(76) Трифонов (76)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXIX

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

8

МОСКВА · 1984

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1984 № 8

УДК 621.391

ТОЧНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ БАЙЕСОВСКИХ ОЦЕНОК ПРИ НАЛИЧИИ НЕИНФОРМАТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Трифонов А. П., Енина Е. П.

Предложен способ построения квазиоптимальных оценок, основанный на анализе асимптотического поведения многомерного апостериорного распределения. Получены асимптотически (с ростом отношения сигнал/шум) точные выражения для расчета среднего квадрата погрешности аппроксимации байесовской оценки посредством оценки максимального правдоподобия.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное решение задачи оценивания неизвестных параметров квазидетерминированного сигнала на фоне помех приводит к соответствующим байесовским операторам [1, 2]. При практическом использовании этих операторов имеют место существенные трудности: часто имеющая место априорная неопределенность, произвольный выбор потерь, сложность теоретического анализа и технической реализации. Упомянутые трудности заметно возрастают, когда полезный сигнал кроме оцениваемых параметров содержит неизвестные параметры (неинформативные), в оценке которых нет необходимости. Именно поэтому были предложены различные способы построения квазиоптимальных оценок при наличии неинформативных параметров (см., например, [2, 3]). В работе [2] на основе анализа асимптотического поведения среднего риска в качестве квазиоптимальных предлагается использовать совместные оценки максимального правдоподобия (ОМП) всех неизвестных параметров сигнала. В работе [3] предложен способ построения квазиоптимальных оценок, основанный на аппроксимации условных байесовских оценок (БО) информативных параметров, найденных в предположении, что значения неинформативных параметров известны. Однако для обоснованного применения этих и других квазиоптимальных оценок необходимо количественно охарактеризовать точность аппроксимации байесовской оценки какой-либо квазиоптимальной оценкой. При отсутствии неинформативных параметров точность аппроксимации БО посредством ОМП определена в [1, 4, 5]. Заметим, что аппроксимация БО с помощью ОМП в ряде задач наиболее предпочтительна. Действительно, алгоритм оценивания по методу максимального правдоподобия относительно просто реализуется, причем его структура инвариантна априорному распределению неизвестных параметров и выбору потерь.

Ниже предлагается способ построения квазиоптимальных оценок, основанный на анализе асимптотического поведения многомерного апостериорного распределения.

1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО АПОСТЕРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Представим реализацию наблюдаемых данных при $0\leqslant t\leqslant T$ в виде $x(t)=s(t, \mathbf{l}_0)+n(t)$. Здесь $n(t)$ — реализация центрированного гауссовского шума с функцией корреляции $K(t_1, t_2)$; $s(t, \mathbf{l})$ — полезный сигнал, являющийся известной функцией времени и μ неизвестных параметров $\mathbf{l}=[l_1, l_2, \ldots, l_\mu]$, $\mathbf{l}\in L$, L — область в μ-мерном евклидовом пространстве.

При этом некоторые составляющие вектора **l** могут быть неинформативными параметрами, в оценке которых нет необходимости. Пусть $W_{pr}(\mathbf{l})$ — априорная, а

$$W_{ps}(\mathbf{l})=\frac{W_{pr}(\mathbf{l})\exp[z^2m(\vec{l})]}{\int\limits_L W_{pr}(\mathbf{l})\exp[z^2m(\mathbf{l})]\,d\mathbf{l}} \tag{1}$$

— апостериорная плотности вероятности. В выражении (1)

$$m(\mathbf{l})=z^{-2}M(\mathbf{l})=z^{-2}\int\limits_0^T[x(t)-s(t,\mathbf{l})/2]v(t,\mathbf{l})\,dt$$

— нормированный логарифм функционала отношения правдоподобия; $z^2\equiv\equiv z^2(\mathbf{l}_0)=\int\limits_0^T s(t,\mathbf{l}_0)v(t,\mathbf{l}_0)\,dt$ — отношение сигнал/шум для принятого сигнала, $\mathbf{l}_0$ — истинное значение его параметров; $v(t,\vec{l})$ — решение интегрального уравнения $\int K(t,\tau)v(\tau,\mathbf{l})\,d\tau=s(t,\mathbf{l})$, $t\in[0,T]$, $\mathbf{l}\in L$. Функция $m(\mathbf{l})$ представляет собой реализацию неоднородного гауссовского поля, для которого

$$\langle m(\mathbf{l})\rangle\leqslant{}^1/_2,\quad a_1z^{-2}\leqslant\langle[m(\mathbf{l})-\langle m(\mathbf{l})\rangle]^2\rangle\leqslant a_2z^{-2},$$

$$a_1=\min z^2(\mathbf{l})z^{-2},\quad a_2=\max z^2(\mathbf{l})z^{-2},\quad \mathbf{l}\in L.$$

Если $z(\mathbf{l})$ — непрерывная функция, то a_1 и a_2 ограничены при любых значениях z.

