66

66

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXVII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

8

МОСКВА · 1982

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1982 № 8

УДК 621.391

ПРИЕМ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ШИРИНОЙ СПЕКТРА МОЩНОСТИ

Трифонов А. П., Галун С. А.

Получены асимптотически точные (с увеличением времени наблюдения) выражения для характеристик обнаружения и оценки ширины спектра мощности гауссовского полосового сигнала по методу максимального правдоподобия.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих приложениях статистической теории радиолокации и связи в качестве модели полезного сигнала используется узкополосный стационарный гауссовский случайный процесс с полосовым спектром мощности [1–4]

$$K_s(\omega, \Omega_0)=\begin{cases} N_s/2, & |\omega\pm\omega_0|\leqslant\Omega_0/2, \\ 0, & |\omega\pm\omega_0|>\Omega_0/2. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим задачу обнаружения случайного сигнала $s(t)$ и оценки ширины Ω_0 его спектра мощности (1) на фоне гауссовского белого шума $n(t)$. Положим, что неизвестная ширина Ω_0 спектра мощности (1) принимает значения из априорного интервала $[\Omega_{min}; \Omega_{max}]$, а для обработки сигнала $s(t)$ используется метод максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем называть приемником максимального правдоподобия [5]. Ниже найдены приближенные выражения для характеристик приемника максимального правдоподобия. Точность полученных формул повышается с увеличением времени наблюдения.

1. ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ ПРИЕМНИКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть на вход приемника в течение интервала времени $(-T/2; T/2)$ поступает реализация процесса $x(t)=n(t)$ или $x(t)=s(t)+n(t)$. Здесь $s(t)$ — реализация стационарного центрированного гауссовского случайного процесса со спектром мощности (1); $n(t)$ — реализация центрированного гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0, причем $s(t)$ и $n(t)$ независимы. Приемник максимального правдоподобия должен формировать логарифм функционала отношения правдоподобия [2, 5]

$$M(\Omega)=\int\limits_{-T/2}^{T/2}\int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t_1)x(t_2)\Theta(t_1,t_2,\Omega)\,dt_1dt_2/2-H(\Omega)/2 \tag{2}$$

для всех $\Omega\in[\Omega_{min}; \Omega_{max}]$. Здесь функция $\Theta(t_1, t_2, \Omega)$ находится из интегрального уравнения [2, 5]

$$\frac{N_0}{2}\Theta(t_1,t_2,\Omega)+\int\limits_{-T/2}^{T/2} K_s(t_1-t,\Omega)\Theta(t,t_2,\Omega)\,dt=\frac{2}{N_0}K_s(t_1-t_2,\Omega), \tag{3}$$

где

$$K_s(t_1-t_2,\ \Omega)=N_s\sin[\Omega(t_1-t_2)/2]\cos[\omega_0(t_1-t_2)]/[\pi(t_1-t_2)]$$

— функция корреляции сигнала $s(t)$, а $H(\Omega)$ определяется выражением [2]

$$H(\Omega)=\int\limits_0^1 d\lambda\int\limits_{-T/2}^{T/2}\hat{\Theta}(t,t,\lambda,\Omega)\,dt.$$

Функция $\hat{\Theta}(t_1,\ t_2,\ \lambda,\ \Omega)$ является решением уравнения [2]

(4) $$\hat{\Theta}(t_1,t_2,\lambda,\Omega)+\frac{2\lambda}{N_0}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\hat{\Theta}(t_1,t,\lambda,\Omega)K_s(t-t_2,\Omega)\,dt=\frac{2}{N_0}K_s(t_1-t_2,\Omega).$$

Будем считать время наблюдения достаточно большим, так что $T\gg 2\pi/\Omega_0$. Тогда, решая уравнения (3), (4) аналогично [2] при помощи преобразования Фурье, можем переписать (2) в виде

(5) $$M(\Omega)=\frac{N_s}{N_0(N_s+N_0)}\int\limits_{-T/2}^{T/2}x^2(t,\Omega)\,dt-\frac{T\Omega}{2\pi}\ln(1+N_s/N_0),$$

где $x(t,\ \Omega)$ — отклик фильтра с передаточной функцией $G(j\omega,\ \Omega)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$. Для рассматриваемого случайного сигнала $|G(j\omega,\ \Omega)|=1$, когда $|\omega\pm\omega_0|\leqslant\Omega/2$, и $|G(j\omega,\ \Omega)|=0$, когда $|\omega\pm\omega_0|>\Omega/2$. Выражение (5) определяет структуру одной из возможных реализаций приемника максимального правдоподобия для случайного сигнала со спектром мощности (1).

