(70)

(70)

РАДИОТЕХНИКА

1983,№8

Тогда

$$\overline{\operatorname{ch}[2\hat{\varphi}(t)]} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{[2\hat{\varphi}(t)]^{2n}} \frac{1}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{[\hat{\varphi}(t)]^{2n}} \times \frac{2^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 + \left[\frac{8m_\text{ф}^2}{\pi^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\pi}{k} \overline{\cos k\Omega t} \right)^2 \frac{1}{2} + \ldots \right].$$

Ограничимся первым слагаемым в квадратных скобках последнего выражения и учтем, что

$$1 - \cos k\pi = \begin{cases} 0 \text{ для четных } k, \\ 2 \text{ для нечетных } k. \end{cases}$$

Тогда получим

$$\overline{\operatorname{ch}[2\hat{\varphi}(t)]} \approx 1 + \frac{8m_\text{ф}^2}{\pi^2} \left(2^2\, \overline{\cos^2 \Omega t} + \frac{2^2}{3^2} \overline{\cos^2 3\Omega t} + \frac{2^2}{5^2} \overline{\cos^2 5\Omega t} + \ldots \right) \frac{1}{2} \approx$$

$$\approx 1 + 2\left(\frac{2m_\text{ф}}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = 1 + m_\text{ф}^2 > 1.$$

Следовательно, потенциальная помехоустойчивость системы связи с однополосной угловой манипуляцией выше, чем с двухполосной $УМ_н$.

Объяснить увеличение потенциальной помехоустойчивости системы связи ОБП $УМ_н$ по сравнению с двумя боковыми полосами можно тем, что ОБП $УМ_н$ формируется путем одновременной $АМ_н$ и $УМ_н$. А при АМ средняя мощность возрастает в $1 + \frac{M^2}{2}$ раз (M — глубина АМ) по сравнению с колебанием несущей частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кувшинов Б. И. Радиотехника, 1970, т. 25, № 2.
2. Зюко А. Г. Помехоустойчивость и эффективность систем связи.— М.: Связь, 1972.
3. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости.— М.: Госэнергоиздат, 1956.

Поступила после доработки 1 февраля 1983 г.

УДК 621.391

А. П. ТРИФОНОВ, Е. П. ЕНИНА

ПОРОГОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

С учетом аномальных ошибок найдено рассеяние оценки максимального правдоподобия. Рассчитано пороговое значение отношения спектральных плотностей сигнала и помехи.

Во многих прикладных задачах статистической радиотехники необходимо производить измерение несущей частоты или доплеровского смещения частоты флуктуирующих радиосигналов. При гауссовских флуктуациях радиосигнала эта задача сводится к оценке смещения центральной частоты спектра мощности узкополосного центрированного стационарного гауссовского случайного процесса

$$s(t, \nu_0) = a(t)\cos[(\omega_0 + \nu_0)t + \varphi(t)], \qquad (1)$$

принимаемого на фоне гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0. Спектр мощности сигнала (1) запишем как [1]

$$G(\omega, \nu) = \frac{G_0}{2}\left[f\left(\frac{\omega - \omega_0 - \nu}{\theta}\right) + f\left(\frac{\omega + \omega_0 + \nu}{\theta}\right)\right], \qquad (2)$$

где $f(x)$ определяет форму спектра мощности и нормирована так, что $\max f(x) = 1$ $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = 1$; $\theta = \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega, \nu)\,d\omega\,[2\max G^2(\omega, \nu)]^{-1}$ — эквивалентная полоса частот сигнала (1).

Положим, что неизвестное смещение частоты ν_0 распределено равновероятно в интервале $[-\Omega/2;\ \Omega/2]$ и $\theta \ll \omega_0$, $\Omega \ll \omega_0$. Обозначим $\mu = T\theta/2\pi$ и рассмотрим характеристики оценки максимального правдоподобия ν_m смещения частоты ν_0 при

$$\mu \gg 1. \tag{3}$$

Задача оценки ν_0 исследовалась в [2, 3 и др.]. Однако были получены лишь характеристики надежной оценки, т. е. в пренебрежении пороговыми эффектами. В то же время, когда интервал возможных значений смещения частоты велик, так что

$$m = \Omega/\theta \gg 1, \tag{4}$$

и отношение $q = G_0/N_0$ мало, возможно появление аномальных ошибок [3]. В результате рассеяние (средний квадрат ошибки) оценки ν_m может существенно превосходить дисперсию надежной оценки, найденную в [2, 3 и др.].

