62

62

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# РАДИОТЕХНИКА
# И
# ЭЛЕКТРОНИКА

ТОМ XXVI

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

12

МОСКВА · 1981

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1981 № 12

УДК 621.391:510.53

# ЭФФЕКТИВНОСТЬ АЛГОРИТМА ОДНОВРЕМЕННОГО РАЗЛИЧЕНИЯ ДВУХ СИГНАЛОВ И ОЦЕНКИ ИХ ПАРАМЕТРОВ

*Трифонов А. П., Маршаков В. К., Трифонов В. П.*

Получена предельная форма оптимального алгоритма одновременного различения двух сигналов и оценки их неизвестных параметров. Найдены характеристики асимптотически оптимальных алгоритмов для сигналов с неизвестными амплитудами и ортогональных сигналов с неизвестными неэнергетическими параметрами.

## ВВЕДЕНИЕ

Разработка многих информационных систем приводит к необходимости решения задач совместного различения сигналов и оценки их неизвестных параметров. К таким системам, например, относятся системы радиолокационного обнаружения объектов и измерения их координат, системы различения видов передаваемых сигналов и извлечения информации, заключенной в их параметрах и т. д. [1]. Исследованию подобного рода систем посвящены работы [1—4], однако в них, как правило, анализируются оптимальные (байесовские) алгоритмы одновременного различения-оценки. В то же время практическое использование байесовских алгоритмов приема сигналов с неизвестными параметрами наталкивается на существенные трудности. К ним, в частности, относятся: априорная недостаточность, произвольность выбора потерь, сложности теоретического анализа и технической реализации [1—4]. В связи с этим определенный интерес представляет рассмотрение асимптотического поведения байесовского оператора различения-оценки при неограниченном увеличении отношения сигнал/шум. Получаемая при этом предельная форма байесовского оператора оказывается инвариантной к весьма широкому классу априорных распределений и функций потерь, что позволяет значительно расширить область практического применения байесовских систем. Кроме того, оказывается возможным определение характеристик предельной формы байесовского оператора.

## 1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть принятая на интервале $[0, T]$ реализация $x(t)$ с вероятностью $p_1$ является смесью шума $n(t)$ и сигнала $s_1(t, l_{01})$ и с вероятностью $p_2$ — смесью шума и сигнала $s_2(t, l_{02})$. Будем считать, что различаемые сигналы $s_j(t, l_{0j})$, $j=1, 2$, представляют собой известные функции времени $t$ и неизвестных параметров $l_j \in L_j$. Используя общие соотношения, полученные в [2, 3], байесовский алгоритм совместного различения-оценки в данном случае можно записать в виде: принимается решение о наличии 1-го сигнала, если

$$\Lambda > \Lambda_m, \tag{1}$$

и принимается решение о наличии 2-го сигнала, если $\Lambda < \Lambda_m$. Байесовская оценка неизвестных параметров при этом имеет вид

(2) $$\gamma_m=\begin{cases}\gamma_{m1}, & \Lambda>\Lambda_m.\\ \gamma_{m2}, & \Lambda<\Lambda_m.\end{cases}$$

Здесь $\Lambda=\Lambda_1/\Lambda_2$,

(3) $$\Lambda_j=\int\limits_{L_j}\Lambda_j(l_j)W_{jpr}(l_j)\,dl_j,\quad j=1,2,$$

— усредненный функционал отношения правдоподобия (ФОП), $\Lambda_j(l_j)$ — ФОП для сигнала $s_j(t,l_j)$, $W_{jpr}(l_j)$ — априорная плотность вероятности параметров $l_j$ сигнала $s_j(t,l_j)$, а порог

(4) $$\Lambda_m=\frac{p_2\int\limits_{L_2}[C_{12}(\gamma_{m1},l_2)-C_{22}(\gamma_{m2},l_2)]W_{2ps}(l_2)\,dl_2}{p_1\int\limits_{L_1}[C_{21}(\gamma_{m2},l_1)-C_{11}(\gamma_{m1},l_1)]W_{1ps}(l_1)\,dl_1}.$$

Величины $\gamma_{mj}$ определяются из условия минимума выражений

(5) $$A_j(\gamma_j)=p_1\Lambda_1\int\limits_{L_1}C_{j1}(\gamma_j,l_1)W_{1ps}(l_1)\,dl_1+$$
$$+p_2\Lambda_2\int\limits_{L_2}C_{j2}(\gamma_j,l_2)W_{2ps}(l_2)\,dl_2,$$

где $C_{ji}(\gamma_j,l_i)$ — потери при выборе решения о наличии $j$-го сигнала и оценке $\gamma_j$, когда присутствует $i$-й сигнал с параметрами $l_i$, а $W_{jps}(l_j)$ — апостериорная плотность вероятности параметров $j$-го сигнала.