При отсутствии сигнала $s(t)$ выходной сигнал приемника $M(\Omega)$ можно представить в виде суммы нормированных регулярной и шумовой составляющих [5]

(6) $$M(\Omega)=q\sqrt{T}[\sqrt{T}S_0(\Omega)+N_0(\Omega)],\quad S_0(\Omega)=\langle M(\Omega)\rangle/qT=$$
$$=-\Omega[\ln(1+q)-q/(1+q)]/2\pi q,\quad N_0(\Omega)=[M(\Omega)-\langle M(\Omega)\rangle]/q\sqrt{T},$$

где $q=N_s/N_0$. При этом $\langle N_0(\Omega)\rangle=0$ и

(7) $$\langle N_0(\Omega_1)N_0(\Omega_2)\rangle=\min(\Omega_1,\ \Omega_2)/2\pi(1+q)^2.$$

При наличии $s(t)$ в наблюдаемых данных для функции $M(\Omega)$ справедливо представление, аналогичное (7), 6

(8) $$M(\Omega)=q\sqrt{T}[\sqrt{T}S_1(\Omega)+N_1(\Omega)],\quad S_1(\Omega)=\langle M(\Omega)\rangle/qT=$$
$$=\{q^2\min(\Omega_0,\ \Omega)/(1+q)-\Omega[\ln(1+q)-q/(1+q)]\}/2\pi q,$$
$$N_1(\Omega)=[M(\Omega)-\langle M(\Omega)\rangle]/q\sqrt{T}.$$

Очевидно, $\langle N_1(\Omega)\rangle=0$,

(9) $$\langle N_1(\Omega_1)N_1(\Omega_2)\rangle=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}\min(\Omega_1,\Omega_2), & \min(\Omega_1,\ \Omega_2)<\Omega_0,\\ [\min(\Omega_1,\Omega_2)+(2q+q^2)\Omega_0]/(1+q)^2, & \min(\Omega_1,\ \Omega_2)\geqslant\Omega_0.\end{cases}$$

Это выражение можно существенно упростить, если ввести взаимно-однозначное непрерывное преобразование неизвестного параметра

(10) $$\Omega=2\pi\begin{cases}l, & l<l_0,\\ (1+q)^2l-(2q+q^2)l_0, & l\geqslant l_0,\end{cases}$$

где $l_0=\Omega_0/2\pi$. С учетом (10) формулы (8), (9) принимают вид

(11) $$\tilde{M}(l)\equiv M(\Omega(l))=q\sqrt{T}[\sqrt{T}\tilde{S}_1(l)+\tilde{N}_1(l)];$$

$$\hat{S}_1(l) = \begin{cases} \Gamma_1(q)l, & l<l_0, \\ \Gamma_2(q)l_0-[\Gamma_2(q)-\Gamma_1(q)]l, & l\geqslant l_0; \end{cases} \tag{12}$$

$$\langle \hat{N}_1(l)\rangle=0, \quad \langle \hat{N}_1(l_1)\hat{N}_1(l_2)\rangle=\min(l_1,\ l_2). \tag{13}$$

Здесь $\Gamma_1(q)=[q-\ln(1+q)]/q$, $\Gamma_2(q)=(2+q)\ln(1+q)-q$. Согласно (10), границы априорного интервала определения параметра l можно записать как

$$L_1=\Omega_{\min}/2\pi, \quad L_2=[\Omega_{\max}+(2q+q^2)\Omega_0]/2\pi(1+q)^2. \tag{14}$$

Таким образом, функция $\hat{M}(l)$ определена на интервале $[L_1; L_2]$.

Отметим, что при $T\to\infty$ шумовые функции $N_0(\Omega)$, $N_1(\Omega)$, $\hat{N}_1(l)$ являются реализациями асимптотически гауссовских процессов [2]. Следовательно, при достаточно больших значениях времени наблюдения функции $N_0(\Omega)$, $N_1(\Omega)$, $\hat{N}_1(l)$ можно аппроксимировать реализациями гауссовских процессов.

2. ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

Приемник максимального правдоподобия выносит решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t)$ в наблюдаемых данных $x(t)$ на основе сравнения абсолютного максимума $M(\Omega)$ (2), (5) при $\Omega\in[\Omega_{\min}; \Omega_{\max}]$ с порогом h. Решение о наличии сигнала принимается, когда $\max M(\Omega)>h$; в противном случае принимается решение об отсутствии сигнала.

