63

63

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXVII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

5

МОСКВА · 1982

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1982 № 5

УДК 621.391

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Трифонов А. П., Зюльков А. В.

Найдены характеристики оценки произвольного неэнергетического параметра изображения, описываемого пуассоновским полем случайных точек.

Зарегистрированное оптическое изображение часто описывают совокупностью случайных точек, статистические характеристики которой соответствуют пуассоновскому случайному полю $N(x, y)$, $x, y \in \omega$ [1, 2]. В общем случае интенсивность $\mathcal{I}(x, y)$ наблюдаемого поля $N(x, y)$ может зависеть от нескольких неизвестных параметров оптического изображения. Полагая, что изображение формируется «идеальной» оптической системой [1], рассмотрим случай, когда неизвестен только один параметр изображения. Тогда

$$\mathcal{I}(x,y)=\begin{cases}\mathcal{I}_{\text{с}}+\mathcal{I}_{\text{ф}}, & x, y\in\Omega(\lambda),\\ \mathcal{I}_{\text{ф}}, & x, y\in\omega\backslash\Omega(\lambda),\end{cases}$$

где $\Omega(\lambda)$ — область, ограниченная контуром изображения с неизвестным параметром λ; ω — область экрана; $\mathcal{I}_{\text{с}}$ и $\mathcal{I}_{\text{ф}}$ — соответственно интенсивность светового сигнала и фона. Ограничимся оценкой параметров, для которых площадь $S_0=S[\Omega(\lambda)]$ изображения не зависит от λ. Найдем предельную точность одного из наиболее распространенных алгоритмов оценки — метода максимального правдоподобия.

Оценка максимального правдоподобия λ_m определяется как положение абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия [2]

$$M(\lambda)=\ln(1+q)N(\lambda)-n_{\text{с}}. \tag{1}$$

Здесь $N(\lambda)$ — число случайных точек наблюдаемой реализации поля $N(x, y)$ в области $\Omega(\lambda)$; $q=\mathcal{I}_{\text{с}}/\mathcal{I}_{\text{ф}}$; $n_{\text{с}}=\mathcal{I}_{\text{с}}S_0$. Представим $M(\lambda)$ в виде суммы нормированных сигнальной и шумовой функций [3]

$$M(\lambda)=\sigma_N[zH(\lambda, \lambda_0)+h(\lambda)]+C_0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &H(\lambda, \lambda_0)=S_0^{-1}S[\Omega(\lambda)\cap\Omega(\lambda_0)],\\ &h(\lambda)=[M(\lambda)-\langle M(\lambda)\rangle]/\sigma_N,\\ &\sigma_N^2=\langle[M(\lambda_0)-\langle M(\lambda_0)\rangle]^2\rangle=n_{\text{с}}(1+q)\ln^2(1+q)/q,\end{aligned} \tag{3}$$

$C_0=n_{\text{с}}[\ln(1+q)/q-1]$ — несущественное постоянное слагаемое; λ_0 — истинное значение неизвестного параметра; $z^2=n_{\text{с}}q/(1+q)$ — параметр, который можно интерпретировать как отношение сигнал/шум на выходе измерителя. При этом $z\to\infty$, если $n_{\text{с}}\to\infty$ и $q>0$, $\langle h(\lambda)\rangle=0$, $\max H(\lambda, \lambda_0)=H(\lambda_0, \lambda_0)=\langle h^2(\lambda_0)\rangle=1$ и

$$\begin{aligned} K(\lambda_1, \lambda_2)=\langle h(\lambda_1)h(\lambda_2)\rangle=S_0^{-1}\{S[\Omega(\lambda_1)\cap\Omega(\lambda_2)]+\\ +qS[\Omega(\lambda_1)\cap\Omega(\lambda_2)\cap\Omega(\lambda_0)]\}/(1+q)\end{aligned} \tag{4}$$

Используя известные свойства операций над множествами, перепишем (3), (4) в виде

$$H(\lambda,\lambda_0)=1-S_0^{-1}S[\Omega(\lambda)\setminus\Omega(\lambda_0)],\tag{5}$$

$$K(\lambda_1,\lambda_2)=1-S_0^{-1}S[\Omega(\lambda_1)\setminus\Omega(\lambda_2)]-\\ -q(1+q)^{-1}S_0^{-1}S\{[\Omega(\lambda_1)\setminus\Omega(\lambda_0)]\cap[\Omega(\lambda_2)\setminus\Omega(\lambda_0)]\}.\tag{6}$$