Пусть полезный сигнал $s(t,\mathbf{l})$ и априорная плотность вероятности $W_{pr}(\mathbf{l})$ обладают непрерывными производными по всем неизвестным параметрам. Обозначим через $\mathbf{l}_m$ ОМП всех неизвестных параметров, $\Delta(\mathbf{l})=m(\mathbf{l}_m)-m(\mathbf{l})$. Тогда, используя (1), запишем логарифм апостериорной характеристической функции в виде

$$\ln\Theta(\mathbf{u})=\ln\int\limits_L W_{ps}(\mathbf{l})\exp(j\mathbf{u}\mathbf{l}^+)\,d\mathbf{l}=j\mathbf{u}\mathbf{l}_m{}^+ +\ln\frac{\int\limits_L W_{pr}(\mathbf{l})\exp[j\mathbf{u}(\mathbf{l}-\mathbf{l}_m)^+-z^2\Delta(\mathbf{l})]\,d\mathbf{l}}{\int\limits_L W_{pr}(\mathbf{l})\exp[-z^2\Delta(\mathbf{l})]\,d\mathbf{l}}, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}=[u_1,u_2,\ldots,u_\mu]$, а «+» означает транспонирование. Воспользовавшись формулой Тейлора, перепишем (2) в виде

$$\ln\Theta(\mathbf{u})=\sum_{k=1}^{\mu}\left[\frac{\partial\ln\Theta(\mathbf{u})}{\partial u_k}\right]_{\mathbf{u}=0}u_k+ \tag{3}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k,n=1}^{\mu}\left[\frac{\partial^2\ln\Theta(\mathbf{u})}{\partial u_k\,\partial u_n}\right]_{\mathbf{u}=0}u_ku_n+\frac{1}{6}\sum_{k,n,h=1}^{\mu}\left[\frac{\partial^3\ln\Theta(\mathbf{u})}{\partial u_k\,\partial u_n\,\partial u_h}\right]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*}u_ku_nu_h,$$
$$\mathbf{u}^*=[u_1{}^*,u_2{}^*,\ldots,u_\mu{}^*],\quad u_k{}^*\in[0,u_k],\quad k=\overline{1,\mu}.$$

Здесь остаточный член записан в форме Лагранжа, а

$$\left[\frac{\partial\ln\Theta(\mathbf{u})}{\partial u_k}\right]_{\mathbf{u}=0}=j(l_{km}+I_k/I_0),$$

$$\left[\frac{\partial^2\ln\Theta(\mathbf{u})}{\partial u_k\,\partial u_n}\right]_{\vec{u}=0}=I_kI_n/I_0{}^2-I_{kn}/I_0,$$

$$I_0 = \int\limits_L W_{pr}(\mathbf{l}) \exp[-z^2 \Delta(\mathbf{l})] d\mathbf{l},$$

$$(4) \qquad I_k = \int\limits_L (l_k - l_{km}) W_{pr}(\mathbf{l}) \exp[-z^2 \Delta(\mathbf{l})] d\mathbf{l},$$

$$I_{kn} = \int\limits_L (l_k - l_{km})(l_n - l_{nm}) W_{pr}(\mathbf{l}) \exp[-z^2 \Delta(\mathbf{l})] d\mathbf{l},$$

$$k,\ n = \overline{1,\ \mu}.$$

Производные третьего порядка в (3) также выражаются через интегралы вида (4). Свойства функций, аналогичных $\Delta(\mathbf{l})$, подробно рассмотрены в [4—6]. Отметим здесь, что функция $\Delta(\mathbf{l})$ имеет лишь один ярко выраженный минимум в точке $\mathbf{l}_m$, причем вне зависимости от вида конкретной реализации наблюдаемых данных $\min \Delta(\mathbf{l}) = \Delta(\mathbf{l}_m) = 0$. Следовательно, при сделанных предположениях и достаточно больших значениях z можно аналогично [4—6] найти приближенные значения интегралов (4). С этой целью воспользуемся асимптотической формулой Лапласа для многомерных интегралов [7]. Полагая $z \to \infty$, имеем

