

417

Л. И. Дроздов

417

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

5

МОСКВА · 1984

УДК 550.388.2

ОБ ОДНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОТРАЖЕНИЙ ОТ СЛОЯ E_s .

Трифонов А. П., Костина З. А., Радченко Т. А.

Предложена статистическая модель отражений, основанная на представлении вариаций предельной частоты и частоты экранирования в виде случайных процессов. Модель позволяет описать закономерности изменения основных параметров отражений от E_s при вертикальном зондировании и функциональные зависимости между ними. Правомомерность модели проверена на экспериментальных данных ионосферных станций.

1. Введение. Статистическому описанию отражений от слоя E_s посвящено значительное число публикаций ([1—4] и др.). Однако эта задача далека от своего окончательного решения, так как физические процессы, протекающие при формировании слоя E_s и отражении от него радиоволн, весьма сложны. Полное аналитическое описание этих процессов наталкивается на значительные трудности математического и физического плана. Поэтому, как правило, строятся модели, описывающие изменения отдельных параметров и характеристик, которые являются определяющими при расчетах отражения радиоволн от E_s .

Ниже предлагается статистическая модель, основанная на теории случайных процессов, позволяющая с единых позиций описать закономерности изменения ряда параметров отражений от E_s и функциональные связи между ними.

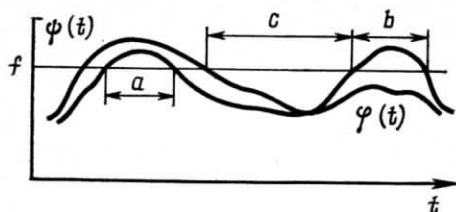
Сущность модели заключается в следующем. Появление слоя E_s фиксируется по наличию отражения зондирующего радиосигнала на соответствующей высоте. В отличие от регулярных слоев слой E_s характеризуется двумя частотными параметрами: предельной частотой f_0 и частотой экранирования f_b . Изменения частот f_0 и f_b во времени носят случайный характер, поэтому можно представить их в виде некоторых случайных процессов $\psi(t)$ и $\varphi(t)$. На фиг. 1 приведены реализации этих случайных процессов. Поскольку $f_b \leq f_0$, то для любого момента времени $\varphi(t) \leq \psi(t)$. Отражения от E_s на некоторой частоте f будут фиксироваться в случае превышения процессом $\psi(t)$ уровня f . Если при этом процесс $\varphi(t)$ также превышает f , то на данной частоте имеет место полное экранирование верхних слоев ионосферы (фиг. 1, участок a). Если же $\varphi(t) < f$, то наблюдается отражение как от E_s , так и от вышележащих слоев, т.е. слой E_s полупрозрачный (участок b на фиг. 1). Если $\psi(t) < f$, а следовательно, и $\varphi(t) < f$, то отражений от слоя E_s не наблюдается (участок c на фиг. 1). Используя такое представление, можно получить аналитические соотношения для основных статистических характеристик отражения от слоя E_s .

2. Статистические характеристики отражений. Вероятность существования отражения от E_s на частоте f в данный момент времени — это не что иное, как вероятность превышения процессом $\psi(t)$ значения f в данный момент времени:

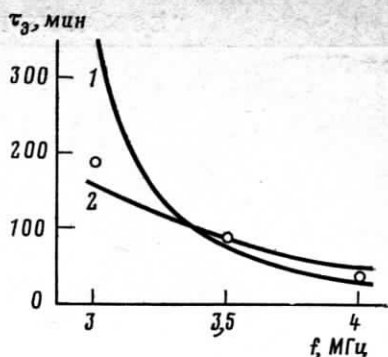
$$PE_s = 1 - F_0(f). \quad (1)$$

Здесь $F_0(f) = P[\psi(t_0) \leq f]$ — одномерная функция распределения случайного процесса $\psi(t)$ или распределение частоты f_0 для $t = t_0$.