Найдем вероятности ошибок первого рода (ложной тревоги) α и второго рода (пропуска сигнала) β при обнаружении случайного сигнала приемником максимального правдоподобия. При отсутствии полезного сигнала на входе приемника его выходной сигнал $M(\Omega)$ имеет вид (7). Переходя к нормированной статистике $m(\Omega)=M(\Omega)/q\sqrt{\mu}$, где $\mu=T\Omega_{\max}/2\pi$, вероятность ложной тревоги можно записать как $\alpha=P[\max m(\Omega)>u]$ или

$$\alpha=1-F_N(u), \tag{15}$$

где

$$F_N(u)=P\{\min_\Omega[u-m(\Omega)]>0\}=P[\min_\Omega \chi(\Omega)>0], \tag{16}$$
$$\Omega\in[\Omega_{\min}; \Omega_{\max}],$$

а $u=h/q\sqrt{\mu}$ — нормированный порог. Отметим, что функция $F_N(u)$ совпадает с вероятностью непревышения наибольшим выбросом нормированной функции $m(\Omega)$ порога u. В соответствии с [2, 6] и (7) при $T\to\infty$ $\chi(\Omega)=u-m(\Omega)$ является реализацией асимптотически марковского гауссовского процесса. Из (6), (7) находим коэффициенты сноса и диффузии этого процесса

$$a_0=\sqrt{\mu}\,\Gamma_3(q)/\Omega_{\max}, \quad b_0=1/(1+q)^2\Omega_{\max}, \tag{17}$$

где $\Gamma_3(q)=\ln(1+q)/q-1/(1+q)$. Следовательно, при больших T можно аппроксимировать функцию $\chi(\Omega)$ реализацией марковского гауссовского процесса с коэффициентами сноса и диффузии (17). Тогда асимптотически точное при $T\to\infty$ выражение для распределения (16) определяется из решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова [6] с коэффициентами (17) при соответствующих начальном и граничных условиях, как это сделано в [7]. Получив таким образом выражение для распределения (16), после подстановки его в (15) находим вероятность ложной тревоги

$$\alpha=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^*}}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{[\xi-u(1+q)-\nu^*\sqrt{\mu}(1+q)\Gamma_3]^2}{2\nu^*}\right\}\times$$
$$\times\left\{\Phi\left[\sqrt{\mu(1-\nu^*)}(1+q)\Gamma_3+\frac{\xi}{\sqrt{1-\nu^*}}\right]-\exp[-2\xi\sqrt{\mu}(1+q)\Gamma_3]\times\right.$$
$$\left.\times\Phi\left[\sqrt{\mu(1-\nu^*)}(1+q)\Gamma_3-\frac{\xi}{\sqrt{1-\nu^*}}\right]\right\}d\xi, \tag{18}$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [2, 5], $\nu^*=\Omega_{\min}/\Omega_{\max}$, $\nu_0=\Omega_0/\Omega_{\max}$. Формула (18) существенно упрощается, когда $\nu^*\ll 1$, но $\mu\nu^*\gg 1$

(19) $$\alpha\simeq 1-\Phi[u(1+q)+(1+q)\Gamma_3\sqrt{\mu}]+\exp[-2u(1+q)\Gamma_3\sqrt{\mu}]\{1-$$
$$-\Phi[u(1+q)-(1+q)\Gamma_3\sqrt{\mu}]\}.$$

Если $\Omega_{\min}\to\Omega_{\max}$, т. е. априорный интервал определения Ω стягивается в точку, то

(20) $$\alpha=\alpha_0=1-\Phi[u(1+q)+(1+q)\Gamma_3\sqrt{\mu}].$$

Формула (20) совпадает (при $\mu\gg 1$) с вероятностью ложной тревоги при обнаружении случайного сигнала с априори известной шириной спектра мощности [2].

Перейдем к определению вероятности пропуска случайного сигнала β. При наличии сигнала на входе приемника его выходной сигнал имеет вид (8). По определению $\beta(\Omega_0)=P[\max M(\Omega)<h]$, $\Omega\in[\Omega_{\min};\ \Omega_{\max}]$. После преобразования (10) переходим к представлению $M(\Omega)$ в форме (11). Используя нормированную статистику $\hat{m}(l)=\hat{M}(l)/q\sqrt{\mu}$, для вероятности пропуска сигнала получаем выражение

(21) $$\beta(\Omega_0)=P\{\min_l[u-\hat{m}(l)]>0\}=P[\min_l\eta(l)>0],\ l\in[L_1;L_2].$$

Формула (21) определяет вероятность непревышения наибольшим выбросом нормированной статистики $\hat{m}(l)$ порога u. При $T\to\infty$, согласно (13), $\eta(l)=u-\hat{m}(l)$ является реализацией асимптотически гауссовского марковского процесса. Из (12), (13) находим коэффициенты сноса и диффузии этого процесса

