78

78

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ

ТОМ XXVII

№ 11

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОГО ИНСТИТУТА
ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
1984

УДК 621.391

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ГАУССОВСКОГО СИГНАЛА

А. П. ТРИФОНОВ, С. А. ГАЛУН, В. И. ПАРФЕНОВ

Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола

Предложена аппаратурная реализация измерителя длительности случайного сигнала по методу максимального правдоподобия. Получены выражения для смещения и рассеяния оценки, точность которых возрастает с увеличением длительности сигнала и его эквивалентной полосы частот.

При анализе случайных сигналов время анализа обычно выбирают равным их длительности в предположении, что эта длительность априори известна [1, 2 и др.]. Однако в практических приложениях методов анализа случайных сигналов возможны ситуации, когда длительность исследуемого сигнала априори неизвестна. Если при этом реализация случайного сигнала искажена аддитивной помехой, то для обоснованного выбора времени анализа необходимо измерить длительность сигнала. Примерами таких сигналов могут служить импульс со случайной субструктурой, описывающий «вспышку» оптического шума [3], отраженный радиолокационный сигнал [4], сигнал с широтно-импульсной модуляцией, искаженный модулирующей помехой [5, 6 и др.].

Рассмотрим возможность аппаратурной реализации измерителя длительности случайного сигнала по методу максимального правдоподобия. Пусть наблюдается сумма

$$x(t)=\eta(t-\tau_0)\xi(t)+n(t),\quad 0<t<T, \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — реализация центрированного гауссовского стационарного случайного процесса с корреляционной функцией $K(\lambda)=\langle\xi(t)\xi(t+\lambda)\rangle$, $\eta(t)=1$ при $t<0$ и $\eta(t)=0$ при $t>0$, $\tau_0\in[0;\ T]$ — априори неизвестная длительность анализируемого случайного сигнала, $n(t)$ — помеха, которую будем считать гауссовским белым шумом с односторонней спектральной плотностью N_0. Положим, что $\xi(t)$ и $n(t)$ статистически независимы. Тогда логарифм функционала отношения правдоподобия, согласно [4, 7] имеет вид

$$M(\tau)=\int\limits_0^T\int\limits_0^T x(t_1)x(t_2)\theta(t_1,\ t_2,\ \tau)\,dt_1dt_2/2-H(\tau)/2, \tag{2}$$

где $\theta(t_1,\ t_2,\ \tau)$ находится из интегрального уравнения [4]

$$N_0\theta(t_1,\ t_2,\ \tau)/2+\int\limits_0^T K_\xi(t_1,\ t,\ \tau)\theta(t,\ t_2,\ \tau)\,dt=2K_\xi(t_1,\ t_2,\ \tau)/N_0, \tag{3}$$

а $H(\tau)=\int\limits_0^1 d\chi\int\limits_0^T\hat\theta(t,\ t,\ \chi,\ \tau)\,dt$. Функция $\hat\theta(t_1,\ t_2,\ \chi,\ \tau)$ является решением уравнения [4]

$$\hat\theta(t_1,\ t_2,\ \chi,\ \tau)+2\chi\int\limits_0^T K_\xi(t_1,\ t,\ \tau)\hat\theta(t,\ t_2,\ \chi,\ \tau)\,dt/N_0=2K_\xi(t_1,\ t_2,\ \tau)/N_0, \tag{4}$$

$$K_\xi(t_1,\ t_2,\ \tau)=\eta(t_1-\tau)\eta(t_2-\tau)K(t_1-t_2).$$

Оценка максимального правдоподобия τ_m неизвестной длительности случайного сигнала τ_0 представляет собой положение абсолютного максимума функции (2), для получения которой надо найти решения уравнений (3), (4). При произвольных значениях длительности случайного сигнала τ и времени наблюдения T уравнения (3), (4) можно решить лишь численными методами. Получаемый при этом измеритель длительности реализуется с большими техническими трудностями и практического интереса не представляет. Кроме того, известно [4, 7], что метод максимального правдоподобия обеспечивает приемлемые для практических приложений характеристики оценки лишь при больших величинах τ и T. Поэтому ограничимся рассмотрением измерителя (2), когда длительность случайного сигнала τ значительно больше времени корреляции анализируемого процесса $\xi(t)$, т. е. в условиях высокой апостериорной точности оценки. Итак, полагаем, что