При весьма малых значениях разности $\lambda-\lambda_0$ площадь области $\Omega(\lambda)\setminus\Omega(\lambda_0)$ пропорциональна $|\lambda-\lambda_0|$, так что при $|\lambda-\lambda_0|\to0$

$$S_0^{-1}S[\Omega(\lambda)\setminus\Omega(\lambda_0)]=A|\lambda-\lambda_0|+o(|\lambda-\lambda_0|),\tag{7}$$

где

$$A=\lim_{|\lambda-\lambda_0|\to0}\frac{S[\Omega(\lambda)\setminus\Omega(\lambda_0)]}{S_0|\lambda-\lambda_0|}.\tag{8}$$

Пусть далее $\delta=\max\{|\lambda_1-\lambda_2|,\ |\lambda_1-\lambda_0|,\ |\lambda_2-\lambda_0|\}$. Полагая $\delta\to0$, рассмотрим поведение функции

$$S\{[\Omega(\lambda_1)\setminus\Omega(\lambda_0)]\cap[\Omega(\lambda_2)\setminus\Omega(\lambda_0)]\}.\tag{9}$$

Когда $(\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_2-\lambda_0)>0$ и $\delta\to0$, области $\Omega(\lambda_1)\setminus\Omega(\lambda_0)$ и $\Omega(\lambda_2)\setminus\Omega(\lambda_0)$ почти полностью перекрываются, так что площадь их пересечения совпадает с площадью наименьшей из этих областей. Таким образом, согласно (7),

$$S\{[\Omega(\lambda_1)\setminus\Omega(\lambda_2)]\cap[\Omega(\lambda_2)\setminus\Omega(\lambda_0)]\}=\\ =S_0A\min\{|\lambda_1-\lambda_0|,\ |\lambda_2-\lambda_0|\}+o(\delta).\tag{10}$$

Если $(\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_2-\lambda_0)\leqslant0$, то области $\Omega(\lambda_1)\setminus\Omega(\lambda_0)$ и $\Omega(\lambda_2)\setminus\Omega(\lambda_0)$ практически не перекрываются, и площадь их пересечения

$$S\{[\Omega(\lambda_1)\setminus\Omega(\lambda_0)]\cap[\Omega(\lambda_2)\setminus\Omega(\lambda_0)]\}=o(\delta).\tag{11}$$

Заметим, что формулы (7), (10), (11) можно получить путем разложения выражений (5), (6) в ряд Тейлора в окрестности точки λ_0. При этом (9) совпадает с функцией $S(\lambda_1,\lambda_2,\lambda)$, введенной в [1], а коэффициент A определяется как нормированная производная этой функции. Однако выражение (8) позволяет рассчитать коэффициент A несколько проще, чем в [1]. При помощи (7), (10), (11), когда $\delta\to0$, (5) и (6) можно переписать в виде

$$H(\lambda,\lambda_0)=1-A|\lambda-\lambda_0|+o(|\lambda-\lambda_0|),\tag{12}$$

$$K(\lambda_1,\lambda_2)=\tag{13}$$
$$\begin{cases}1-A|\lambda_1-\lambda_2|-qA(1+q)^{-1}\min(|\lambda_1-\lambda_0|,|\lambda_2-\lambda_0|)+o(\delta), & (\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_2-\lambda_0)>0,\\ 1-A|\lambda_1-\lambda_2|+o(\delta), & (\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_2-\lambda_0)\leqslant0.\end{cases}$$

Для рассеяния (среднего квадрата ошибки) оценок параметра λ в [1] найдена нижняя граница

$$V_0=2[n_cA(q-1)]^{-2}.\tag{14}$$

Это выражение справедливо при $q\gg1$ и получено в [1] безотносительно к какому-либо конкретному алгоритму оценки. Поэтому, в частности, неясно, насколько V_0 близко к рассеянию оценки максимального правдоподобия. Кроме того, условие $q\gg1$ существенно ограничивает область применения (14). Действительно, высокая точность оценки максимального правдоподобия может быть достигнута при малых отношениях сигнал/фон q. Для этого достаточно, чтобы было велико отношение сигнал/шум z на выходе измерителя [3]. Согласно (14), когда $q\to\infty$, $V_0\to0$ даже при конечных значениях n_c (и, следовательно, при конечных значениях z). Таким образом, нижняя граница (14) соответствует некоторой сингулярной оценке, которая позволяет точно измерить параметр изображения при конечном среднем числе сигнальных точек n_c. Известно, однако, что число задач, в которых существуют сингулярные оценки, невелико, и такие оценки, как правило, не удается реализовать в практических ситуациях.