Для получения предельной формы байесовского оператора одновременного различения-оценки перепишем байесовский алгоритм (1) в виде: принимается решение о наличии 1-го сигнала, если

(6) $$M_1-M_2>M_m$$

и принимается решение о наличии 2-го сигнала, если $M_1-M_2<M_m$. Здесь $M_j=\ln\Lambda_j$, $M_m=\ln\Lambda_m$. Кроме того, сделаем несколько ограничивающих предположений. Будем считать, что априорные плотности вероятности $W_{jpr}(l_j)$, $j=1$, 2, непрерывны и $W_{jpr}(l_j)>0$ при $l_j\in L_j$; все функции потерь $C_{ji}(\gamma_j,l_i)$ ограничены и непрерывны по $l_i$, а функции потерь $C_{ii}(\gamma_i,l_i)$ достигают минимума при $\gamma_i=l_i$. Положим также, что $p_j<1$, потери неотрицательны и при неправильных решениях больше, чем потери при правильных решениях, т. е.

$$C_{12}(\gamma_1,l_2)>C_{22}(\gamma_2,l_2)\geqslant0,\qquad C_{21}(\gamma_2,l_1)>C_{11}(\gamma_1,l_1)\geqslant0.$$

## 2. СИГНАЛЫ С НЕИЗВЕСТНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Представим наблюдаемые данные в виде $x(t)=l_{0j}s_{0j}(t)+n(t)$, где $n(t)$ — реализация гауссовского случайного процесса с нулевым средним значением и функцией корреляции $K(\tau)$, $l_{0j}s_{0j}(t)$ — различаемые сигналы, неизвестные амплитудные множители $l_{0j}$ которых могут менять знак, т. е. неизвестны не только энергии различаемых сигналов, но и их полярности. ФОП параметра $l_i$ при этом можно записать как [5]

(7) $$\Lambda_j(l_j)=\exp[z_{0j}^2(\hat{l}_jl_j-l_j^2/2)=\exp[\hat{l}_j^2z_{0j}^2/2-z_{0j}^2(l_j-\hat{l}_j)^2/2].$$

постоянные априорные

Здесь $\hat{l}_j=\int\limits_0^T x(t)\,V_j(t)\,dt/z_{0j}^2$, $z_{0j}^2=\int\limits_0^T s_{0j}(t)\,V_j(t)\,dt$— отношение сигнал / шум для $j$-го сигнала единичной амплитуды, $V_j(t)$ — решение интегрального уравнения $\int\limits_0^T K(t-\tau)\,V_j(\tau)\,d\tau=s_{0j}(t)$. Подставляя (7) в (3) и (4), аналогично [6], можно показать, что при сформулированных ранее достаточно общих ограничениях $M_j=\hat{l}_j^2 z_{0j}^2/2+o(z_{0j})$, $M_m=o(z_{0j})$, когда $z_{0j}\to\infty$ и $z_{01}/z_{02}=O(1)$. Следовательно, асимптотически оптимальным правилом различения является: принимается решение о наличии 1-го сигнала, если

$$\hat{l}_1^2 z_{01}^2>\hat{l}_2^2 z_{02}^2, \tag{8}$$

и принимается решение о наличии 2-го сигнала, если $\hat{l}_1^2 z_{01}^2<\hat{l}_2^2 z_{02}^2$.

Найдем теперь предельную форму байесовской оценки $\gamma_m$. Пусть, например, выполняется (8), тогда $\gamma_m=\gamma_{m1}$, а $\gamma_{m1}$ определяется из условия минимума выражения (5), где $j=1$. Учитывая, что при $z_{0j}\to\infty$ и выполнении (8) $\Lambda\to\infty$, аналогично [6], можно получить

$$A_1(\gamma_1)/p_1\Lambda_1\to C_{11}(\gamma_1,\hat{l}_1). \tag{9}$$

Так как функция потерь $C_{11}(\gamma,l)$ достигает минимума при $\gamma=l$, то минимизируя (9) по $\gamma_1$, получаем, что $\gamma_{m1}=\hat{l}_1$, когда выполняется (8). Исследуя (5) при $j=2$, $z_{0j}\to\infty$ и $\hat{l}_1^2 z_{01}^2<\hat{l}_2^2 z_{02}^2$, находим предельное значение байесовской оценки

$$\gamma_m=\begin{cases}\hat{l}_1, & \hat{l}_1^2 z_{01}^2>\hat{l}_2^2 z_{02}^2,\\ \hat{l}_2, & \hat{l}_1^2 z_{01}^2<\hat{l}_2^2 z_{02}^2.\end{cases} \tag{10}$$

Определим характеристики предельной формы байесовского алгоритма различения-оценки. Хотя естественной характеристикой байесовского алгоритма является соответствующий байесовский риск, в прикладных задачах удобнее оперировать с такими характеристиками, как средняя вероятность ошибки различения

$$P_e=p_1P(2/1)+p_2P(1/2), \tag{11}$$

смещение оценки (систематическая ошибка)

$$d=p_1\{\langle(\hat{l}_1-l_{01})\rangle P(1/1)+\langle(\hat{l}_2-l_{01})\rangle P(2/1)\}+ +p_2\{\langle(\hat{l}_2-l_{02})\rangle P(2/2)+\langle(\hat{l}_1-l_{02})\rangle P(1/2)\} \tag{12}$$

и ее рассеяние (средний квадрат ошибки)

$$V=p_1\{\langle(\hat{l}_1-l_{01})^2\rangle P(1/1)+\langle(\hat{l}_2-l_{01})^2\rangle P(2/1)\}+ +p_2\{\langle(\hat{l}_2-l_{02})^2\rangle P(2/2)+\langle(\hat{l}_1-l_{02})^2\rangle P(1/2)\}. \tag{13}$$

Здесь $P(i/j)$, $i$, $j=1$, $2$,— вероятность принятия решения о наличии $i$-го сигнала, в то время, когда присутствует $j$-й сигнал, угловые скобки означают усреднение по реализациям шума $n(t)$. Найдем вначале среднюю вероятность ошибки различения (11). Для этого перепишем правило различения (8): решение о наличии 1-го сигнала принимается, если $\theta\geqslant0$ и принимается решение о наличии 2-го сигнала, если $\theta<0$,

$$\theta=\hat{l}_1^2 z_{01}^2-\hat{l}_2 z_{02}^2=\varepsilon\nu,\ \ \varepsilon=\hat{l}_1 z_{01}-\hat{l}_2 z_{02},\ \ \nu=\hat{l}_1 z_{01}+\hat{l}_2 z_{02}.$$