Длительность отражения от слоя E_s на данной частоте f — это длительность превышения случайным процессом $\psi(t)$ значения f . Длительность отражений является случайной величиной, функцию распределения



Фиг. 1



Фиг. 2

которой обозначим $M_0(\tau)$. Если можно выделить временной интервал T_{st} , на котором $\psi(t)$ — приближенно стационарный, эргодический, непрерывно дифференцируемый случайный процесс, то для больших частот f на этом интервале имеет место соотношение [5]:

$$M_0(\tau) \approx 1 - \exp[-\pi(\tau/\tau_E)^2/4]. \quad (2)$$

Здесь τ_E — средняя длительность превышения случайным процессом $\psi(t)$ значения f , т. е. средняя длительность отражения от E_s на частоте f . При достаточно низких частотах функция распределения длительности отражений может быть записана в виде [6]:

$$M_0(\tau) \approx 1 - \exp[-\Pi_0(f)\tau]. \quad (3)$$

Параметр $\Pi_0(f)$ по смыслу совпадает со средним числом пересечений снизу вверх процессом $\psi(t)$ порога f в единицу времени и может быть определен формулой [6]:

$$\Pi_0(f) = [1 - F_0(f)]/\tau_E = PE_s/\tau_E. \quad (4)$$

Средняя длительность отражения от слоя E_s в соответствии с (4):

$$\tau_E = [1 - F_0(f)]/\Pi_0(f) = PE_s/\Pi_0(f). \quad (5)$$

Вероятность отражения от E_s с длительностью не менее τ_0 на частоте f можно представить в виде произведения вероятностей:

$$(PE_s)_{\tau > \tau_0} = PE_s P[\tau > \tau_0] = PE_s [1 - M_0(\tau_0)]. \quad (6)$$

Для больших частот зондирования, учитывая (2), имеем:

$$(PE_s)_{\tau > \tau_0} = PE_s \exp[-\pi(\tau_0/\tau_E)^2/4]. \quad (7)$$

Для малых частот с учетом (3), (4):

$$(PE_s)_{\tau > \tau_0} = PE_s \exp[-(PE_s)\tau_0/\tau_E]. \quad (8)$$

Следует отметить, что (8) совпадает с выражением для вероятности отражения с длительностью не менее заданной, найденным эмпирически в [7]:

$$(PE_s)_{\tau > \tau_0} = PE_s \exp[-\tau_0/\theta], \quad (9)$$

где θ — коэффициент устойчивости отражения. Из сопоставления (8) и (9) следует, что $\theta = \tau_E/PE_s$. Таким образом, коэффициент устойчивости отражения может быть рассчитан по известным характеристикам PE_s и τ_E без специальных графических построений.

3. Статистические характеристики экранирования. Вероятность полной экранировки вышележащих слоев ионосферы запишется следующим образом:

$$P_0 = 1 - F_b(f). \quad (10)$$

Здесь $R_b(f) = P[\varphi(t_0) \leq f]$ — одномерная функция распределения процесса $\varphi(t)$ в момент $t=t_0$, или функция распределения частоты экранирования f_b .

Длительность полной экранировки выпележащих слоев ионосферы — это длительность превышения процессом $\varphi(t)$ значения f . Обозначим функцию распределения длительности экранировки $M_b(\tau)$. Тогда на участке стационарности процесса $\varphi(t)$ (в случае его эргодичности и дифференцируемости) при больших f :

$$M_b(\tau) = 1 - \exp[-\pi(\tau/\tau_0)^2/4], \quad (11)$$

при малых f :

$$M_b(\tau) = 1 - \exp[-P_0\tau/\tau_0]. \quad (12)$$

Здесь τ_0 — средняя длительность экранирования выпележащих слоев ионосферы, которая может быть рассчитана по формуле

$$\tau_0 = [1 - F_b(f)] / P_b(f) = P_0 / P_b(f), \quad (13)$$

$P_b(f)$ — среднее число превышений в единицу времени процессом $\varphi(t)$ значения f .