Найти предельную точность оценки λ_m при помощи формулы Крамера – Рао [2–4] нельзя, так как нарушены условия регулярности, и оценка максимального правдоподобия является суперэффективной [4]. Для расчета точности таких оценок в [4] предложена асимптотическая аппроксимация функции распределения оценки. Эта аппроксимация (при $n_c \gg 1$) основана на пренебрежении в (2) шумовой функцией $h(\lambda)$ и на представлении сигнальной функции $H(\lambda, \lambda_0)$ в виде, аналогичном (12). Используя методику [4], приближенное выражение для плотности вероятности оценки запишем как

$$W(\lambda_m/\lambda_0) \simeq C_1 \exp[-n_c \ln(1+q) A |\lambda_m - \lambda_0|], \tag{15}$$

C_1 – нормирующий множитель. Когда $n_c \gg 1$, из (15) находим приближенное выражение для рассеяния оценки

$$V_1 \simeq 2[n_c A \ln(1+q)]^{-2}. \tag{16}$$

Если $q \gg 1$, то $V_1 \approx 2[n_c A \ln q]^{-2}$, т. е. формула (16) приводит к значениям рассеяния оценки, существенно превышающим нижнюю границу (14). Кроме того, в отличие от (14) выражение (16) справедливо при любых $q > 0$. В частности, когда $q \ll 1$, но $n_c q \gg 1$, что обеспечивает высокую апостериорную точность оценки,

$$V_1 \approx 2(n_c A q)^{-2}. \tag{17}$$

Однако в условиях $n_c \gg 1$ и $q \ll 1$ рассеяние оценки максимального правдоподобия нетрудно найти с учетом влияния шумовой функции $h(\lambda)$. Действительно, при $n_c \gg 1$ шумовая функция $h(\lambda)$ приближенно гауссовская [5, 6], а функция корреляции (13), когда $q \ll 1$, принимает вид

$$K(\lambda_1, \lambda_2) \approx 1 - A|\lambda_1 - \lambda_2| + o(\delta). \tag{18}$$

Согласно (12) и (18), в малой окрестности λ_0 поведение сигнальной и шумовой функций такое же, как для прямоугольного импульса с неизвестным временным положением, принимаемого на фоне белого гауссовского шума [7, 8]. Из этих работ непосредственно следует приближенное выражение для рассеяния оценки

$$V_2 \simeq 13/(2n_c^2 A^2 q^2). \tag{19}$$

Эта формула асимптотически точна, когда $n_c \to \infty$, $q \to 0$ таким образом, что $n_c q \to \infty$ [8]. Сравнение (17) и (19) показывает, что учет влияния шумовой функции $h(\lambda)$ в (2) при расчете рассеяния суперэффективной оценки приводит к увеличению рассеяния оценки в 3,25 раза, если $q \ll 1$.

Рассмотрим предельную точность оценки максимального правдоподобия параметра λ для произвольных значений q с учетом влияния шумовой функции $h(\lambda)$. В условиях высокой апостериорной точности, т. е. при $z \gg 1$, характеристики оценки определяются поведением логарифма функционала отношения правдоподобия в малой окрестности истинного значения параметра λ_0 [3, 4]. Поэтому, когда $z \to \infty$ (что всегда имеет место при $q > 0$ и $n_c \to \infty$), достаточно исследовать поведение $M(\lambda)$ в малой окрестности λ_0. С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$\Delta(\lambda) = [M(\lambda) - M(\Lambda)]/\sigma_N, \tag{20}$$

где $M(\lambda)$ определяется из (1). Положение абсолютного максимума функции $\Delta(\lambda)$ совпадает с оценкой максимального правдоподобия λ_m, распределение которой имеет вид

$$F(\Lambda) = P[\lambda_m < \Lambda] = P[\max_{\lambda < \Lambda} \Delta(\lambda) > \max_{\Lambda \leqslant \lambda} \Delta(\lambda)].$$

Отсюда следует, что распределение оценки выражается через двумерное распределение величин абсолютных максимумов функции $\Delta(\lambda)$

$$F(u, v, \Lambda) = P[\max_{\lambda < \Lambda} \Delta(\lambda) < u, \max_{\Lambda \leqslant \lambda} \Delta(\lambda) < v].$$