Очевидно $\varepsilon$ и $\nu$ — гауссовские случайные величины, для которых при наличии 1-го сигнала $\langle\varepsilon\rangle=z_1(1-R_s)$, $\langle\nu\rangle=z_1(1+R_s)$, а при наличии 2-го сигнала $\langle\varepsilon\rangle=-z_2(1-R_s)$, $\langle\nu\rangle=z_2(1+R_s)$. Кроме того, при обеих гипотезах

$$\langle(\varepsilon-\langle\varepsilon\rangle)^2\rangle=2(1-R_s),\ \ \langle(\nu-\langle\nu\rangle)^2\rangle=2(1+R_s)$$

и

$$\langle(\varepsilon-\langle\varepsilon\rangle)(\nu-\langle\nu\rangle)\rangle=0.$$

Здесь $z_j=l_{0j}z_{0j}$ — отношение сигнал/шум для принятого сигнала,

$$R_s=\int_0^T s_{01}(t)\,V_2(t)\,dt/z_{01}z_{02}=\int_0^T s_{02}(t)\,V_1(t)\,dt/z_{01}z_{02} \tag{14}$$

— величина, характеризующая степень сходства различаемых сигналов. В частности, при $s_{01}(t)=s_{02}(t)$, $R_s=1$. Для помехи в виде белого гауссовского шума (14) совпадает с коэффициентом взаимной корреляции сигналов $s_{01}(t)$ и $s_{02}(t)$ [7]. Так как $\varepsilon$ и $\nu$ — независимые гауссовские величины, то, полагая наличие 1-го сигнала, получаем

$$\begin{aligned}P(2/1)&=P(\varepsilon\nu<0)=P(\varepsilon<0)P(\nu>0)+P(\varepsilon>0)P(\nu<0)=\\&=[1-\Phi(z_1\sqrt{(1-R_s)/2})]\,\Phi(z_1\sqrt{(1+R_s)/2})+\\&+\Phi(z_1\sqrt{(1-R_s)/2})\,[1-\Phi(z_1\sqrt{(1+R_s)/2})].\end{aligned} \tag{15}$$

Аналогично, полагая наличие 2-го сигнала, получаем

$$\begin{aligned}P(1/2)&=P(\varepsilon\nu>0)=[1-\Phi(z_2\sqrt{(1-R_s)/2})]\,\Phi(z_2\sqrt{(1+R_s)/2})+\\&+\Phi(z_2\sqrt{(1-R_s)/2})\,[1-\Phi(z_2\sqrt{(1+R_s)/2})],\end{aligned} \tag{16}$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [7]. В частном случае, когда помехой является белый гауссовский шум и сигналы ортогональны, формулы (15), (16) совпадают с аналогичными выражениями, полученными в [1].

Найдем характеристики оценки амплитудных множителей $l_{0j}$. При наличии 1-го сигнала

$$\hat{l}_1=l_{01}+N_1/z_{01},\ \ l_2=(l_{01}R_s z_{01}+N_2)/z_{02}, \tag{17}$$

а при наличии 2-го сигнала

$$\hat{l}_1=(l_{02}R_s z_{02}+N_1)/z_{01},\ \ \hat{l}_2=l_{02}+N_2/z_{02}, \tag{18}$$

где $N_1$ и $N_2$ — гауссовские случайные величины с параметрами (0; 1) и взаимной корреляцией $\langle N_1N_2\rangle=R_s$. Подставляя (17), (18) в (11), (13) и выполняя усреднение, имеем

$$d=-\left[l_{01}p_1P(2/1)\,\frac{z_{02}-R_s z_{01}}{z_{02}}+l_{02}p_2P(1/2)\,\frac{z_{01}-R_s z_{02}}{z_{01}}\right], \tag{19}$$

$$\begin{aligned}V=p_1&\left[z_{01}^{-2}+P(2/1)\,\frac{z_{01}^2-z_{02}^2}{z_{01}^2 z_{02}^2}+P(2/1)\,l_{02}^2\left(\frac{z_{02}-R_s z_{01}}{z_{02}}\right)^2\right]+\\+p_2&\left[z_{02}^{-2}+P(1/2)\,\frac{z_{02}^2-z_{01}^2}{z_{01}^2 z_{02}^2}+P(1/2)\,l_{02}^2\left(\frac{z_{01}-R_s z_{02}}{z_{01}}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{20}$$

Формулы (15), (16), (19), (20) несколько упрощаются, если $p_1=p_2=1/2$, отношения сигнал/шум и истинные значения амплитуд обоих сигналов совпадают, т. е. $z_1=z_2=z$, $l_{01}=l_{02}=l_0$. В этом частном случае

$$P_e=P(1/2)=P(2/1)=\Phi(z\sqrt{(1+R_s)/2})+ \tag{21}$$

$$+\Phi(z\sqrt{(1-R_s)/2})-2\Phi(z\sqrt{(1+R_s)/2})\,\Phi(z\sqrt{(1-R_s)/2}),$$

$$d=-l_0P_e(1-R_s),\quad V=l_0^2[z^{-2}+P_e(1-R_s)^2]. \tag{22}$$

На рис. 1 приведены зависимости средней вероятности ошибки (21) от $R_s$ для двух значений величины отношения сигнал/шум $z$. На рис. 2 представлены зависимости нормированного рассеяния $\rho(R_s)=V/l_0^2$ для двух значений $z$. Как следует из рис. 1 и формулы (21), средняя вероятность