Вероятность экранирования выпележащих слоев с длительностью не менее заданной запишется следующим образом:

$$(P_0)_{\tau > \tau_0} = P_0 [1 - M_b(\tau_0)]. \quad (14)$$

Для больших частот экранирования, учитывая (11), имеем:

$$(P_0)_{\tau > \tau_0} = P_0 \exp[-\pi(\tau_0/\tau_0)^2/4]. \quad (15)$$

Для малых частот с учетом (12):

$$(P_0)_{\tau > \tau_0} = P_0 \exp[-P_0\tau_0/\tau_0]. \quad (16)$$

Таким образом, чтобы найти вероятность и распределение длительности отражения (экранировки), вероятность отражения (экранировки) с длительностью не менее заданной, достаточно знать либо распределение частот $F_{0,b}(f)$ и среднюю длительность $\tau_{0,b}(f)$, либо $F_{0,b}(f)$ и параметр $P_{0,b}(f)$. Заметим, что часто выбором распределения $F(f)$ определяется выражение для $\Pi(f)$. Следовательно, необходимым этапом для расчета перечисленных статистических характеристик является определение одномерной функции распределения частот.

4. Логарифмически-нормальное распределение. Покажем возможность использования общих соотношений (1)–(16) при наиболее распространенной [2, 3] аппроксимации эмпирических распределений частот f_0 и f_b — логарифмически-нормальном распределении. В этом случае вероятность отражения от слоя E_s (4) и вероятность полной экранировки выпележащих слоев (10) запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{matrix} PE_s \\ P_0 \end{matrix} \right\} = 1 - \Phi[(\ln f - m_{0,b})/\sigma_{0,b}]. \quad (17)$$

Здесь $m_{0,b}$ и $\sigma_{0,b}$ — соответственно среднее значение и дисперсия случай-

ных величин $\ln f_{0,b}$; $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности.

Найдем $P_0(f)$ и $P_b(f)$. По определению, если процессы $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ подчиняются логарифмически-нормальному закону, то процессы $y_0(t) = \ln \psi(t)$ и $y_b(t) = \ln \varphi(t)$ описываются нормальным законом распределения с параметрами m_0 , σ_0 и m_b , σ_b соответственно. Среднее число превышений нормальным процессом $y_{0,b}(t)$ уровня H равно [6]:

$P_{0,b}(H) = \tau_{h0,hb}^{-1} \exp[-(H - m_{0,b})^2/2\sigma_{0,b}^2]$, где $\tau_{h0,hb}$ — параметр, имеющий смысл интервала корреляции случайного процесса $y_{0,b}(t)$. Очевидно, что среднее число превышений процессом $y_{0,b}(t)$ значения $H = \ln f$ равно среднему числу превышений процессами $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ значения f . Поэтому

$$P_{0,b}(f) = \tau_{k0,b}^{-1} \exp[-(\ln f - m_{0,b})^2 / 2\sigma_{0,b}^2]. \quad (18)$$

Подставляя $P_0(f)$ из (18) и PE_s из (17) в (5), получаем выражения для средней длительности отражений от слоя:

$$\tau_E = \tau_{k0} \{1 - \Phi[(\ln f - m_0)/\sigma_0]\} \exp[(\ln f - m_0)^2 / 2\sigma_0^2]. \quad (19)$$

Среднюю длительность экранировки получаем, подставляя $P_b(f)$ из (18) и P_s из (17) в (13):

$$\tau_s = \tau_{kb} \{1 - \Phi[(\ln f - m_b)/\sigma_b]\} \exp[(\ln f - m_b)^2 / 2\sigma_b^2]. \quad (20)$$

Используя (19) и (17), нетрудно рассчитать вероятность отражения от слоя E_s с длительностью не менее заданной по формуле (7) или (8). Подставляя (20) и (17) в (14)–(16), получим вероятность экранировки вышележащих слоев ионосферы с длительностью не менее заданной.