Обозначая $\varepsilon = \max\{|\lambda_i - \lambda_0|,\ |\lambda_i - \Lambda|,\ i=1,\ 2\}$ и используя формулы (12), (13), получаем, что при $\varepsilon \to 0$ функция корреляции процесса (20) примет вид

$$K_\Delta(\lambda_1, \lambda_2) = A\,\frac{2+q}{1+q} \times \tag{21}$$
$$\times \begin{cases} \min(|\Lambda-\lambda_1|, |\Lambda-\lambda_2|) + o(\varepsilon), & (\Lambda-\lambda_1)(\Lambda-\lambda_2) > 0, \\ o(\varepsilon), & (\Lambda-\lambda_1)(\Lambda-\lambda_2) \leqslant 0. \end{cases}$$

Можно показать [5, 6], что при $z \to \infty$ ($n_c \to \infty$) процесс (20) сходится к гауссовскому процессу. Следовательно, если $n_c \gg 1$, то отрезки реализаций процесса (20) на интервалах $[\Lambda-\varepsilon,\ \Lambda)$ и $[\Lambda,\ \Lambda+\varepsilon]$ приближенно независимы. Значит, в условиях высокой апостериорной точности оценки

$$F(u, v, \Lambda) \simeq P[\max \Delta(\lambda) < u]\, P[\max \Delta(\lambda) < v] = F_{1\Lambda}(u) F_{2\Lambda}(v), \tag{22}$$

а распределение оценки принимает вид $F(\Lambda) \simeq \int\limits_0^\infty F_{2\Lambda}(u)\, dF_{1\Lambda}(u)$. Воспользовавшись формулировкой теоремы Дуба, приведенной в [9], а также результатами [6], находим, что при $n_c \to \infty$ процесс (20) с функцией корреляции (21) является асимптотически марковским в малой окрестности λ_0. Коэффициенты сноса и диффузии этого процесса соответственно равны

$$a(\lambda) = Az \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ -1, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \qquad b = A\,\frac{2+q}{1+q}. \tag{23}$$

Следовательно, при $z \gg 1$ можно аппроксимировать процесс $\Delta(\lambda)$ марковским процессом с коэффициентами сноса и диффузии (23). Тогда, приближенные выражения для распределений $F_{1\Lambda}(u)$ и $F_{2\Lambda}(u)$ (22) определяются из решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова [7, 10]. Решая это уравнение с коэффициентами (23) при соответствующих граничных и начальных условиях, как это сделано в [7, 10], получаем выражение для распределения оценки λ_m. Используя найденное распределение, аналогично [11] приходим к асимптотически точному ($n_c \to \infty$, $q > 0$) выражению для рассеяния оценки максимального правдоподобия

$$V \simeq 13(2+q)^2/(8n_c^2 q^2 A^2).$$

Если $q \ll 1$, но $n_c q \gg 1$ (что обеспечивает высокую апостериорную точность оценки), то $V \simeq 13/(2n_c^2 q^2 A^2)$ и совпадает с (19). При $q \gg 1$ $V \simeq 13/(8n_c^2 A^2)$. Таким образом, даже при исчезающе малом уровне фона рассеяние оценки максимального правдоподобия не равно нулю.

Сравнивая (14) и (24), при $q \gg 1$ получаем $V/V_0 \simeq 13q^2/16$. Отсюда следует, что применительно к оценке максимального правдоподобия параметров оптических изображений граница, полученная в [1], существенно занижена. В заключение отметим, что значения коэффициента A для ряда конкретных параметров оптических изображений приведены в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бакут П. А., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д.* Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, № 4, с. 178.
2. *Федосеев В. И., Широков В. Ф.* Изв. вузов МВССО СССР (Радиофизика), 1975, т. 18, № 2, с. 246.
3. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Советское радио, 1978.
4. *Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Советское радио, 1977.
5. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977.
6. *Марченко Б. Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. Киев: Наукова думка, 1975.
7. *Терентьев А. С.* Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 4, с. 652.
8. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
9. *Kailath T.* IEEE Trans., 1966, v. IT-12, N 4, p. 442.
10. *Трифонов А. П.* Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 1, с. 90.
11. *Трифонов А. П.* Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 4, с. 749.

Поступила в редакцию
27.V.1980