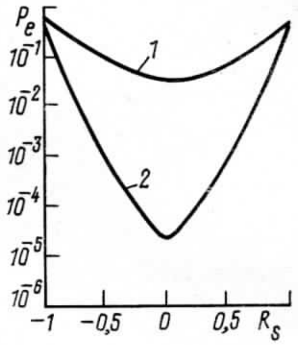


Рис. 1. Зависимости средней вероятности ошибки $P_e$ от $R_s$: *1* – $z=3$; *2* – $z=6$

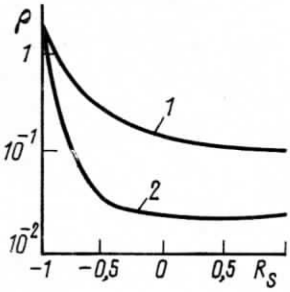


Рис. 2. Зависимости нормированного рассеяния $\rho$ от $R_s$: *1* – $z=3$; *2* – $z=6$

ошибки достигает минимума при $R_s=0$. В то же время, согласно рис. 2, рассеяние оценки минимально при $R_s=1$, т. е. оба сигнала имеют одинаковую форму. Однако при больших отношениях сигнал/шум увеличение $R_s$ сверх величины $-0{,}4\div-0{,}5$ практически не уменьшает рассеяния оценки. Поэтому когда $z$ велико, целесообразно использовать сигналы, для которых $R_s=0$. Действительно, выбор значения $R_s=0$ обеспечивает наименьшую среднюю вероятность ошибки и величину рассеяния оценки, близкую к минимальной.

## 3. СИГНАЛЫ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Неэнергетические параметры [5], как правило, входят в сигнал нелинейно. Это обстоятельство приводит к появлению пороговых эффектов, которые отсутствуют, когда неизвестны только амплитуды сигналов. Поэтому случай различения-оценки сигналов с неизвестными неэнергетическими параметрами требует отдельного рассмотрения.

Положим, что каждый из различаемых сигналов $s_j(t, \mathbf{l}_j)$ содержит $\mu_j$ неизвестных неэнергетических параметров $\mathbf{l}_j=\{l_{1j}, l_{2j}, \ldots, l_{\mu j}\}$, $\mathbf{l}_j\in\mathbf{L}_j$ – априорные области определения неизвестных параметров в евклидовых пространствах $R^{\mu j}$ [8]. Тогда ФОП для сигнала $s_j(t, \mathbf{l}_j)$ принимает вид

$$\Lambda_j(\mathbf{l}_j)=\exp\{z_j^2[m_j(\mathbf{l}_j)-1/2]\},\quad j=1,2, \tag{23}$$

где

$$m_j(\mathbf{l}_j)=M_j(\mathbf{l}_j)/z_j^2=\int\limits_0^T x(t)\,V_j(t,\mathbf{l}_j)\,dt/z_j^2$$

— нормированный член логарифма ФОП, зависящий от неизвестных параметров $\mathbf{l}_j$,

$$z_j^2 = \int_0^T s_j(t, \mathbf{l}_j) V_j(t, \mathbf{l}_j) dt$$

— отношение сигнал/шум для $j$-го сигнала. При этом в силу определения неэнергетических параметров $z_j^2$ не зависит от значения $\mathbf{l}_j$ [5]. В общем случае функции $m_j(\mathbf{l}_j)$ представляют собой реализации неоднородных гауссовских случайных полей. Для первых двух моментов этих полей при обеих гипотезах справедливы соотношения, вытекающие из свойств выходного сигнала оптимального приемника [5],

$$[\langle m_j(\mathbf{l}_j)\rangle] \leqslant \max(1, z_1/z_2, z_2/z_1),$$

$$z_j^{-2} \leqslant [\langle m_j^2(\mathbf{l}_j)\rangle] \leqslant \max[1+z_j^{-2},\ (1+z_2^2)/z_1^2,\ (1+z_1^2)/z_2^2].$$

Будем считать, что реализации $m_j(\mathbf{l}_j)$ дважды непрерывно дифференцируемы с вероятностью 1 по всем неизвестным параметрам. Обозначив через $\mathbf{l}_{mj}$ положение абсолютного максимума реализации $m_j(\mathbf{l}_j)$, $\mathbf{l}_j \in \mathbf{L}_j$, введем в рассмотрение функции

$$\Delta_j(\mathbf{l}_j) = m_j(\mathbf{l}_{mj}) - m_j(\mathbf{l}_j). \tag{24}$$

Нетрудно убедиться, что эти функции обладают свойствами такими же, как их одномерные аналоги, подробно рассмотренные в [6, 9, 10]. Именно: $\Delta_j(\mathbf{l}_j)$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем неизвестным параметрам с вероятностью 1; $\Delta_j(\mathbf{l}_{mj})=0$ и $\Delta_j(\mathbf{l}_j)>0$ при $\mathbf{l}_j \neq \mathbf{l}_{mj}$; $[\partial\Delta_j(\mathbf{l}_j)/\partial l_{kj}]_{\mathbf{l}_m^j}=0$, $k_j=\overline{1, \mu_j}$, $j=1,2$, и т. д. В частности, $\min \Delta_j(\mathbf{l}_j) = \Delta_j(\mathbf{l}_{mj}) = 0$ вне зависимости от вида конкретной реализации наблюдаемых данных и вне зависимости от того, какой сигнал в действительности присутствует. Таким образом, если только $M_j(\mathbf{l}_j) \not\equiv \mathrm{const}$ на любом множестве значений $\mathbf{l}_j$ ненулевой меры, то функция $\Delta_j(\mathbf{l}_j)$ имеет единственный явно выраженный минимум в точке $\mathbf{l}_{mj}$ при обеих гипотезах.

