^{3/2}]^2[1-1/(1+q)^{1/2}]^{-4}. \tag{40}$$

Здесь $\mu=\gamma\alpha/4$. В случае сильного сигнала ($q\gg1$) из (39), (40) получаем

$$\sigma_0^2\simeq13/(32\mu^2q^2).$$

Если в формулах (37)—(40) перейти к исходному ненормированному параметру τ, то нетрудно заметить, что, как и при приеме детерминированного радиоимпульса с прямоугольной огибающей [10], дисперсия надежной оценки временного положения случайного импульса (1) не зависит от его длительности γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маршаков В. К., Трифонов А. П.* Теоретическое и экспериментальное исследования приемника максимального правдоподобия.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 11, с. 2266.
2. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Советское радио, 1978.
3. *Бакут П. А., Большаков И. А., Герасимов Б. М. и др.* Вопросы статистической теории радиолокации, т. I. Под ред. Г. П. Тартаковского. М.: Советское радио, 1963.
4. *Трифонов А. П.* Прием разрывного квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовской помехи.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1978, № 4, с. 146.
5. *Бекетов С. В., Потапов А. В.* Измерение времени прихода случайных импульсных сигналов.— Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 6, с. 1108.
6. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы, М.: Мир, 1969.
7. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М.: Советское радио, 1966.
8. *Kailath T.* Some integral equations with nonrational kernels.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1966, v. IT-12, N 4, p. 442—447.
9. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977.
10. *Терентьев А. С.* Распределение вероятности временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра.— Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 4, с. 652.
11. *Трифонов А. П.* Прием сигнала с неизвестной длительностью на фоне белого шума.— Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 1, с. 90.
12. *Черняк В. С.* Об использовании информационной матрицы Фишера для анализа потенциальной точности оценок максимального правдоподобия при наличии мешающих параметров.— Радиотехника и электроника, 1971, т. 16, № 6, с. 956.

Поступила в редакцию
29.X.1979