(22) $$a_1(l)=\frac{2\pi\sqrt{\mu}}{\Omega_{\max}}\begin{cases}-\Gamma_1, & L_1\leqslant l<l_0,\\ \Gamma_2-\Gamma_1, & l_0\leqslant l\leqslant L_2;\end{cases}$$
$$b_1=2\pi/\Omega_{\max}.$$

Следовательно, при $T\gg 2\pi/\Omega_0$ можно аппроксимировать функцию $\eta(l)$ реализацией марковского гауссовского процесса с коэффициентами сноса и диффузии (22). Тогда асимптотически точное при $T\to\infty$ выражение для вероятности (21) определяется из решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова с коэффициентами (22) при соответствующих начальном и граничных условиях, как это сделано в [7]. Переходя затем в полученном выражении для вероятности пропуска сигнала к прежней переменной — нормированной ширине спектра мощности $\nu=\Omega/\Omega_{\max}$ — с учетом (10), (14) находим, что

(23) $$\beta(\Omega_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_0}}\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{[\xi+\nu_0\Gamma_1\sqrt{\mu}]^2+u^2-2u\Gamma_1\sqrt{\mu}\nu_0}{2\nu_0}\right\}\times$$
$$\times\left\{\exp\left(\frac{\xi u}{\nu_0}\right)\Phi\left[u\sqrt{\frac{\nu_0-\nu^*}{\nu_0\nu^*}}+\xi\sqrt{\frac{\nu^*}{\nu_0(\nu_0-\nu^*)}}\right]-\exp\left(-\frac{\xi u}{\nu_0}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\Phi\left[u\sqrt{\frac{\nu_0-\nu^*}{\nu_0\nu^*}}-\xi\sqrt{\frac{\nu^*}{\nu_0(\nu_0-\nu^*)}}\right]\right\}\left\{\Phi\left[\frac{(\Gamma_2-\Gamma_1)\sqrt{\mu(1-\nu_0)}}{1+q}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\xi(1+q)}{\sqrt{1-\nu_0}}\right]-\exp\left[-2\xi(\Gamma_2-\Gamma_1)\sqrt{\mu}\right]\Phi\left(\frac{(\Gamma_2-\Gamma_1)\sqrt{\mu(1-\nu_0)}}{1+q}-\frac{\xi(1+q)}{\sqrt{1-\nu_0}}\right)\right\}d\xi.$$

Формула (23) существенно упрощается, когда $\nu^*\ll 1$, но $\mu\nu^*\gg 1$,

$$\beta(\Omega_0)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi\nu_0}}\int_0^\infty \operatorname{sh}\left(\frac{\xi u}{\nu_0}\right)\exp\left\{-\frac{[\xi+\nu_0\Gamma_1\sqrt{\mu}]^2+u^2-2u\nu_0\Gamma_1\sqrt{\mu}}{2\nu_0}\right\}\times \tag{24}$$

$$\times\left\{\Phi\left[\frac{(\Gamma_2-\Gamma_1)\sqrt{\mu(1-\nu_0)}}{1+q}+\frac{\xi(1+q)}{\sqrt{1-\nu_0}}\right]-\right.$$

$$\left.-\exp[-2\xi(\Gamma_2-\Gamma_1)\sqrt{\mu}]\,\Phi\left[\frac{(\Gamma_2-\Gamma_1)\sqrt{\mu(1-\nu_0)}}{1+q}-\frac{\xi(1+q)}{\sqrt{1-\nu_0}}\right]\right\}d\xi.$$

При $\Omega_{\min}\to\Omega_{\max}$, т. е. при $\nu^*\to 1$, вероятность пропуска сигнала

$$\beta(\Omega_0)=\beta_0=\Phi(u-\Gamma_1\sqrt{\mu}), \tag{25}$$

что совпадает (при $T\gg 2\pi/\Omega_0$) с вероятностью пропуска случайного сигнала с априори известной шириной спектра мощности [2].

Кроме приемника максимального правдоподобия для обнаружения случайного сигнала с неизвестной шириной спектра мощности можно использовать различные квазиоптимальные системы. В частности, для обнаружения таких сигналов можно использовать подход, развитый в [8] применительно к обнаружению сигналов с неизвестным временным положением. При этом, в отличие от приемника максимального правдоподобия, выходной сигнал которого $M(\Omega)$ (5) формируется для всех значений $\Omega\in[\Omega_{\min};\Omega_{\max}]$, на выходе квазиоптимального приемника формируется случайная величина $M(\hat\Omega)$ — значение функции (5) в одной точке из априорного интервала $\hat\Omega\in[\Omega_{\min};\Omega_{\max}]$. Причем $\hat\Omega$, вообще говоря, не равно истинному значению неизвестной ширины спектра мощности принимаемого случайного сигнала. Такой квазиоптимальный приемник в соответствии с (5) может быть реализован посредством фильтра с передаточной функцией $G(j\omega,\hat\Omega)$ и полосой пропускания $\hat\Omega$. Решение о наличии сигнала принимается, когда $M(\hat\Omega)>h$. В отсутствие сигнала на входе приемника $M(\hat\Omega)=-q\Gamma_3\mu\hat\nu+\hat N_0$, где $\hat\nu=\hat\Omega/\Omega_{\max}$, а $\hat N_0$ — гауссовская случайная величина с параметрами $(0,\,q\sqrt{\mu\hat\nu})$. Следовательно, вероятность ложной тревоги при использовании квазиоптимального приемника