Возможность использования предложенной модели для описания и прогнозирования статистических характеристик отражения от E_s , связанных с частотой экранирования: P_s , τ_s , $(P_s)_{\tau > \tau_0}$, была проверена на экспериментальных данных. В качестве последних использовались реализации $\varphi(t) = f_b$, представленные на f -графиках ионосферных станций Москвы, Киева, Ростова-на-Дону за 1965–1967 гг. и 1977–1979 гг. Для расчетов брались данные за июнь–июль, когда вероятность существования E_s максимальна и изменяется не более чем на 20% [1]. В качестве интервала стационарности выбран интервал от 6 до 13 ч, в пределах которого PE_s меняется на 15–20%. На выбранном интервале стационарности полученные:

средняя длительность экранирования $\tau_s^* = \sum_{i=1}^N \tau_i / N$, вероятность экранирования $P_s^* = n_1 / n$ и вероятность экранирования в момент времени t_0

с длительностью не менее заданной $(P_s)_{\tau > \tau_0}^* = n_0 / n$. Здесь N — число превышений процессом $\varphi(t)$ значения f (число отражений от экранирующего слоя на частоте f), τ_i — длительность i -го превышения (отражения), n — число наблюдений (дней наблюдений) в момент t_0 ; n_1 — число случаев превышения процессом $\varphi(t_0)$ уровня f в момент $t = t_0$; n_0 — число случаев превышения процессом $\varphi(t_0)$ значения f , имеющих место в момент $t = t_0$ и длящихся не менее τ_0 .

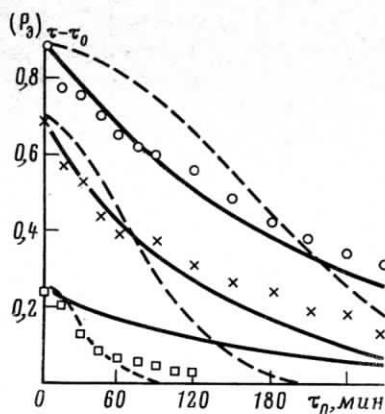
На основании экспериментальных значений P_s^* получены параметры логарифмически-нормального распределения m_b^* и σ_b^* . Затем по этим параметрам и значению τ_s^* , полученному для нескольких частот, рассчитана в соответствии с (20) константа

$$\tau_{kb}^* = \tau_s^* \{1 - \Phi[(\ln f - m_b^*)/\sigma_b^*]\}^{-1} \exp[-(\ln f - m_b^*)^2 / 2\sigma_b^{*2}].$$

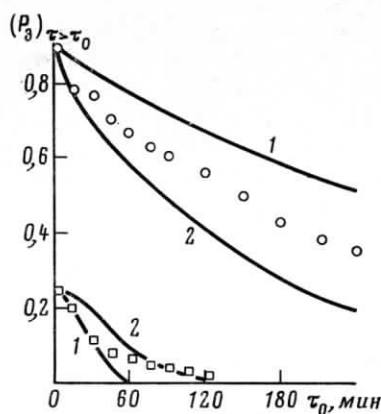
Усредненные значения этой константы использовались при расчете зависимости средней длительности отражений от частоты (20). На фиг. 2 в качестве примера приведена рассчитанная таким образом зависимость средней длительности экранирования от частоты для Москвы за 1965–1967 гг. (кривая 1). Здесь же представлены экспериментальные значения τ_s^* для $f=3$; 3,5 и 4 МГц. Можно отметить, что эмпирическая зависимость $\tau_s^*(f)$ качественно верно описывается формулой (20).