Используя (24), перепишем $M_j$ из (6) как

$$M_j = [z_j^2 m_j(\mathbf{l}_{mj}) - z_j^2/2] + \ln \int_{\mathbf{L}_j} W_{jpr}(\mathbf{l}_j) \exp[-z_j^2 \Delta_j(\mathbf{l}_j)] d\mathbf{l}_j, \quad j=1,2. \tag{25}$$

Полагая далее, что $z_j \to \infty$ таким образом, что $z_1/z_2 = O(1)$, оценим величину интеграла в (25), воспользовавшись для этой цели асимптотической формулой Лапласа для многомерных интегралов [11]. С учетом ограничений п. 1 получаем

$$M_j = z_j^2 m_j(\mathbf{l}_{mj}) - z_j^2/2 + o(z_j), \quad M_m = o(z_j). \tag{26}$$

Значит, согласно (6) и (26), асимптотически байесовским правилом различения будет следующее: принимается решение о наличии 1-го сигнала, если

$$M_1(\mathbf{l}_{m1}) - M_2(\mathbf{l}_{m2}) > (z_1^2 - z_2^2)/2, \tag{27}$$

и решение о наличии 2-го сигнала, если

$$M_1(\mathbf{l}_{m1}) - M_2(\mathbf{l}_{m2}) < (z_1^2 - z_2^2)/2.$$

Найдем теперь предельную форму байесовской оценки $\boldsymbol{\gamma}_m$ (2) неэнергетических параметров $\mathbf{l}_j$ при $z_j \to \infty$. Если выполняется неравенство (27), то $\Lambda \to \infty$, а $\boldsymbol{\gamma}_m = \boldsymbol{\gamma}_{m1}$, где $\boldsymbol{\gamma}_{m1}$ определяется из условия минимума (5) при $j=1$. Используя функцию (24) и асимптотическую формулу Лапласа, аналогично [6, 10] можем записать предельное значение (5) в виде

$$A_1(\gamma_1)/p_1\Lambda_1 \to C_{11}(\gamma_1, \mathbf{l}_{m1}).$$

Исследуя поведение функции (5) при $j=2$, $z_j\to\infty$ и $M_1(\mathbf{l}_{m1})-M_2(\mathbf{l}_{m2})<$ $<(z_1^2-z_2^2)/2$, получаем предельное значение байесовской оценки

$$\gamma_m=\begin{cases}\mathbf{l}_{m1}, M_1(\mathbf{l}_{m1})-M_2(\mathbf{l}_{m2})>(z_1^2-z_2^2)/2,\\ \mathbf{l}_{m2}, M_1(\mathbf{l}_{m1})-M_2(\mathbf{l}_{m2})<(z_1^2-z_2^2)/2.\end{cases} \tag{28}$$

Определим характеристики предельной формы байесовского алгоритма различения-оценки. Достаточно просто это можно сделать, когда различаемые сигналы ортогональны, так что

$$\int_0^T s_1(t,\mathbf{l}_1)\,V_2(t,\mathbf{l}_2)\,dt=\int_0^T s_2(t,\mathbf{l}_2)\,V_1(t,\mathbf{l}_1)\,dt=0 \tag{29}$$

для всех $\mathbf{l}_j\in\mathbf{L}_j$, $j=1, 2$ [8].

Нетрудно убедиться, что предельная форма байесовского алгоритма различения (27) при одновременном различении-оценке совпадает с алгоритмом различения квазидетерминированных сигналов, рассмотренным в [1, 8]. Поэтому при одновременном различении-оценке ортогональных сигналов (29) вероятности ошибок $P(i/j)$ можно найти из результатов [8].

Положим далее, что неизвестные параметры $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ имеют для обоих сигналов одинаковое число компонент ($\mu_1=\mu_2=\mu$), а также имеют покомпонентно одинаковый физический смысл. Тогда точность оценки (28) удобно характеризовать смещением

$$\begin{aligned} d(\gamma_{mk}|\mathbf{l}_{0j})=p_1[\langle l_{mk1}-l_{0k1}\rangle P(1/1)+\langle l_{mk2}-l_{0k1}\rangle P(2/1)]+\\ +p_2[\langle(l_{mk2}-l_{0k2})\rangle P(2/2)+\langle l_{mk1}-l_{0k2}\rangle P(1/2)]\end{aligned} \tag{30}$$

и матрицей рассеяния, на главной диагонали которой лежат средние квадраты ошибок оценивания

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\gamma/\mathbf{l}_{0j})=p_1[\|\langle(l_{mk1}-l_{0k1})\,(l_{mn1}-l_{0n1})\rangle\|P(1/1)+\\ +\|\langle(l_{mk2}-l_{0k1})\,(l_{mn2}-l_{0n1})\rangle\|P(2/1)]+p_2[\|\langle(l_{mk2}-l_{0k2})\times\\ \times(l_{mn2}-l_{0n2})\rangle\|P(2/2)+\|\langle(l_{mk1}-l_{0k2})\,(l_{mn1}-l_{0n2})\rangle\|P(1/2)].\end{aligned} \tag{31}$$