Оценка максимального правдоподобия ν_m определяется как положение абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия $M(\nu)$ при $\nu \in [-\Omega/2;\ \Omega/2]$. В рассматриваемом случае для $M(\nu)$ справедливо представление [2, 3]

$$M(\nu) = S(\nu - \nu_0) + N(\nu) + C, \tag{5}$$

где $C = \mu q \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,[1 + qf(x)]^{-1}\,dx$ — несущественная постоянная,

$$S(\nu) = \frac{\mu q^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,[f(x - \nu/\theta) + f(x + \nu/\theta)]}{1 + qf(x)}\,dx \tag{6}$$

— сигнальная функция, $N(\nu)$ — шумовая функция, которую при выполнении (3) можно приблизительно считать реализацией центрированного гауссовского случайного процесса [1—3].

Аналогично [3—5] разобьем весь интервал возможных значений смещения частоты $[-\Omega/2;\ \Omega/2]$ на два интервала: Ω_S и Ω_N. К Ω_S отнесем часть интервала $[-\Omega/2;\ \Omega/2]$, где сигнальная функция $S(\nu - \nu_0) \neq 0$, к Ω_N — значения $\nu \in [-\Omega/2;\ \Omega/2]$, для которых $S(\nu - \nu_0) \approx 0$. Когда $\nu_1, \nu_2 \in \Omega_N$, из [2, 3] находим

$$\langle N(\nu_1)\,N(\nu_2)\rangle = K_N(\nu_1,\ \nu_2) = K_N(\Delta) = K_N(-\Delta) = \frac{\mu q^2}{2} \times$$
$$\times \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,f(x + \Delta/\theta)\,dx}{[1 + qf(x)]\,[1 + qf(x + \Delta/\theta)]} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,f(x - \Delta/\theta)\,dx}{[1 + qf(x)]\,[1 + qf(x - \Delta/\theta)]} \right\}, \tag{7}$$

где $\Delta = \nu_1 - \nu_2$.

Согласно (7) при $\nu \in \Omega_N$ шумовая функция $N(\nu)$ представляет собой реализацию стационарного случайного процесса. Следовательно, когда выполняются (3), (4) безусловное рассеяние оценки ν_m можно записать в виде [3, 4]

$$V(\nu_m) = \langle(\nu_m - \nu_0)^2\rangle = P_0\,D(\nu_m) + (1 - P_0)\,\Omega^2/6. \tag{8}$$

Здесь $D(\nu_m)$ — дисперсия, P_0 — вероятность надежной оценки. Из [3, 4] получаем

$$D(\nu_m) = \theta^2/\mu q^2\,\gamma, \quad \gamma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [df(x)/dx]^2\,[1 + qf(x)]^{-2}\,dx, \tag{9}$$

$$P_0 = \int P_N(H)\,d\,P_S(H), \tag{10}$$

где $P_S(H)$, $P_N(H)$ — распределения величин абсолютного максимума $M(\nu)$ (5) при $\nu \in \Omega_S$ и $\nu \in \Omega_N$. Согласно (3), (5)—(7) свойства логарифма функционала отношения правдоподобия $M(\nu)$ позволяют для расчета вероятности надежной оценки (10) использовать аппроксимации функций $P_S(H)$ и $P_N(H)$, предложенные в [3—4]. В результате находим

$$P_0 \approx \frac{1}{\eta\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - q\alpha\sqrt{\mu})^2}{2\eta^2} - \frac{m\beta}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] dx, \tag{11}$$

где $\eta = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,[1 + qf(x)]^{-2}\,dx \right\}^{-1/2}$, $\alpha = \eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,[1 + qf(x)]^{-1}\,dx$, $\beta = \eta \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} [df(x)/dx]^2\,[1 + qf(x)]^{-4}\,dx \right\}^{1/2}$.

Подставляя (9) и (11) в (8), получаем рассеяние оценки максимального правдоподобия смещения частоты случайного сигнала (1) с учетом пороговых эффектов.