$$\left[\frac{\partial \ln \Theta(\mathbf{u})}{\partial u_k}\right]_{\mathbf{u}=0} = j\left\{l_{km} + \frac{1}{z^2 \Omega_1}\left[\sum_{i=1}^{\mu} A_{1ki} \frac{\partial \ln W_{pr}(\mathbf{l})}{\partial l_i} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2\Omega_1} \sum_{i,n,h=1}^{\mu} A_{1ki} A_{1nh} \frac{\partial^3 m(\mathbf{l})}{\partial l_i\, \partial l_n\, \partial l_h}\right]_{\mathbf{l}_m} + O(z^{-4})\right\} = j[l_{kps} + O(z^{-4})],$$

$$(5) \qquad \left[\frac{\partial^2 \ln \Theta(\mathbf{u})}{\partial u_k\, \partial u_n}\right]_{\mathbf{u}=0} = -A_{1nk}/\Omega_1 z^2 + O(z^{-4}) = -K_{kn} + O(z^{-4}),$$

$$\left[\frac{\partial^3 \ln \Theta(\mathbf{u})}{\partial u_k\, \partial u_n\, \partial u_h}\right]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = O(z^{-4}).$$

Здесь Ω_1 — определитель с элементами $[-\partial^2 m(\mathbf{l})/\partial l_i \partial l_k]_{\mathbf{l}m}$, A_{1ki} — алгебраические дополнения этого определителя. Подставим найденные асимптотические значения производных логарифма апостериорной характеристической функции в (3). Затем перейдем к характеристической функции $\Theta_0(\mathbf{u})$ нормированных переменных $\xi_i = (l_i - l_{ips})/\sqrt{K_{ii}}$, $i = \overline{1, \mu}$. В результате при $z \to \infty$ получаем $\Theta_0(\mathbf{u}) = \exp[-\mathbf{u}\mathbf{Q}\mathbf{u}^+/2 + O(z^{-1})]$. Следовательно, с ростом отношения сигнал/шум z распределение нормированных переменных ξ_i сходится к μ-мерному гауссовскому распределению с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и корреляционной матрицей $\mathbf{Q} = \|K_{in}/\sqrt{K_{ii}K_{nn}}\|$. Поэтому при больших значениях отношения сигнал/шум апостериорное распределение всех неизвестных параметров сигнала можно аппроксимировать μ-мерным гауссовским распределением с математическими ожиданиями $\mathbf{l}_{ps} = [l_{1ps}, l_{2ps}, \ldots, l_{\mu ps}]$ и корреляционной матрицей $\mathbf{K} = \|K_{in}\|$, i, $n = \overline{1, \mu}$.

2. РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКИ

Пусть $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu]$ — БО части ($\nu < \mu$) или всех ($\nu = \mu$) неизвестных параметров сигнала $s(t, \mathbf{l})$. Рассмотрим вначале квадратичную функцию потерь. Тогда БО параметра l_k ($k = \overline{1, \nu}$) определяется выражением [1, 2]

$$(6) \qquad \gamma_k = \int\limits_L l_k W_{ps}(\mathbf{l})\, d\mathbf{l} = \frac{1}{j}\left[\frac{\partial \ln \Theta(\vec{u})}{\partial u_k}\right]_{\vec{u}=0}.$$

Используя (5), когда $z\to\infty$, имеем

$$\gamma_k=l_{kps}+O(z^{-4}). \tag{7}$$

При $z\gg1$ отбросим в этой формуле члены $O(z^{-4})$. Возвращаясь затем в (5), (7) к ненормированному логарифму функционала отношения правдоподобия $M(\mathbf{l})=z^2m(\mathbf{l})$, находим аппроксимацию БО вида

$$\gamma_k\simeq l_{kps}=l_{km}+\frac{1}{\Omega_2}\Bigg[\sum_{i=1}^{\mu}A_{2ki}\frac{\partial\ln W_{pr}(\mathbf{l})}{\partial l_i}+ \\ +\frac{1}{2\Omega_2}\sum_{i,n,h=1}^{\mu}A_{2ki}A_{2nh}\frac{\partial^3M(\mathbf{l})}{\partial l_i\,\partial l_n\,\partial l_h}\Bigg]_{\mathbf{l}_m}, \tag{8}$$

где Ω_2 — определитель с элементами $[-\partial^2M(\mathbf{l})/\partial l_i\partial l_k]_{\mathbf{l}_m}$, A_{2ki} — алгебраические дополнения этого определителя. Аппроксимация БО в виде (8) не зависит явно от отношения сигнал/шум для принятого сигнала. Это позволяет использовать ее для оценки как неэнергетических, так и энергетических параметров сигнала [1].