$$\hat\alpha=1-\Phi[(1+q)u/\sqrt{\hat\nu}+(1+q)\Gamma_3\sqrt{\mu\hat\nu}]. \tag{26}$$

При наличии сигнала выходная статистика квазиоптимального приемника имеет вид $M(\hat\Omega)=\mu[q^2\min(\nu_0,\hat\nu)/(1+q)-\hat\nu q\Gamma_3]+\hat N_1$, где $\hat N_1$ — центрированная гауссовская случайная величина, дисперсия которой

$$\langle\hat N_1^2\rangle=q^2\mu\begin{cases}\hat\nu, & \hat\nu<\nu_0,\\ [\hat\nu+(2q+q^2)\nu_0]/(1+q)^2, & \hat\nu\geqslant\nu_0.\end{cases}$$

Так что вероятность пропуска сигнала может быть найдена из формулы

$$\hat\beta(\Omega_0)\begin{cases}\Phi(u/\sqrt{\hat\nu}-\Gamma_1\sqrt{\mu\hat\nu}), & \hat\nu<\nu_0,\\ \Phi\left[\dfrac{u}{\sqrt{\nu_0+\dfrac{\hat\nu-\nu_0}{(1+q)^2}}}-\sqrt{\mu}\dfrac{\Gamma_1\hat\nu-q(\hat\nu-\nu_0)/(1+q)}{\sqrt{\nu_0+\dfrac{\hat\nu-\nu_0}{(1+q)^2}}}\right], & \hat\nu\geqslant\nu_0.\end{cases} \tag{27}$$

В качестве примера рассмотрим характеристики обнаружения случайного сигнала, когда неизвестная ширина его спектра мощности (1) $\Omega_0=$

$=\Omega_{\max}$ ($\nu_0=1$), а $\nu^* \ll 1$. При использовании приемника максимального правдоподобия вероятность ложной тревоги будет определяться из (19), а выражение для вероятности пропуска сигнала (24) принимает вид

$$\beta(\Omega_0=\Omega_{\max}) \simeq \Phi(u-\Gamma_1\sqrt{\mu}) - \exp(2u\Gamma_1\sqrt{\mu})\,[1-\Phi(u+\Gamma_1\sqrt{\mu})].$$

Если для обнаружения используется квазиоптимальный приемник, то, согласно (26), (27), при $\hat{\Omega}=\Omega_{\max}/2$ ($\hat{\nu}=1/2$) вероятности ошибок первого и второго рода равны

$$\hat{\alpha}=1-\Phi[(1+q)u\sqrt{2}+$$

$$+(1+q)\Gamma_3\sqrt{\mu/2}],$$

$$\hat{\beta}(\Omega_0=\Omega_{\max})=\Phi(u\sqrt{2}-\Gamma_1\sqrt{\mu/2}).$$

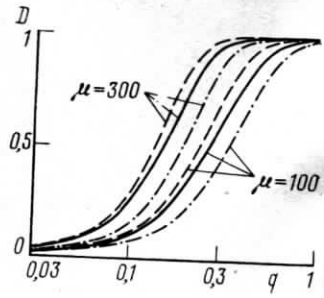

Рис. 1. Кривые обнаружения

На рис. 1 приведены зависимости вероятности правильного обнаружения $D=1-\beta$ случайного сигнала с неизвестной шириной спектра мощности (при $\Omega_0=\Omega_{\max}$) от величины параметра $q=N_s/N_0$ при фиксированном значении вероятности ложной тревоги $\alpha=10^{-2}$ и двух значениях параметра μ. Сплошные кривые представляют зависимости $D(q)$ для приемника максимального правдоподобия, а штрихпунктирные кривые – зависимости $D(q)$ для квазиоптимального приемника. На этом же рисунке для сравнения пунктиром изображены зависимости $D(q)$ для случайного сигнала с априори известной шириной спектра мощности, рассчитанные по формулам (20), (25). Из рис. 1 видно, что при $\Omega_0=\Omega_{\max}$ потери в качестве обнаружения за счет незнания ширины спектра мощности случайного сигнала относительно невелики при использовании приемника максимального правдоподобия. Применение квазиоптимального приемника приводит к существенно бóльшим потерям. При помощи кривых рис. 1 можно определить проигрыш в качестве обнаружения при использовании квазиоптимального приемника вместо более сложного приемника максимального правдоподобия.