Однако формула (11) для вероятности надежной оценки довольно громоздка и расчет по ней возможен лишь численными методами. Поэтому найдем простую верхнюю границу для вероятности аномальных ошибок $P_a = 1 - P_0$. Воспользовавшись неравенством $1 - \exp(-x) \leqslant x$ при $x \geqslant 0$, из (11) имеем

$$P_a \leqslant P_a^* = (m\beta/2\pi\sqrt{1+\eta^2})\exp[-\mu q^2 \alpha^2/2(1+\eta^2)].$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением вероятности надежной оценки. Поэтому, когда вероятность P_a мала, как это обычно бывает в практических приложениях, вместо (8) можно использовать более простое, но несколько менее точное выражение

$$V(\nu_m) = \frac{\theta^2}{\mu q^2 \gamma} + \frac{m\beta\,\Omega^2}{12\pi\sqrt{1+\eta^2}} \exp\left[-\frac{\mu q^2 \alpha^2}{2(1+\eta^2)}\right]. \qquad (12)$$

Представляет интерес найти значения q (для заданных μ и m), при которых влияние пороговых эффектов достаточно мало. Назовем порогом величину q_0, при которой рассеяние оценки ν_m (12) превышает дисперсию надежной оценки (9) не более чем на 3 дБ. Тогда q_0 можно рассчитать на основе формул (8), (9), (11), (12).

В качестве примера рассмотрим оценку смещения частоты случайного сигнала, форма спектра мощности которого описывается функцией

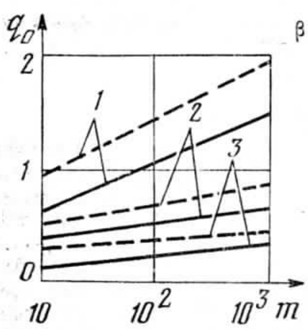
$$f(x) = [1 + (\pi x/2)^2]^{-1}. \qquad (13)$$

Спектру мощности (2), (13) соответствует корреляционная функция

$$K(\tau, \nu) = (G_0\,\theta/2\pi)\exp(-2\theta\,|\tau|/\pi)\cos(\omega_0 + \nu)\tau.$$

Для этого примера получаем

$$\left.\begin{aligned} \eta = (1+q)^{3/4}, \quad \alpha = 2(1+q)^{1/4}(\sqrt{1+q} - 1)/q \\ \beta = \pi/2\sqrt{2(1+q)}, \quad \gamma = \pi^2/(1+\sqrt{1+q})^2\sqrt{1+q}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$



Подстановка (14) в (8), (9), (11), (12) позволяет рассчитать порог q_0. Зависимости $q_0(m)$ для различных μ изображены на рисунке (непрерывные линии). Кривая *1* рассчитана для $\mu = 100$, *2*—$\mu = 300$, *3*—$\mu = 1000$.

Однако полученные формулы неприменимы, когда спектр мощности сигнала (1) недифференцируем. Таким спектром мощности обладает полосовой случайный сигнал [5], для которого $f(x) = 1$ при $|x| < 1/2$ и $f(x) = 0$ при $|x| > 1/2$. Пороговые характеристики оценки смещения частоты полосового случайного сигнала можно найти, используя результаты [5]. В частности, для малых значений P_a рассеяние оценки имеет вид

$$V_1(\nu_m) = \frac{13\pi^2(2+2q+q^2)^2}{2T^2 q^4} + \frac{\Omega^2 m}{12}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\left[\frac{1+q}{(1+q/2)^2}\right]^{\mu}.$$

Рассчитанные по этой формуле зависимости порога $q_{01}(m)$ даны на рисунке (штриховые линии). Сравнение этих кривых показывает, что для недифференцируемого спектра мощности влияние пороговых эффектов значительнее, чем для дифференцируемого (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника.— М.: Сов. радио, 1966.
2. Куликов Е. И. Радиотехника и электроника, 1964, т. IX, № 10.
3. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М.: Сов. радио, 1978.
4. Маршаков В. К., Трифонов А. П. Радиотехника и электроника, 1974, т. XIX, № 11.
5. Трифонов А. П. Радиотехника и электроника. 1980. т. XXV, № 4.

Поступила 19 декабря 1982 г.