Экспериментальные значения вероятности экранирования с длительностью не менее заданной приведены на фиг. 3, где кружки — для $f=3$ МГц, крестики — $f=3,5$ МГц, квадраты — $f=4$ МГц. Сплошными кривыми представлены зависимости, рассчитанные по формуле (16) для малых значений f , а штриховыми — по формуле (15) для больших f . Из графиков видна хорошая аппроксимация зависимости $(P_s)_{\tau > \tau_0}$ выражением для больших частот (15) при $f=4$ МГц и выражением для малых частот (16) при $f=3$ МГц.

Как показали расчеты, условия применимости той или иной аппроксимации определяются соотношением параметров τ_{kb} и τ_s : если $\tau_s < \tau_{kb}$, то справедлива формула (15), если $\tau_s \geq 4\tau_{kb}$, — то формула (16). В более об-



Фиг. 3



Фиг. 4

щем виде эти условия можно записать на основе соотношения (20), введя обозначения $v = \ln f / \sigma_b$ и $\gamma = m_b / \sigma_b$: если $v > v^*$, где v^* — решение уравнения

$$[1 - \Phi(v - \gamma)] = \exp[-(v - \gamma)^2 / 2],$$

то справедлива формула для больших частот (15), если $v < v^*$, где v^* — решение уравнения

$$[1 - \Phi(v - \gamma)] = 4 \exp[-(v - \gamma)^2 / 2],$$

то справедлива формула для малых частот (16).

Возможность прогнозирования значения вероятности $(P_3)_{\tau > \tau_0}$ для любой частоты по известным значениям m_b^* , σ_b^* и значению τ_0^* для некоторой частоты была проверена на экспериментальных данных Москвы за 1965—1967 гг. следующим образом. На частоте $f = 3,5$ МГц получено значение средней длительности экранирования $\tau_0 = 86,26$ мин. Найденные значения $\sigma_b^* = 0,058$ МГц и $m_b^* = 0,585$ МГц. По значениям этих параметров рассчитано $\tau_{b0}^* = 102,67$ мин, $\gamma = 9,9$, $v_3 = 8,22$ (для $f = 3$ МГц), $v_4 = 11,37$ (для $f = 4$ МГц). Найденные значения средней длительности для 3 МГц $\tau_0^* = 432,0$ мин и для 4 МГц $\tau_0^* = 37,6$ мин. Для значений γ , v_3 расчет $(P_3)_{\tau > \tau_0}$ производился по формуле (16), а для значений γ , v_4 — по (15).

На фиг. 4 представлены полученные таким образом кривые 1. Здесь же приведены экспериментальные значения $(P_3)_{\tau > \tau_0}^*$.

5. Распределение Вейбулла. Логарифмически-нормальная аппроксимация распределения частот f_0 и f_b находит широкое применение и используется в большинстве работ ([1—3] и др.), посвященных слою E_s . Тем не менее значительная изменчивость экспериментальных данных и их зависимость от многих факторов не позволяют предложить универсальную аналитическую аппроксимацию распределения, пригодную во всех случаях. Действительно, для аналитического описания распределения частот f_0 и f_b можно использовать широкий класс двухпараметрических распределений. Рассмотрим, в частности, как изменяются найденные выше характеристики, если для аналитического описания распределения частот использовать распределение Вейбулла [8]:

$$F_{0,b}(f) = 1 - \exp[-\beta_{0,b} f^{\alpha_{0,b}}]. \quad (21)$$

В этом случае выражения для вероятности отражения (1) и экранирования (10) имеют вид:

$$\left. \begin{matrix} PE_s \\ P_3 \end{matrix} \right\} = \exp \{ -\beta_{0,b} f^{\alpha_{0,b}} \}. \quad (22)$$

Нетрудно показать, что если $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ описываются распределением Вейбулла (21), то процессы $z_{0,b}(t) = \sigma \sqrt{2\beta_{0,b}} f^{\alpha_{0,b}/2}$ подчиняются распределению Рэлея с параметром σ . Для рэлеевского процесса известно выражение, определяющее среднее число выходов за уровень H в единицу време-