Известно [1, 2], что для гауссовского апостериорного распределения апостериорное среднее (6) есть БО при любой симметричной неубывающей функции потерь. Как показано выше, апостериорное распределение всех неизвестных параметров сигнала является асимптотически гауссовским при $z\to\infty$. Следовательно, оценка (6) или (7) асимптотически байесовская для любой симметричной неубывающей функции потерь. Таким образом, при больших, но конечных z аппроксимацию (8) можно использовать в качестве квазиоптимальной оценки, которая сходится к байесовской, когда $z\to\infty$. Однако для получения квазиоптимальной оценки (8) необходимо не только найти совместные ОМП $\mathbf{l}_m$, но и реализовать довольно громоздкие операции: требуется определить все вторые и третьи производные логарифма функционала отношения правдоподобия $M(\mathbf{l})$ в точке абсолютного максимума, первые производные логарифма априорной плотности вероятности, обратить матрицу размером $\mu\times\mu$ и т. д. Поэтому техническая реализация квазиоптимальной оценки (8) при больших μ может оказаться существенно более сложной, чем реализация ОМП. Кроме того, для получения квазиоптимальной оценки (8) надо знать априорную плотность вероятности всех неизвестных параметров сигнала. В связи с этим может оказаться полезной более грубая аппроксимация БО посредством ОМП:

$$\gamma_k\simeq l_{km}. \tag{9}$$

Для подобного применения ОМП необходимо оценить точность аппроксимации при больших, но не бесконечных отношениях сигнал/шум z. Точность аппроксимации удобно охарактеризовать величиной среднего квадрата разности между байесовской и квазиоптимальной оценкой $E_k^2(\mathbf{l}_0)=\langle(\gamma_k-\tilde{l}_k)^2\rangle$. Здесь $\tilde{l}_k$ — некоторая квазиоптимальная оценка, усреднение выполняется по реализациям помехи $n(t)$ при фиксированном истинном значении неизвестных параметров $\mathbf{l}_0$. При этом точность аппроксимации можно считать удовлетворительной, если погрешность за счет аппроксимации значительно меньше погрешности самой оценки, т. е. $E_k^2(\mathbf{l}_0)\ll\ll\langle(\gamma_k-l_{k0})^2\rangle$ или $E_k^2(\mathbf{l}_0)\ll\langle(\tilde{l}_k-l_{k0})^2\rangle$.

Для вычисления погрешности аппроксимации БО квазиоптимальной оценкой (8) в асимптотических разложениях (5) необходимо учесть члены порядка малости $O(z^{-4})$. Действительно, применение асимптотической формулы Лапласа позволяет получить разложение БО (6) в ряд по отрицательным степеням z:

$$\gamma_k=l_{km}+\alpha_1/z^2+\alpha_2/z^4+\ldots=l_{kps}+\alpha_2/z^4+\ldots, \tag{10}$$

где α_1, α_2 — коэффициенты разложения. Согласно (10), $\gamma_k-l_{kps}=\alpha_2/z^4+\ldots$, т. е. основной вклад в погрешность аппроксимации (8) вносит член порядка z^{-4}. Однако определение коэффициента α_2 требует весьма громоздких выкладок. Соответственно, при использовании квазиоптимальной оценки (9) из разложения (10) имеем $\gamma_k - l_{km} = \alpha_1/z^2 + \alpha_2/z^4 + \ldots$. Здесь основной вклад в погрешность аппроксимации вносит член порядка z^{-2}. Положим отношение сигнал/шум настолько большим, что членами $O(z^{-4})$ в (10) можно пренебречь. Тогда точность аппроксимации БО посредством ОМП (9) характеризуется величиной

$$E_{km}^2(\mathbf{l}_0) = \langle (l_{kps} - l_{km})^2 \rangle \simeq \langle (\gamma_k - l_{km})^2 \rangle. \tag{11}$$