Здесь $j=1, 2$, $k$, $n=\overline{1, \mu}$, а $l_{0kj}$ – истинные значения неизвестных параметров. Для определенности будем считать, что априорные области изменения $l_{kj}$ заданы неравенствами

$$|l_{kj}|\leqslant L_{kj}/2.$$

Пусть присутствует сигнал $s_1(t, \mathbf{l}_{01})$. Тогда

$$M_1(\mathbf{l}_1)=z_1^2S_1(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)+z_1N_1(\mathbf{l}_1),\quad \mathbf{l}_1\in\mathbf{L}_1,$$

$$M_2(\mathbf{l}_2)=z_2N_2(\mathbf{l}_2),\quad \mathbf{l}_2\in\mathbf{L}_2.$$

Здесь

$$S_j(\mathbf{l}_{0j},\mathbf{l}_j)=\int_0^T s_j(t,\mathbf{l}_{0j})\,V_j(t,\mathbf{l}_j)\,dt/z_j^2,$$

$$N_j(\mathbf{l}_j)=\int_0^T n(t)\,V_j(t,\mathbf{l}_j)\,dt/z_j$$

— нормированные сигнальные и шумовые функции [5]. Поскольку $\mathbf{l}_{mj}$ в (28) представляет собой положение абсолютного максимума $M_j(\mathbf{l}_j)$, то при наличии 1-го сигнала первые два момента $\mathbf{l}_{m1}$ находим из результатов [12]. Так как $N_2(\mathbf{l}_2)$ — реализация однородного гауссовского поля, то при наличии 1-го сигнала $\mathbf{l}_{m2}$ распределено равновероятно в $\mathbf{L}_2$. Если присутствует 2-й сигнал, то

$$M_1(\mathbf{l}_1)=z_1N(\mathbf{l}_1),\ \mathbf{l}_1\in\mathbf{L}_1,$$

$$M_2(\mathbf{l}_2)=z_2^2S_2(\mathbf{l}_{02},\mathbf{l}_2)+z_2N_2(\mathbf{l}_2),\ \mathbf{l}_2\in\mathbf{L}_2.$$

Теперь $\mathbf{l}_{m1}$ распределено равновероятно в $\mathbf{L}_1$ а $\mathbf{l}_{m2}$ имеет характеристики обычной оценки максимального правдоподобия [12]. Следовательно, условные смещения (30) и матрицу рассеяния (31) оценки (28) можно записать как

$$d(\gamma_{mk}/\mathbf{l}_{0j})=-l_{0k1}p_1[1-P_{01}P(1/1)]-l_{0k2}p_2[1-P_{02}P(2/2)], \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}_m/\mathbf{l}_{0j})&=p_1P_{01}P(1/1)\mathbf{S}_1^{-1}z_1^{-2}+p_2P_{02}\mathbf{S}_2^{-1}z_2^{-2}P(2/2)+\\&+\mathbf{V}_{a1}[p_1(1-P_{01})P(1/1)+p_2P(1/2)]/2+\mathbf{V}_{a2}[p_1P(2/1)+\\&+p_2(1-P_{02})P(2/2)]/2+p_1\|l_{0k1}l_{0n1}\|[1-P_{01}P(1/1)]+\\&+p_2\|l_{0k2}l_{0n2}\|[1-P_{02}P(2/2)].\end{aligned} \tag{33}$$

Здесь

$$\mathbf{S}_j=\left\|-\frac{\partial^2S_j(\mathbf{l}_{0j},\mathbf{l}_j)}{\partial l_{kj}\partial l_{nj}}\right\|_{\mathbf{l}_j=\mathbf{l}_{0j}},\qquad \mathbf{V}_{aj}=\|L_{kj}L_{nj}\delta_{kn}/6\|,$$

$$P_{0j}=\frac{z_j^{\mu/2}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{\mu-1}}^{\infty}\exp\left[\frac{2z_j^2-x^2}{4}-\frac{\xi_jx^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]\times$$
$$\times D_{-\mu/2}(2z_j-x)\,dx, \tag{34}$$

$$\xi_j=\sqrt{\det\mathbf{S}_j}\prod_{k=1}^{\mu}L_{kj},\quad j=1,2,\ k,n=\overline{1,\mu},$$

$\delta_{kn}$ — символ Кронекера, $D_p(\cdot)$ — функция параболического цилиндра, а $\xi_j$ — приведенные объемы априорных областей определения неизвестных параметров [8, 12]. Пусть значения неизвестных параметров $\mathbf{l}_j$ распределены равновероятно в априорных областях $\mathbf{L}_j$. Тогда, учитывая, что для неэнергетических параметров $z_j^2$, $\mathbf{S}_j$, $P_{0j}$ и $P(i/j)$ не зависят от $\mathbf{l}_{0j}$, и усредняя (32), (33) по $\mathbf{l}_{0j}$, безусловные смещения и матрицу рассеяния получаем в виде

$$\begin{aligned}d(\gamma_{mk})=0,\ \ \mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}_m)&=p_1P_{01}\mathbf{S}_1^{-1}z_1^{-2}P(1/1)+p_2P_{02}\mathbf{S}_2^{-1}z_2^{-2}P(2/2)+\\&+\mathbf{V}_{a1}[p(1-P_{01})P(1/1)+P_e/2]+\mathbf{V}_{a2}[p_2(1-P_{02})P(2/2)+P_e/2],\end{aligned} \tag{35}$$

где $P_e$ — средняя вероятность ошибки различения [8]. Таким образом, для равномерного априорного распределения неизвестных параметров оценка (28) является безусловно несмещенной.