$$\mu(\tau) \gg 1, \tag{5}$$

где $\mu(\tau) = \tau \Delta f_E$, $\Delta f_E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega)\, d\omega / (2\pi G^2_m)$ — эквивалентная полоса частот процесса $\xi(t)$, $G(\omega)$ — его спектр мощности, G_m — максимальное значение спектра мощности в полосе частот анализируемого сигнала. При выполнении (5), аналогично [4, 8] решение уравнений (3), (4) можно найти с помощью преобразования Фурье. В результате (2) принимает вид

$$M(\tau) = \int\limits_0^{\tau} \int\limits_0^{\tau} x(t_1)\, x(t_2)\, \theta_0(t_1 - t_2)\, dt_1 dt_2/2 - H_0 \tau/2. \tag{6}$$

Здесь $H_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + q\rho(\omega)]\, d\omega/(2\pi)$,

$$\theta_0(t_1 - t_2) = \frac{q}{\pi N_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\omega) \exp[j\omega(t_1 - t_2)]}{1 + q\rho(\omega)}\, d\omega, \tag{7}$$

$$\rho(\omega) = G(\omega)/G_m, \quad q = 2G_m/N_0$$

— величина, характеризующая отношение средней мощности случайного сигнала к средней мощности белого шума в полосе частот сигнала.

Реализация измерителя (6) также приводит к значительным техническим затруднениям, поскольку необходимо формировать квадратичный функционал в (6) для всех значений $\tau \in [0; T]$. Дальнейшее упрощение структуры этого измерителя возможно, если пренебречь ошибками измерения длительности сигнала порядка времени корреляции процесса $\xi(t)$. Тогда, преобразуя квадратичный функционал в (6), как это делается в [4], приходим к выражению

$$M(\tau) \simeq \int\limits_0^{\tau} y^2(t)\, dt/2 - H_0 \tau/2. \tag{8}$$

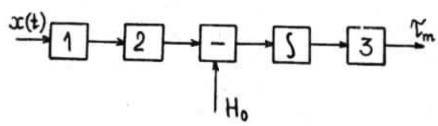
Здесь $y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t')\, h(t - t')\, dt'$, а спектр функции $h(t)$ удовлетворяет соотношению: $|h(\omega)|^2 = \theta_0(\omega)$, где $\theta_0(\omega)$ — спектр функции (7).

Квазиоптимальный измеритель (8) может быть реализован, как это показано на рисунке, где *1* — фильтр с импульсной переходной функцией $h(t)$, *2* — квадратор, *3* — решающее устройство, которое фиксирует положение τ_m абсолютного максимума сигнала на выходе интегратора, являющееся оценкой. Несмотря на относительную простоту аппаратурной реализации измерителя (8), получаемая с его помощью оценка является асимптотически оптимальной. Действительно, если $\mu \to \infty$, а $q \to 0$, так что $\mu q^2 \to \infty$, то эта оценка сходится к оценке максимального правдоподобия [7].