Величину $E_{km}^2(\mathbf{l}_0)$ достаточно просто можно получить в явном виде, если отношение сигнал/шум настолько велико, что вероятностью аномальных ошибок при определении ОМП можно пренебречь [1, 8]. Тогда для ОМП справедливо асимптотическое представление [1]

$$l_{km} = l_{k0} + \frac{1}{z\Omega} \sum_{i=1}^{\mu} \left[\frac{\partial N(\mathbf{l})}{\partial l_i} \right]_{\mathbf{l}_0} A_{ki} + O(z^{-2}). \tag{12}$$

Здесь Ω — определитель с элементами $[\partial^2 S(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)/(\partial l_{1i} \partial l_{2k})]_{\mathbf{l}_0}$, $i, k = \overline{1, \mu}$, A_{ki} — алгебраические дополнения этого определителя, $S(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2) = \int_0^T s(t, \mathbf{l}_1) \times v(t, \mathbf{l}_2)\, dt z^{-2}$ и $N(\mathbf{l}) = \int_0^T n(t) v(t, \mathbf{l})\, dt z^{-1}$ — нормированные сигнальная и шумовая функции. Подставим l_{kps} из (5) и l_{km} из (12) в (11) и разложим полученные выражения в ряд по отрицательным степеням z. Учитывая, что $m(\mathbf{l}) = S(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}) + z^{-1} N(\mathbf{l})$, выполним усреднение по реализациям помехи $n(t)$ (при фиксированном $\mathbf{l}_0$) и отбросим члены порядка z^{-6} и менее. В результате получаем

$$E_{km}^2(\mathbf{l}_0) = z^{-4} \Omega^{-2} \Biggl\{ \sum_{i=1}^{\mu} A_{ki} \frac{\partial \ln W_{pr}(\mathbf{l})}{\partial l_i} - \frac{1}{2\Omega} \sum_{i,n,h=1}^{\mu} A_{ki} A_{nh} \Biggl[\frac{\partial^3 S(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{1n} \partial l_{2h}} + \frac{\partial^3 S(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{1h} \partial l_{2n}} + \frac{\partial^3 S(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)}{\partial l_{1n} \partial l_{1h} \partial l_{2i}} \Biggr] \Biggr\}_{\mathbf{l}_0}^2 + O(z^{-6}). \tag{13}$$

Нетрудно убедиться в том, что при $\mu = 1$ эта формула совпадает с известными выражениями [4, 5], полученными при отсутствии неинформативных параметров.

Формула (13) получена в предположении, что вероятность аномальных ошибок при определении ОМП пренебрежимо мала. Практически это означает требование $z > 5-8$ [1, 8]. При этом средний квадрат погрешности аппроксимации БО с помощью ОМП (13) убывает с ростом отношения сигнал/шум как z^{-4}. Аналитический расчет среднего квадрата погрешности аппроксимации при наличии аномальных ошибок наталкивается на существенные трудности. Однако результаты математического моделирования БО для $\mu = 1$ [9, 10] показывают возможность использования в этом случае формулы (13), если $z \geqslant 5-6$.

Если все неизвестные параметры сигнала являются неэнергетическими [1], то формула (13) несколько упрощается и принимает вид

$$E_{km}^2(\mathbf{l}_0) = z^{-4} \Omega^{-2} \left[\sum_{i=1}^{\mu} A_{ki} \frac{\partial \ln W_{pr}(\mathbf{l})}{\partial l_i} \right]_{\mathbf{l}_0}^2 + O(z^{-6}). \tag{14}$$

Для неэнергетических параметров отношение сигнал/шум z и элементы определителя Ω не зависят от истинного значения параметров $\mathbf{l}_0$. Поэтому нетрудно найти безусловный средний квадрат погрешности аппроксимации:

$$E_{km}^2=\int\limits_L E_{km}^2(\mathbf{l}_0)\,W_{pr}(\mathbf{l}_0)\,d\mathbf{l}_0= \tag{15}$$

$$=z^{-4}\Omega^{-2}\sum_{i,n=1}^{\mu}A_{ki}A_{kn}\int\limits_L \frac{\partial W_{pr}(\mathbf{l})}{\partial l_i}\frac{\partial W_{pr}(\mathbf{l})}{\partial l_n}W_{pr}^{-1}(\mathbf{l})\,d\mathbf{l}+O(z^{-6}).$$