3. ОЦЕНКА ШИРИНЫ СПЕКТРА МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

Рассмотрим характеристики приемника максимального правдоподобия, когда производится оценка неизвестной ширины Ω_0 спектра мощности (1) случайного сигнала $s(t)$. При этом предполагается, что сигнал $s(t)$ присутствует на входе приемника с вероятностью 1. Оценка параметра Ω_0 определяется как положение Ω_m абсолютного максимума $M(\Omega)$ (8) на интервале $[\Omega_{\min}; \Omega_{\max}]$. Следовательно, распределение оценки можно записать в виде

$$P_m(\tilde{\Omega})=P[\Omega_m<\tilde{\Omega}]=P[\max_{[\Omega_{\min};\tilde{\Omega})} M(\Omega) > \max_{[\tilde{\Omega};\Omega_{\max}]} M(\Omega)],$$

$$\tilde{\Omega}\in[\Omega_{\min};\Omega_{\max}].$$

Оценка максимального правдоподобия Ω_m в силу преобразования (10) однозначно связана с положением l_m абсолютного максимума функции $\hat{M}(l)$ (11). Поэтому для нахождения распределения $P_m(\tilde{\Omega})$ оценки Ω_m достаточно определить функцию распределения случайной величины l_m, которая по определению имеет вид

(28) $$P_m(L)=P[l_m<L]=P[\max_{[L_1;L)} \hat{M}(l) > \max_{[L;L_2]} \hat{M}(l)],\quad L\in[L_1;L_2].$$

Обозначая $\Delta(l)=[\hat{M}(l)-\hat{M}(L)]/q\sqrt{T}$, перепишем (28) как

$$P_m(L)=P[\max_{[L_1;L]}\Delta(l) > \max_{[L;L_2]}\Delta(l)].$$

Следовательно, распределение случайной величины l_m можно выразить через двумерную функцию распределения абсолютных максимумов реализации $\Delta(l)$

$$P(u,v,L)=P[\max_{[L_1;L)}\Delta(l)<u,\ \max_{[L;L_2]}\Delta(l)<v].$$

Учитывая, что при $T\to\infty$ $\Delta(l)$ является реализацией гауссовского случайного процесса, найдем его функцию корреляции $K_\Delta(l_1, l_2)$, которая в соответствии с (13) равна

$$K_\Delta(l_1,l_2)=\begin{cases}\min(|L-l_1|,\ |L-l_2|), & (L-l_1)(L-l_2)\geqslant 0,\\ 0, & (L-l_1)(L-l_2)<0.\end{cases}\tag{29}$$

Таким образом, если $T\gg 2\pi/\Omega_0$, то отрезки реализаций процесса $\Delta(l)$ на интервалах $[L_1;\ L)$ и $[L;\ L_2]$ приближенно независимы. Значит, для больших T

$$P(u,v,L)\simeq P[\max_{[L_1;L)}\Delta(l)<u]P[\max_{[L;L_2]}\Delta(l)<v]=P_{1L}(u)P_{2L}(v),$$

а распределение случайной величины l_m равно [9]

$$P_m(L)=\int_0^\infty P_{2L}(u)\,dP_{1L}(u).\tag{30}$$

Воспользовавшись формулировкой теоремы Дуба, приведенной в [10], получаем, что при $T\to\infty$ функция $\Delta(l)$ является, в соответствии с (29), реализацией асимптотически марковского гауссовского процесса. Из (12) и (29) находим коэффициенты сноса и диффузии этого процесса

$$a(l)=\sqrt{T}\begin{cases}\Gamma_1, & L_1\leqslant l<l_0,\\ \Gamma_1-\Gamma_2, & l_0\leqslant l\leqslant L_2;\end{cases}\qquad b=1.\tag{31}$$

Приближенные выражения для распределений $P_{1L}(u)$, $P_{2L}(v)$ определяются из решения соответствующих краевых задач для уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, как это сделано в [7, 9]. В полученном таким образом распределении $P_m(L)$ (30) переходим с учетом (10), (14) от аргумента $L\in[L_1;\ L_2]$ к аргументу $\tilde\Omega\in[\Omega_{\min};\ \Omega_{\max}]$. При этом асимптотические (при $T\to\infty$) свойства полученной функции распределения $P_m(\tilde\Omega)$ оценки максимального правдоподобия Ω_m зависят существенным образом от того, является ли истинное значение Ω_0 строго внутренней точкой из априорного интервала $[\Omega_{\min};\ \Omega_{\max}]$ или совпадает с одной из его границ. Поэтому все три случая: $\Omega_0\in(\Omega_{\min};\ \Omega_{\max})$, $\Omega_0=\Omega_{\max}$, $\Omega_0=\Omega_{\min}$ требуют отдельного рассмотрения, как это сделано в [7].