Полученное для безусловной матрицы рассеяния оценки выражение (35) существенно упрощается, если матрицы $\mathbf{S}_j$ (34), априорные области определения неизвестных параметров $\mathbf{L}_j$ и отношения сигнал/шум $z_j$ для обоих различаемых сигналов совпадают, т. е.

$$\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2=\mathbf{S},\ L_{k1}=L_{k2}=L_k,\ z_1=z_2=z,\ \xi_1=\xi_2=\xi. \tag{36}$$

Тогда, согласно [8], для любых $p_1$ и $p_2$ имеем

$$P_e = P(1/2) = P(2/1) = [1 - P_0(2\xi)]/2.$$

Кроме этого $P_{01} = P_{02} = P_0(\xi)$, $\mathbf{V}_{a1} = \mathbf{V}_{a2} = \mathbf{V}_a$, а

$$P_0(\xi) = \frac{z^{\mu/2}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sqrt{\mu-1}}^{\infty} \exp\left[\frac{2z^2 - x^2}{4} - \frac{\xi x^{\mu-1}}{(2\pi)^{(\mu+1)/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \times$$
$$\times D_{-\mu/2}(2z - x)\, dx.$$

Следовательно, при выполнении (36) выражение для матрицы рассеяния (35) можно переписать как

$$\mathbf{V}(\gamma_m) = \tilde{P}_0 \mathbf{S}^{-1} z^{-2} + \mathbf{V}_a (1 - \tilde{P}_0), \tag{37}$$

где

$$\tilde{P}_0 = P_0(\xi)\,[1 + P_0(2\xi)]/2. \tag{38}$$

Заметим, что эта формула для матрицы рассеяния оценок при одновременном различении-оценке имеет такой же вид, как и формула для матрицы рассеяния оценок параметров одного сигнала, присутствующего в наблюдаемых данных с вероятностью 1 [12]. Отличие лишь в том, что при совместном различении-оценке роль вероятности надежной оценки выполняет величина $\tilde{P}_0$. Соответственно, величину $\tilde{P}_a = 1 - \tilde{P}_0$ можно интерпретировать как вероятность аномальной ошибки при совместном различении-оценке. Сравнивая эту вероятность с вероятностью аномальной ошибки $P_a = 1 - P_0(\xi)$ оценивания параметров сигнала, присутствующего с вероятностью 1 [12], получаем $\tilde{P}_a/P_a = 1 + P_0(\xi)\,[1 - P_0(2\xi)]/2\,[1 - P_0(\xi)]$.

При весьма больших отношениях сигнал/шум $z$ для вероятности $P_a = 1 - P_0(\xi)$ можно получить упрощенное выражение [8]

$$P_a = \xi z^{\mu-1} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \Big/ \pi^{(\mu+1)/2} 3^{\mu/2} 2^{\mu}. \tag{39}$$

Используя (39), находим, что $\tilde{P}_a/P_a \to 2$, когда $z \to \infty$.

## 4. СИГНАЛЫ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ НЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРОМ

Конкретизируем полученные общие соотношения применительно к одновременному различению-оценке ортогональных сигналов, содержащих один и тот же неизвестный параметр. При выполнении (36) средняя вероятность ошибки определяется формулой [8]

$$P_e = [1 - P_0(2\xi)]/2, \tag{40}$$

где теперь

$$P_0(\xi) = \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} \exp\left[\frac{2z^2 - x^2}{4} - \frac{\xi}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] D_{-1/2}(2z - x)\, dx.$$

Соответственно рассеяние оценки (37) перепишется как

$$V(\gamma_m) = \frac{L^2}{6}\left[\frac{6\tilde{P}_0}{z^2\xi^2} + (1 - \tilde{P}_0)\right]. \tag{41}$$

При достаточно больших соотношениях сигнал/шум последнее выражение можно упростить. Так, используя (39), получаем

$$V(\gamma_m)=\frac{L^2}{6}\left[\frac{6}{\xi^2 z^2}+\xi\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)\Big/\sqrt{3}\,\pi\right].$$

На примере сигналов с одним неизвестным параметром рассмотрим, как влияет расположение априорных интервалов определения неизвестного параметра каждого из сигналов на характеристики оценки. Заметим, что вероятность ошибки при различении зависит только от приведенной длины априорного интервала $\xi$, а не от его расположения. Пусть неизвестный параметр 1-го сигнала $l_1\in[L_1, L_2]$, 2-го сигнала $l_2\in[L_3, L_4]$. При этом $L_2-L_1=L_4-L_3=L$, так что по-прежнему $\xi_1=\xi_2=\xi$. Полагая, как и ранее, априорные распределения неизвестных параметров равномерными, для безусловных смещения и рассеяния оценки находим

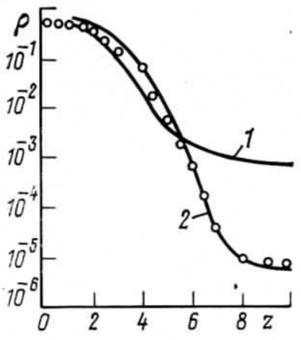


Рис. 3. Зависимости нормированного условного рассеяния ρ от отношения сигнал / шум $z$: *1* — $\xi=5$; *2* — $\xi=50$; кружки — экспериментальные значения относительного рассеяния оценки

$$d(\gamma_m)=(p_1-p_2)\,\Delta L P_e,$$

$$V(\gamma_m)=\frac{L^2}{6}\,(6\tilde{P}_0/\xi^2 z^2+1-\tilde{P}_0)+\Delta L^2 P_e, \tag{42}$$

где $\Delta L=(L_4+L_3-L_1-L_2)/2$ — разность априорных средних значений неизвестных параметров, а $P_e$ и $\tilde{P}_0$ определяются из (38) и (40). Сравнивая (41) и (42), видим, что расположение априорных интервалов может оказать заметное влияние на характеристики оценки параметров различаемых сигналов.