Если все неизвестные неэнергетические параметры сигнала распределены равновероятно в области L, то из (15) получаем

$$E_{km}^2=O(z^{-6}). \tag{16}$$

Наконец, для произвольных, но равновероятно распределенных неизвестных параметров сигнала выражение (13) запишем в виде

$$E_{km}^2(\mathbf{l}_0)=\frac{z^{-4}\Omega^{-4}}{4}\left\{\sum_{i,n,h=1}^{\mu}A_{ki}A_{nh}\left[\frac{\partial^3 S(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)}{\partial l_{1i}\,\partial l_{1n}\,\partial l_{2h}}+\right.\right. \tag{17}$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^3 S(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)}{\partial l_{1i}\,\partial l_{1h}\,\partial l_{2n}}+\frac{\partial^3 S(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2)}{\partial l_{1n}\,\partial l_{1h}\,\partial l_{2i}}\right]\right\}^2_{\mathbf{l}_0}+O(z^{-6}).$$

Сравнение формул (14)–(17) показывает, что наименьшая погрешность аппроксимации (9) достигается, когда все неизвестные параметры сигнала неэнергетические и распределены равномерно в области L.

В отсутствие аномальных ошибок погрешность ОМП с удовлетворительной точностью можно охарактеризовать дисперсией эффективной оценки [1.2]:

$$D_k(\mathbf{l}_0)=\langle(l_{km}-l_{k0})^2\rangle=A_{kk}/z^2\Omega. \tag{18}$$

Соответственно, точность аппроксимации (9) можно считать приемлемой, если мала величина $\delta_k^2(\mathbf{l}_0)=E_{km}^2(\mathbf{l}_0)/D_k(\mathbf{l}_0)$ или

$$\delta_k^2=\int\limits_L \delta_k^2(\mathbf{l}_0)\,W_{pr}(\mathbf{l}_0)\,d\mathbf{l}_0. \tag{19}$$

Рассмотрим последнее выражение подробнее, предположив, что все неизвестные параметры сигнала неэнергетические и априори независимы, так что $W_{pr}(\mathbf{l})=\prod\limits_{i=1}^{\mu}W_{ipr}(l_i)$. Тогда из (15), (18) и (19) находим

$$\delta_k^2=\sum_{i=1}^{\mu}R_{ki}^2D_i\int\limits_L\left[\frac{\partial W_{ipr}(l_i)}{\partial l_i}\right]^2W_{ipr}^{-1}(l_i)\,dl_i. \tag{20}$$

Здесь $R_{ki}=A_{ki}/\sqrt{A_{kk}A_{ii}}$ — коэффициент корреляции ОМП k-го (оцениваемого) и i-го (неинформативного) параметров [1]; D_i — дисперсия эффективной оценки i-го параметра (18). Формула (20) верна при условии, что априорная плотность вероятности обращается в нуль на границе области L. Пусть для определенности $W_{ipr}(l_i)$ — гауссовские плотности вероятности с дисперсиями σ_i^2. Тогда формула (20) принимает особенно простой вид:

$$\delta_k^2=\sum_{i=1}^{\mu}R_{ki}^2\eta_i^2, \tag{21}$$

где $\eta_i^2=D_i/\sigma_i^2$ — отношение дисперсии ОМП к дисперсии априорного распределения. Формула (21) допускает простую и наглядную интерпретацию. Действительно, при отсутствии аномальных ошибок распределение ОМП даже для умеренных отношений сигнал/шум весьма близко к распределению эффективной оценки [1]. Таким образом, распределение ОМП i-го параметра аппроксимируется гауссовским с дисперсией D_i. Априорное распределение $W_{ipr}(l_i)$ также предполагается гауссовским с дисперсией σ_i^2. Из выражения (21) следует, что при $\eta_i^2 \ll 1$ наличие i-го неинформативного параметра не ухудшает точность аппроксимации БО. Последнее неравенство означает, что плотность вероятности оценки имеет существенно более узкий пик, чем априорное распределение. Поэтому учет априорного распределения i-го параметра не улучшает существенным образом точность БО k-го параметра по сравнению с ОМП. Кроме того, из формулы (21) видно, что на точность аппроксимации влияют лишь те неинформативные параметры, ОМП которых коррелированы с оценкой информативного параметра. Таким образом, для повышения точности аппроксимации (9) надо выбирать форму и вид модуляции полезного сигнала, которые обеспечивают минимальную корреляцию между ОМП информативных и неинформативных параметров и максимальную точность этих оценок.