мени $P(H) = H \exp[-H^2/2\sigma^2]/\sigma\tau_k$, где τ_k — константа, имеющая смысл интервала корреляции. Используя это выражение и функциональную связь $z_{0,b}(t)$ с $\psi(t)$ и $\Phi(t)$, можно найти формулы для расчета параметров $P_{0,b}(f)$, а затем в соответствии с (5), (13) — выражения для средней длительности отражений от E_s и средней длительности экранировки выше лежащих слоев ионосферы:

$$\tau_{E_s} = \tau_{k0,b}/\sqrt{2\beta_{0,b}} f^{\alpha_{0,b}/2}. \quad (23)$$

Зная PE_s , P_s (22) и τ_{E_s} (23), нетрудно рассчитать вероятность отражения и экранировки с длительностью не менее заданной.

На фиг. 2 приведена кривая 2, рассчитанная по формуле (23) с использованием константы, полученной по экспериментальным данным, указанным выше. Видно, что вейбулловская модель несколько лучше описывает ход экспериментальной зависимости $\tau_s^*(f)$.

Условия применимости формул, описывающих распределение длительности экранирования для больших частот (15) и малых частот (16), записываются при вейбулловской аппроксимации аналитически. Так, при $f \gg \beta_b^{-1/\alpha_b}$ следует пользоваться формулой (15), а при $f \ll (9\beta_b)^{-1/\alpha_b}$ — формулой (16).

На фиг. 4 приведены результаты прогноза значений $(P_s)_{\tau > \tau_0}$ на частотах 3 и 4 МГц по экспериментальным значениям τ_s^* на частоте 3,5 МГц при вейбулловской аппроксимации распределения частот (кривые 2). Сопоставляя кривые 1, 2 и экспериментальные характеристики (кружки — $f=3$ МГц, квадраты — $f=4$ МГц), видим, что при вейбулловской аппроксимации можно прогнозировать значения $(P_s)_{\tau > \tau_0}$ не хуже, чем при логарифмически-нормальной.

6. Заключение. Таким образом, применение общих выражений (1) — (16) для практических расчетов требует выбора определенной аналитической формулы, описывающей функции распределения $F_{0,b}(f)$. Тем не менее, как показывает сравнение расчетных данных с экспериментальными (фиг. 2, 4), полученные характеристики отражений от слоя E_s действительно устойчивы к выбору аппроксимации функции распределения. Действительно, переход от логарифмически-нормальной аппроксимации $F_{0,b}(f)$ к аппроксимации посредством распределения Вейбулла не вызывает существенных ошибок в описании экспериментальных данных. Следовательно, можно проводить обработку данных, не предъявляя жестких требований к аналитической аппроксимации функции распределения.

Предложенная модель позволяет рассчитывать и прогнозировать для разных частот среднюю длительность отражений от экранирующего слоя, вероятность экранирования с длительностью не менее заданной. Это свидетельствует о целесообразности привлечения методов теории случайных процессов к описанию статистических закономерностей отражения от E_s .

ЛИТЕРАТУРА

1. Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К., Чернышева С. П. и др. Среднеширотный спорадический слой E. М.: Наука, 1975. 119 с.
2. Керблай Т. С., Васильев К. Н., Васильева Т. Н. В кн.: Траекторные характеристики коротких волн. М., ИЗМИРАН, 1978, с. 98.
3. Овезгельдыев О. О., Михайлова Г. В. В кн.: IV Межведомственный семинар по моделированию ионосферы. Томск: ТГУ, 1978, с. 49.
4. Овезгельдыев О. О. Геомагнетизм и аэрономия, 1968, т. 8, 1114.
5. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969. 398 с.
6. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970. 392 с.
7. Чавдаров С. С., Часовитин Ю. К. В кн.: Ионосферные исследования, № 13. М.: Наука, 1964, с. 24.
8. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 8.II.1983