

44

74

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ МВ и ССО СССР РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ТОМ 27 № 5

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ — 1984

УДК 621.391.63

АНАЛИЗ ПОРОГОВЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ОЦЕНКЕ ВРЕМЕНИ ПРИХОДА ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

ТРИФОНОВ А. П., ЕНИНА Е. П.

Найдены характеристики оценки максимального правдоподобия и байесовской оценки при квадратичной функции потерь с учетом аномальных ошибок. Показано, что применение байесовского алгоритма позволяет уменьшить ошибки оценивания в пороговой области.

В работах [1, 2] рассматривалось две оценки времени прихода: оценка максимального правдоподобия (ОМП) и байесовская оценка (БО) при квадратичной функции потерь. Точность обеих оценок в [1, 2] фактически характеризуется дисперсией эффективной оценки. Естественно, возникает вопрос, насколько близка полученная таким образом дисперсия оценки к истинному ее значению в зависимости от интенсивности сигнала и помехи, формы сигнала и длины априорного интервала возможных значений неизвестного времени прихода. Практическая ценность любого алгоритма оценивания существенно снижается при малых интенсивностях сигнала и больших априорных интервалах времени прихода, вследствие появления аномальных ошибок и возникновения пороговых эффектов [3—5]. В связи с этим рассмотрим характеристики ОМП и БО времени прихода оптического сигнала с учетом аномальных ошибок.

Будем считать, что на интервале времени $[-T/2; T/2]$ наблюдается реализация пуассоновского процесса $\xi(t)$ с интенсивностью $\lambda(t) = \lambda_s(t - \tau_0) + \lambda_0$. Здесь λ_0 — постоянная интенсивность помехи; $\lambda_s(t) = \lambda_1 f(t/\theta)$ — интенсивность полезного оптического сигнала; λ_1 — максимальная интенсивность сигнала; τ — неизвестное время прихода оптического сигнала, распределенное равномерно в интервале $[-T/2; T/2]$. Функция $f(\cdot)$ описывает форму интенсивности полезного оптического сигнала и нормирована так, что $\max f(x) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1$, а $\theta =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_s^2(t) dt [\max \lambda_s^2(t)]^{-1}$ — эквивалентная длительность сигнала. Для получения ОМП или БО необходимо, чтобы приемник вырабатывал логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП) $M(\tau)$ [3] для всех $\tau \in [-T/2; T/2]$. Полагая, что

$$T \gg \theta \quad (1)$$

и пренебрегая постоянным слагаемым, можем записать [6]

$$M(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} \ln \{1 + qf[(t - \tau)/\theta]\} d\xi(t), \quad (2)$$

где $q = \lambda_1/\lambda_0$. ОМП τ_m определяется как положение абсолютного максимума ЛФОП (2), а БО γ_m — формулой [1, 3]

$$\gamma_m = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} \tau \exp[M(\tau)] d\tau}{\int_{-T/2}^{T/2} \exp[M(\tau)] d\tau}. \quad (3)$$

Отметим, что в общем случае техническая реализация БО может оказаться более сложной, чем реализация ОМП [1]. Аналогично [3—5] представим ЛФОП (2) в виде $M(\tau) = \mu S(\tau - \tau_0) + \sqrt{\mu} N(\tau) + C$, где $C = \lambda_0 \theta \int_{-\infty}^{\infty} \ln \psi(x) dx$ — несущественная постоянная; $\psi(x) = 1 + qf(x)$; $\mu =$

$= \lambda_1 \theta$, $S(\tau - \tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f[x + (\tau - \tau_0)/\theta] \ln \psi(x) dx$ — сигнальная функция,

а $N(\tau)$ — шумовая функция, первые два момента которой не зависят от μ . Вычисляя кумулянты шумовой функции, получаем, что при выполнении условий

$$\mu \gg 1, \mu/q \gg 1 \quad (4)$$

шумовую функцию $N(\tau)$ можно приближенно считать реализацией гауссовского центрированного случайного процесса [7, 8].