В заключение рассмотрим простой пример, иллюстрирующий полученные соотношения. Найдем относительную погрешность (19) аппроксимации (9) при приеме ЛЧМ-импульса

$$s(t,\tau,\omega,\varphi)=a\exp[-(t-\tau)^2/\beta^2]\cos[\omega t+\lambda(t-\tau)^2-\varphi] \tag{22}$$

на фоне белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0. Начальную фазу φ будем считать распределенной равновероятно в интервале $[0;\ 2\pi]$, а все неизвестные параметры — статистически независимыми. Предположим, что надо оценить временное положение τ сигнала (22), а частота ω априори известна, так что $\mathbf{l}=[\tau,\varphi]$. Если τ — гауссовская случайная величина с дисперсией σ_τ^2, то погрешность (20) аппроксимации (9) имеет вид

$$\delta_\tau^2=\beta^2/z^2k_0^2\sigma_\tau^2. \tag{23}$$

Здесь $z^2=a^2\beta\sqrt{2\pi}/2N_0$ — отношение сигнал/шум, $k_0=\sqrt{1+\lambda^2\beta^4}$ — коэффициент укорочения [1]. Из выражения (23) следует, что с ростом k_0 погрешность аппроксимации (9) убывает. Когда ω — гауссовская случайная величина с дисперсией σ_ω^2, т. е. $\mathbf{l}=[\tau,\omega,\varphi]$, из (20) находим погрешность аппроксимации БО параметра τ:

$$\delta_{1\tau}^2=\beta^2/z^2\sigma_\tau^2+4(k_0^2-1)/z^2\beta^2\sigma_\omega^2. \tag{24}$$

Сравнение (23) и (24) показывает, что наличие неинформативного параметра ω при оценке τ приводит к существенному снижению точности аппроксимации (9). В частности, даже когда $\sigma_\omega^2\to\infty$, что соответствует равномерному априорному распределению частоты, имеем $\delta_{1\tau}^2/\delta_\tau^2\to k_0^2$.

При оценке частоты ω сигнала (22) и априори известном значении τ, т. е. когда $\mathbf{l}=[\omega,\varphi]$, для погрешности аппроксимации (9) из (20) получаем $\delta_\omega^2=4/z^2\beta^2\sigma_\omega^2$. Когда же $\mathbf{l}=[\omega,\tau,\varphi]$, для относительной погрешности аппроксимации БО частоты получаем

$$\delta_{1\omega}^2=4k_0^2/z^2\beta^2\sigma_\omega^2+(k_0^2-1)\beta^2/z^2k_0^2\sigma_\tau^2. \tag{25}$$

Из сравнения (24) и (25) следует, что при $k_0\gg 1$

$$\delta_{1\tau}^2\simeq\delta_{1\omega}^2=\delta_1^2=\beta^2/z^2\sigma_\tau^2+4k_0^2/z^2\beta^2\sigma_\omega^2. \tag{26}$$

По этой формуле можно рассчитать относительную погрешность аппроксимации (9) при совместной оценке параметров τ и ω сигнала (22) со случайной начальной фазой. Рассмотрим зависимость δ_1^2 (26) от длительности β сигнала (22) при $z^2=\mathrm{const}$. Находим, что значение $\delta_m^2=\min\delta_1^2=4k_0/z^2\sigma_\tau\sigma_\omega$ достигается, когда $\beta=\sqrt{2k_0\sigma_\tau/\sigma_\omega}$. Минимальное значение относительной погрешности δ_m^2 так же, как и в (24)—(26), возрастает с увеличением коэффициента укорочения k_0. Это объясняется высокой степенью корреляции ОМП временного положения τ и частоты ω ЛЧМ-сигнала, когда $k_0\gg 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
2. *Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
3. *Шинаков Ю. С.* Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 3, с. 542.
4. *Трифонов А. П.* Проблемы передачи информации, 1972, т. 8, № 4, с. 46.
5. *Маршаков В. К., Трифонов А. П.* Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1973, № 6, с. 141.
6. *Трифонов А. П., Маршаков В. К., Трифонов В. П.* Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, № 12, с. 2577.
7. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
8. *Маршаков В. К., Трифонов А. П.* Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 11, с. 2266.
9. *Радченко Т. А., Трифонов А. П.* Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 4, с. 762.
10. *Радченко Т. А.* Исследование некоторых оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов обработки сигналов: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1978. 180 с.

Поступила в редакцию
7.VI.1982