Положим сначала, что Ω_0 лежит строго внутри априорного интервала, $\Omega_0\in(\Omega_{\min};\ \Omega_{\max})$. Исследуя аналогично [7] поведение распределения оценки $P_m(\tilde\Omega)$, находим асимптотически точные при $T\to\infty$ выражения для условных смещения и рассеяния оценки ширины спектра мощности

$$d(\Omega_m|\Omega_0)\equiv\langle\Omega_m-\Omega_0|\Omega_0\rangle\simeq(\pi/T)\,[\Gamma_1^3(2\Gamma_2-\Gamma_1)(1+q)^2-(\Gamma_2-\Gamma_1)^3(\Gamma_1+\Gamma_2)]/[\Gamma_1^2\Gamma_2^2(\Gamma_2-\Gamma_1)^2],\tag{32}$$

$$V(\Omega_m|\Omega_0)\equiv\langle(\Omega_m-\Omega_0)^2|\Omega_0\rangle\simeq(2\pi^2/T^2)\,\{[2\Gamma_2^3-\Gamma_1^2(\Gamma_1+\Gamma_2)](\Gamma_2-\Gamma_1)^4+\Gamma_1^4(1+q)^4[2\Gamma_2^3-(\Gamma_2-\Gamma_1)^2(2\Gamma_2-\Gamma_1)]\}/[\Gamma_1^4\Gamma_2^3(\Gamma_2-\Gamma_1)^4].\tag{33}$$

Отметим, что правые части выражений (32), (33) не зависят от истинного значения Ω_0 ширины спектра мощности (1). Следовательно, условные смещение и рассеяние оценки максимального правдоподобия Ω_m, когда $\Omega_0\in(\Omega_{\min};\ \Omega_{\max})$, асимптотически (при $T\to\infty$) совпадают с соответствующими безусловными характеристиками. Кроме того, анализ формулы (32) показывает, что при любых $q>0$ $d(\Omega_m|\Omega_0)\leqslant 0$, $\Omega_0\in(\Omega_{\min};\ \Omega_{\max})$.

Поскольку при $\Omega_0 \in (\Omega_{\min}; \Omega_{\max})$ смещение оценки (32) при $T \gg 2\pi/\Omega_0$ постоянно, то при необходимости нетрудно найти асимптотически несмещенную (при $T\to\infty$) оценку $\Omega_m^* = \Omega_m - d(\Omega_m|\Omega_0)$. Эта оценка обладает такой же дисперсией, что и оценка максимального правдоподобия Ω_m:

$$D(\Omega_m|\Omega_0) \equiv \langle(\Omega_m - \langle\Omega_m\rangle)^2|\Omega_0\rangle = \langle(\Omega_m^* - \Omega_0)^2|\Omega_0\rangle \simeq$$
$$\simeq (\pi^2/T^2)\{[3\Gamma_2^4 - 2\Gamma_1^3\Gamma_2 - \Gamma_1^4]/(\Gamma_1^4\Gamma_2^4) + (1+q)^4[4\Gamma_2^4 -$$
$$-2\Gamma_2(\Gamma_2-\Gamma_1)^2(2\Gamma_2-\Gamma_1) - \Gamma_1^2(2\Gamma_2-\Gamma_1)^2]/[\Gamma_1^4(\Gamma_2-\Gamma_1)^4] +$$
$$+2(1+q)^2(2\Gamma_2-\Gamma_1)(\Gamma_1+\Gamma_2)/[\Gamma_1\Gamma_2^4(\Gamma_2-\Gamma_1)]\}. \tag{34}$$

Выражения (32), (34) существенно упрощаются, когда $q \ll 1$ или $q \gg 1$. В частности, пусть $q \ll 1$, но выполняется условие $T\Omega_0 q^2 \gg 1$, что обеспечи-

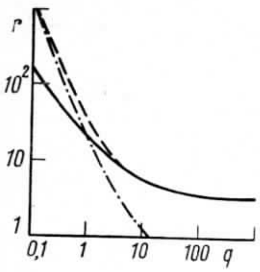

Рис. 2. Нормированный модуль смещения оценки

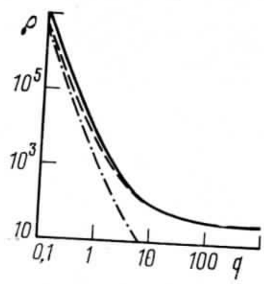

Рис. 3. Нормированная дисперсия оценки

вает высокую апостериорную точность оценки. В этом случае

$$d(\Omega_m|\Omega_0) \simeq -14\pi/3qT,\ D(\Omega_m|\Omega_0) \simeq 104\pi^2/q^4T^2.$$