Положим далее, что различаемые сигналы имеют колокольную форму и отличаются только временны́м положением

$$s_j(t, l_j)=s(t-l_j),\quad s(t)=a\exp(-t^2/\tau_0^2), \tag{43}$$

а прием их производится на фоне белого шума. Пусть $l_1\in[-L, 0]$, $l_2\in[0, L]$. Если $L\gg\tau_0$ и $T-L\gg\tau_0$, то сигналы (43) можно приближенно считать ортогональными. Сигнальные функции при этом принимают вид

$$S_j(l_{0j}, l_j)=\exp[-(l_{0j}-l_j)^2/2\tau_0^2],$$

а приведенная длина априорного интервала

$$\xi=L[-\partial^2 S_j(l_{0j}, l_j)/\partial l_j^2]^{1/2}_{l_j=l_{0j}}=L/\tau_0.$$

На рис. 3 приведены зависимости нормированного условного рассеяния $\rho(z)=3V(\gamma_m/l_{0j})/2L^2$ оценки (28) для $\xi=5$; 50, $l_{01}=-L/2$, $l_{02}=L/2$, $p_1=p_2=1/2$.

Полученные формулы для характеристик предельной формы байесовского алгоритма одновременного различения-оценки ортогональных сигналов с неизвестными неэнергетическими параметрами являются приближенными. Аналитически трудно оценить точность этих формул. Можно лишь утверждать, что точность их возрастает с увеличением $z$ и $\xi$. С целью изучения возможностей использования приведенных формул для умеренных значений $z$ и $\xi$ был разработан лабораторный макет, позволяющий производить одновременное различение двух сигналов и оценку их временны́х положений. В этом макете [12] формировался выходной сигнал фильтра, согласованного с сигналом, близким по форме к (43). В соответствии с алгоритмом (27) (при $z_1=z_2$) решение о наличии одного из сигналов выносилось на основе сравнения абсолютных максимумов выходного сигнала согласованного фильтра на интервалах $[-L; 0]$ и $[0; L]$.

Оценка в соответствии с (28) определялась по положению абсолютного максимума выходного сигнала согласованного фильтра на соответствующих интервалах. Экспериментальные значения средней вероятности ошибки, приведенные в [8], удовлетворительно согласуются с теоретическими данными уже при $z \geqslant 1$. На рис. 3 нанесены экспериментальные значения относительного рассеяния оценки. Каждое экспериментальное значение $\rho(z)$ при $z \leqslant 4$ вычислялось по результатам $5 \cdot 10^2$, а при $z > 4$ — по результатам не менее $10^3$ измерений. Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальной зависимости $\rho(z)$ полученными асимптотически точными формулами уже при $z \geqslant 2$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе установлена предельная форма байесовского алгоритма одновременного различения двух сигналов и оценки их неизвестных параметров при увеличении отношения сигнал/шум для обоих сигналов. Найденная предельная форма байесовского алгоритма содержит минимально достаточную статистику максимального правдоподобия, как в [1]. Однако в отличие от результатов [1], полученное асимптотически оптимальное правило имеет несколько более простую форму, инвариантно по отношению к широкому классу функций потерь и к величинам априорных вероятностей наличия каждого из различаемых сигналов. К тому же, применение установленной здесь предельной формы байесовского алгоритма не требует несколько искусственной замены неизвестных априорных распределений параметров сигналов на равномерные, как это делается в [1].

Для характеристик предельной формы байесовского алгоритма различения-оценки сигналов с неизвестными амплитудами получены точные, а для сигналов с неизвестными неэнергетическими параметрами — асимптотически точные выражения. Последние могут быть использованы, когда область определения неизвестных параметров существенно больше области высокой корреляции различаемых сигналов, и отношение сигнал/шум достаточно велико. С увеличением отношения сигнал/шум точность найденных формул возрастает, в то время как поведение точности других приближенных формул для характеристик алгоритма различения-оценки обычно неизвестно. Экспериментальное исследование различения-оценки ортогональных сигналов с неизвестными временны́ми положениями показало, что полученные приближенные выражения удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости уже при отношениях сигнал/шум, превышающих несколько единиц.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Советское радио, 1977.
2. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1975, т. 2.
3. *Левин Б. Р., Шинаков Ю. С.* Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 11, с. 2239.
4. *Левин Б. Р., Шинаков Ю. С.* Радиотехника, 1971, т. 26, № 4, с. 16.
5. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Советское радио, 1978.
6. *Трифонов А. П.* Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 3, с. 185.
7. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М.: Советское радио, 1966.
8. *Трифонов А. П.* Проблемы передачи информации, 1979, т. 15, № 2, с. 85.
9. *Маршаков В. К., Трифонов А. П.* Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1973, № 6, с. 141.
10. *Трифонов А. П.* Проблемы передачи информации, 1972, т. 8, № 4, с. 45.
11. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
12. *Маршаков В. К., Трифонов А. П.* Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 11, с. 2266.


**Поступила в редакцию
24.III.1980
После переработки
9.III.1981**