Найдем рассеяние ОМП τ_m с учетом аномальных ошибок. Для этого введем в рассмотрение длительность сигнальной функции Δ , которую определим из условия $S(\pm\Delta) \approx 0$. Обозначим T_s — интервал $[\tau_0 - \Delta; \tau_0 + \Delta]$ и T_N — остальную часть априорного интервала $[-T/2; T/2]$. Когда $\tau_1, \tau_2 \in T_N$, находим, что

$$\langle N(\tau_1) N(\tau_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \psi[x + (\tau_1 - \tau_2)/\theta] \ln \psi(x) dx / q. \quad (5)$$

Следовательно, при $\tau \in T_N$ шумовая функция представляет собой реализацию стационарного случайного процесса. Поэтому, когда выполняются (1), (4), безусловное рассеяние ОМП времени прихода оптического сигнала можно записать в виде [3, 4]

$$V(\tau_m) = \langle (\tau_m - \tau_0)^2 \rangle = P_0 D(\tau_m) + (1 - P_0) T^2 / 6. \quad (6)$$

Здесь $D(\tau_m)$ — дисперсия, а P_0 — вероятность надежной оценки. В качестве дисперсии надежной оценки при больших μ можно использовать дисперсию эффективной оценки [1, 2]

$$D(\tau_m) = \theta^2 / \mu \nu, \quad \nu = q \int_{-\infty}^{\infty} [df(x)/dx]^2 \psi^{-1}(x) dx. \quad (7)$$

Поскольку при выполнении (1), (4) ЛФОРП является реализацией гауссовского случайного процесса, то с учетом (5) из [3, 4] для вероятности надежной оценки получаем

$$P_0 = \frac{1}{\eta \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - \alpha \sqrt{V\mu})^2}{2\eta^2} - \frac{m\beta}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] dx, \quad (8)$$

$$\text{где } \eta = \left[1 + q \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln^2 \psi(x) dx / \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2 \psi(x) dx \right]^{1/2},$$

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \psi(x) dx \sqrt{q / \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2 \psi(x) dx},$$

$$\beta = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d \ln \psi(x)}{dx} \right]^2 dx / \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2 \psi(x) dx \right\}^{1/2}, \quad m = \frac{T}{\theta}.$$

Подставляя (7) и (8) в (6), находим приближенное выражение для рассеяния ОМП времени прихода оптического сигнала. Точность этой формулы улучшается с ростом μ и m . Используя (8), нетрудно показать, что $P_0 \rightarrow 1$, когда $q \rightarrow \infty$. Таким образом, при достаточно больших q , $V(\tau_m) \approx D(\tau_m)$. Формула (8) для вероятности надежной оценки довольно громоздка и расчет по ней возможен лишь численными методами. Поэтому найдем простую верхнюю границу для вероятности аномальных ошибок $P_a = 1 - P_0$. Воспользовавшись неравенством

$1 - \exp(-x) \leq x$ при $x > 0$, из (8) имеем: $P_a \leq P_a^* = (m\beta/2\pi\sqrt{1+\eta^2}) \exp[-\mu\alpha^2/2(1+\eta^2)]$. Точность формулы возрастает с увеличением вероятности надежной оценки P_0 . Поэтому, когда вероятность аномальных ошибок P_a мала, как это обычно бывает в практических применениях, вместо (6) можно использовать более простое, но и несколько менее точное выражение

$$V(\tau_m) = \frac{\theta^2}{\mu\nu} + \frac{m\beta T^2}{12\pi\sqrt{1+\eta^2}} \exp\left[-\frac{\mu\alpha^2}{2(1+\eta^2)}\right]. \quad (9)$$

Используя (6)–(9), можно указать минимальное значение q (для заданных μ и m), при превышении которого влияние пороговых эффектов достаточно мало.

Найдем далее рассеяние БО γ_m (3) времени прихода оптического сигнала. Учитывая установленные свойства ЛФОР (2), при выполнении (1), (4), следуя [3, 5], получаем выражение для условного рассеяния БО в виде

$$V(\gamma_m/\tau_0) = \langle (\gamma_m - \tau_0)^2 \rangle \simeq -[d^2 \langle \ln \Psi(u, \tau_0) \rangle / du^2]_{u=0}. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \Psi(u, \tau_0) = & \int_{\tau_0-\Delta}^{\tau_0+\Delta} \exp[ju\tau + \mu S(\tau - \tau_0)] d\tau/T + \\ & + \int_{-T/2}^{T/2} \exp[ju\tau + V\bar{\mu}N(\tau)] d\tau/T, \end{aligned}$$