Аналогично, для $q \gg 1$ имеем

$$d(\Omega_m|\Omega_0) \simeq -\pi/T,\ \ D(\Omega_m|\Omega_0) \simeq 3\pi^2/T^2. \tag{35}$$

Из формул (35) следует, что дисперсия оценки Ω_m при $q\to\infty$ и конечных значениях времени наблюдения T ограничена снизу, т. е. оценка ширины спектра мощности (1) несингулярна в отсутствие белого шума, если $\Omega_0 \in (\Omega_{\min}; \Omega_{\max})$.

Заметим, что оценка максимального правдоподобия ширины спектра мощности, являющегося достаточно гладкой функцией частоты, сингулярна в отсутствие белого шума [5].

Рассмотрим теперь случай, когда $\Omega_0 = \Omega_{\max}$. Исследуя аналогично [7] поведение распределения оценки при $\Omega_0 = \Omega_{\max}$ и $T\to\infty$, получаем асимптотически точные выражения для условных смещения, рассеяния и дисперсии оценки

$$d(\Omega_m|\Omega_{\max}) \equiv \langle\Omega_m - \Omega_{\max}|\Omega_{\max}\rangle \simeq -\pi/T\Gamma_1^2, \tag{36}$$
$$V(\Omega_m|\Omega_{\max}) \equiv \langle(\Omega_m - \Omega_{\max})^2|\Omega_{\max}\rangle \simeq 4\pi^2/T^2\Gamma_1^4,$$

$$D(\Omega_m|\Omega_{\max}) \equiv \langle(\Omega_m - \langle\Omega_m\rangle)^2|\Omega_{\max}\rangle \simeq 3\pi^2/T^2\Gamma_1^4. \tag{37}$$

В заключение остановимся на случае, когда $\Omega_0 = \Omega_{\min}$. Аналогично [7], исследуя асимптотические свойства распределения оценки при $\Omega_0 = \Omega_{\min}$ и $T\to\infty$, находим асимптотически точные выражения для условных характеристик

$$d(\Omega_m|\Omega_{\min}) \equiv \langle\Omega_m - \Omega_{\min}|\Omega_{\min}\rangle \simeq \pi(1+q)^2/T(\Gamma_2-\Gamma_1)^2, \tag{38}$$
$$V(\Omega_m|\Omega_{\min}) \equiv \langle(\Omega_m - \Omega_{\min})^2|\Omega_{\min}\rangle \simeq 4\pi^2(1+q)^4/T^2(\Gamma_2-\Gamma_1)^4,$$

$$D(\Omega_m|\Omega_{\min}) \equiv \langle(\Omega_m - \langle\Omega_m\rangle)^2|\Omega_{\min}\rangle \simeq 3\pi^2(1+q)^4/T^2(\Gamma_2-\Gamma_1)^4. \tag{39}$$

На рис. 2 приведены зависимости нормированного модуля смещения $r = T|d(\Omega_m|\Omega_0)|$, а на рис. 3 — нормированной дисперсии $\rho = T^2D(\Omega_m|\Omega_0)$

оценки от параметра q. Сплошные кривые рассчитаны по формулам (32), (34) для $\Omega_0 \in (\Omega_{min}; \Omega_{max})$, пунктирные – для $\Omega_0 = \Omega_{max}$ по формулам (36), (37) и штрихпунктирные – для $\Omega_0 = \Omega_{min}$ по формулам (38), (39).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1972, т. 1.
2. *Бакут П. А., Большаков И. А., Герасимов Б. М. и др.* Вопросы статистической теории радиолокации/Под ред. Тартаковского Г. П. М.: Сов. радио, 1963, т. 1.
3. *Галун С. А.* В кн.: Системы и средства обработки, передачи и приема информации. Воронеж: Политехнический ин-т, 1980, с. 137.
4. *Трифонов А. П.* Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 4, с. 749.
5. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
6. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
7. *Трифонов А. П.* Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 1, с. 90.
8. *Горяинов В. Т.* Изв. вузов МВССО СССР (Радиоэлектроника), 1970, т. 13, № 7, с. 787.
9. *Терентьев А. С.* Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 4, с. 652.
10. *Kailath T.* IEEE Trans., 1966, v. IT-12, № 4, p. 442.

Поступила в редакцию
6.IV.1981