а усреднение выполняется при фиксированном истинном значении τ_0 времени прихода оптического сигнала. Когда μ достаточно велико (4), справедлива приближенная формула [3, 5]

$$\langle \ln \Psi(u, \tau_0) \rangle \simeq \ln \Psi_0(u, \tau_0), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(u, \tau_0) = & \int_{\tau_0-\Delta}^{\tau_0+\Delta} \exp[ju\tau + \mu S(\tau - \tau_0)] d\tau/T + \\ & + \int_{-T/2}^{T/2} \exp(ju\tau) \langle \exp[V\bar{\mu}N(\tau)] \rangle d\tau/T. \end{aligned} \quad (12)$$

Воспользовавшись приведенным в [7] выражением для характеристической функции профильтрованного пуассоновского процесса, получаем

$$\langle \exp[V\bar{\mu}N(\tau)] \rangle = \exp\left\{\mu \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - \ln \psi(x)/q] dx\right\}. \quad (13)$$

Выполняя с учетом (11)–(13) дифференцирование в (10), приходим к приближенной формуле для условного рассеяния БО

$$V(\gamma_m/\tau_0) \simeq \tilde{P}_0(\tau_0^2 + 2\tau_0 a_1 + a_2) - \tilde{P}_0^2(\tau_0 + a_1)^2 + (1 - \tilde{P}_0)T^2/12. \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \tilde{P}_0 = & \int_{-\Delta}^{\Delta} \exp[\mu S(x)] dx \left[\int_{-\Delta}^{\Delta} \exp[\mu S(x)] dx + \right. \\ & \left. + T \exp\left\{\mu \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - \ln \psi(x)/q] dx\right\} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

$$a_k = \int_{-\Delta}^{\Delta} x^k \exp[\mu S(x)] dx / \int_{-\Delta}^{\Delta} \exp[\mu S(x)] dx, \quad k = 1, 2.$$

Приближенные значения этих интегралов найдем с помощью асимптотической формулы Лапласа [9]. В результате для достаточно больших μ имеем:

$$\tilde{P}_0 \simeq [1 + m \sqrt{\mu\nu/2\pi} \exp(-\mu\varepsilon)]^{-1}, \quad (15)$$

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x) \ln \psi(x) - qf(x)] dx/q, \quad a_1 \simeq 0, \quad a_2 \simeq \theta^2/\mu\nu.$$

Подставляя (15) в (14) и выполняя усреднение по значениям τ_0 , находим безусловно рассеяние БО времени прихода оптического сигнала

$$V(\gamma_m) \simeq \theta^2 \tilde{P}_0 / \mu\nu + (1 - \tilde{P}_0)^2 T^2 / 12. \quad (16)$$

Эта формула является приближенной, однако ее точность возрастает с увеличением μ и m . Используя (15), нетрудно показать, что $\tilde{P}_0 \rightarrow 1$, когда $q \rightarrow \infty$. Таким образом, при достаточно большом значении отношения q интенсивностей сигнала и помехи рассеяние БО (как и рассеяние ОМП) совпадает с дисперсией эффективной оценки. Если уровень аномальных ошибок мал, так что $\tilde{P}_0$ близко к 1, то, аналогично (9), выражение (16) можно несколько упростить, преобразовав его к виду

$$V(\gamma_m) \simeq \theta^2 / \mu\nu + mT^2 \sqrt{\mu\nu/2\pi} \exp(-\mu\varepsilon) / 6. \quad (17)$$

Используя (15)–(17), можно указать минимальное значение q (для заданных μ и m), при превышении которого влияние пороговых эффектов для БО достаточно мало.

В большинстве случаев аномальные ошибки играют существенную роль, когда отношение интенсивностей сигнала и помехи q мало, т. е.

$$q \ll 1. \quad (18)$$

В этой практически важной ситуации найденные выражения для характеристик ОМП и БО существенно упрощаются. Именно, для рассеяния ОМП из (6)–(8) получаем:

$$V(\tau_m) \simeq P_0 \theta^2 / \mu q \delta + T^2 (1 - P_0) / 6, \quad (19)$$

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{q\mu})^2}{2} - \frac{m\delta^{1/2}}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] dx.$$

Если к тому же вероятность надежной оценки P_0 близка к 1, то из (9) имеем

$$V(\tau_m) \simeq \theta^2 / \mu q \delta + T^2 m \delta^{1/2} \exp(-\mu q / 4) / 12\pi \sqrt{2}. \quad (20)$$

Для рассеяния БО при выполнении (18), согласно (15)–(16), можем записать

$$V(\gamma_m) \simeq \tilde{P}_0 \theta^2 / \mu q \delta + (1 - \tilde{P}_0)^2 T^2 / 12,$$

$$P_0 = [1 + m \sqrt{\mu q \delta / 2\pi} \exp(-\mu q / 2)]^{-1}. \quad (21)$$

При малом уровне аномальных ошибок и выполнении (18), рассеяние БО (16) примет вид

$$V(\gamma_m) \simeq \theta^2 / \mu q \delta + T^2 m \sqrt{\mu q \delta / 2\pi} \exp(-\mu q / 2) / 6. \quad (22)$$

В формулах (19)–(22) обозначено: $\delta = \int_{-\infty}^{\infty} [df(x)/dx]^2 dx$.

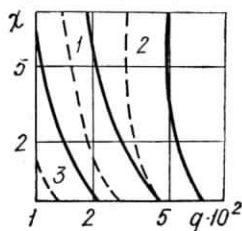


Рис. 1.

В качестве примера рассмотрим оценку времени прихода оптического сигнала, форма интенсивности которого описывается гауссовской кривой, так что $f(x) = \exp(-\pi x^2/2)$. Для такого сигнала на рис. 1 сплошными кривыми нанесены зависимости отношения рассеяния ОМП к рассеянию эффективной оценки $\chi_1 = V(\tau_m)/D(\tau_m)$ от параметра q . Кривая 1 рассчитана для $\mu = 10^3$, $m = 10$; кривая 2 — $\mu = 10^3$, $m = 10^2$; 3 — $\mu = 2 \cdot 10^3$, $m = 10$. На этом же рисунке штриховыми линиями нанесены зависимости отношения рассеяния БО времени прихода оптического сигнала к дисперсии эффективной оценки $\chi_2(q) = V(\gamma_m)/D(\tau_m)$. Сравнение сплошных и штриховых кривых рисунка показывает, что использование БО вместо ОМП может привести к заметному уменьшению рассеяния оценки времени прихода оптического сигнала в пороговой области. Это объясняется интегрированием по τ в (3), в результате чего ложные (не связанные с полезным сигналом) выбросы ЛФОП, которые приводят к большим ошибкам метода максимального правдоподобия, играют значительно меньшую роль при получении БО. В частности, применение более сложного, чем алгоритм максимального правдоподобия алгоритма (3) позволяет уменьшить минимальное значение отношения интенсивностей сигнала и помехи q , начиная с которого рассеяние получаемой оценки практически совпадает с дисперсией эффективной оценки. В зависимости от значений μ и m использование байесовского алгоритма позволяет снизить требуемую величину q на 35—45 % по сравнению с методом максимального правдоподобия.

Отмеченное уменьшение порогового значения отношения интенсивностей сигнала и помехи вследствие применения байесовского алгоритма достигается при равномерном априорном распределении времени прихода оптического сигнала. При этом выигрыш в точности оценки в результате использования БО вместо ОМП является минимальным. Действительно, отклонение априорного распределения времени прихода оптического сигнала от равномерного приведет лишь к увеличению выигрыша в точности оценки [1, 3].

В общем случае выигрыш в точности оценки, обусловленный применением байесовского алгоритма, возрастает по мере увеличения степени «сконцентрированности» априорного распределения неизвестного параметра [3, 5].

Таким образом, полученные выражения для характеристик ОМП и БО позволяют сделать обоснованный выбор между этими оценками в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценки времени прихода оптического сигнала и к степени простоты технической реализации алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальярди Р. М., Карп Ш. Оптическая связь.— М.: Связь, 1978.— 424 с.
2. Волохатюк В. А., Кочетков В. М., Красовский Р. Р. Вопросы оптической локации.— М.: Сов. радио, 1971.— 256 с.
3. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М.: Сов. радио, 1978.— 296 с.
4. Маршаков В. К., Трифонов А. П. Теоретическое и экспериментальное исследование приемника максимального правдоподобия.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 11, с. 2266—2275.
5. Радченко Т. А., Трифонов А. П. Характеристики байесовской оценки при квадратичной функции потерь.— Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 4, с. 762—768.
6. Большаков И. А., Ракошиц В. С. Прикладная теория случайных процессов.— М.: Сов. радио, 1978.— 248 с.
7. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1977.— 488 с.
8. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований.— М.: Сов. радио, 1978.— 376 с.
9. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.— 368 с.

Поступила в редакцию 30.05.83.