Рассмотрим характеристики оценки τ_m неизвестной длительности случайного сигнала τ_0. Когда выполняется (5), распределение $M(\tau)$ близко к гауссовскому [4], а полезный сигнал на выходе измерителя можно записать как

$$S(\tau) = \langle M(\tau) \rangle = (A-B)\min(\tau,\ \tau_0) - (H_0/2 - B)\tau, \tag{9}$$

$$A = q\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega)\,d\omega/(4\pi), \quad B = q\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega)\,[1+q\rho(\omega)]^{-1}\,d\omega/(4\pi).$$



Поскольку (9) достигает максимума при $\tau=\tau_0$, то для определения характеристик оценки в условиях высокой апостериорной точности достаточно исследовать поведение $M(\tau)$ в малой окрестности τ_0 [7]. С этой целью введем в рассмотрение случайный процесс

$$\Delta(\tau) = M(\tau) - M(l); \quad \tau,\ l \in [\tau_0 - \varepsilon;\ \tau_0 + \varepsilon], \tag{10}$$

$\varepsilon \ll \tau_0$. Положение абсолютного максимума этого процесса совпадает с оценкой τ_m. Пренебрегая слагаемыми, имеющими порядок малости менее ε, для корреляционной функции процесса (10) находим

$$K_\Delta(\tau_1,\ \tau_2) \simeq \begin{cases} C\min(|\tau_1 - l|,\ |\tau_2 - l|), & (\tau_1 - l)(\tau_2 - l) > 0, \\ 0, & (\tau_1 - l)(\tau_2 - l) \leqslant 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $C = q^2\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2(\omega)\,[1+q\rho(\omega)]^{-1}\,d\omega/(4\pi)$. Следовательно, когда $\mu = \tau_0\Delta f_E \gg 1$, функция $\Delta(\tau)$ (10) на интервале $[\tau_0 - \varepsilon;\ \tau_0 + \varepsilon]$ представляет собой реализацию гауссовского марковского случайного процесса. Коэффициенты сноса и диффузии этого процесса получаем из (9), (11)

$$a = \begin{cases} H_0/2 - A, & \tau < \tau_0, \\ H_0/2 - B, & \tau > \tau_0, \end{cases} \qquad b = C.$$

Для расчета характеристик оценки τ_m теперь можно воспользоваться подходом, развитым в [6, 8]. Решив аналогично [6, 8] соответствующие уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, найдем вместе с распределением оценки ее смещение (систематическую ошибку)

$$d(\tau_m | \tau_0) = \langle \tau_m - \tau_0 \rangle \simeq r(1-u^2)/(2u^2) \tag{12}$$

и рассеяние (средний квадрат ошибки)

$$V(\tau_m|\tau_0)=\langle(\tau_m-\tau_0)^2\rangle\simeq r^2\,\frac{2u^6+4u^5+u^4-u^3+u^2+4u+2}{2u^4(1+u)^2}. \quad (13)$$

Здесь

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}\{\ln[1+q\rho(\omega)]-q\rho(\omega)[1+q\rho(\omega)]^{-1}\}d\omega\times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}\{q\rho(\omega)-\ln[1+q\rho(\omega)]\}d\omega\right)^{-1},$$

$$r=4\pi q^2\int_{-\infty}^{\infty}\rho^2(\omega)[1+q\rho(\omega)]^{-1}d\omega\left(\int_{-\infty}^{\infty}\{q\rho(\omega)-\ln[1+q\rho(\omega)]\}d\omega\right)^{-2}.$$

Заметим, что в отличие от оценки временного положения случайного сигнала [8] оценка его длительности оказывается смещенной (12). Формулы (12), (13) существенно упрощаются, когда $q\ll 1$, но $\mu q^2\gg 1$, что обеспечивает высокую апостериорную точность оценки. Тогда

$$d(\tau_m|\tau_0)\approx 0,\quad V(\tau_m|\tau_0)\approx 104/(q^4\Delta f^2_E). \quad (14)$$

Отсюда следует, что при $q\ll 1$ рассеяние оценки не зависит от формы спектра мощности случайного сигнала, а зависит лишь от величины его эквивалентной полосы частот. Из (14) для относительной среднеквадратичной погрешности измерения длительности случайного гауссовского сигнала получаем

$$\delta=\sqrt{V(\tau_m|\tau_0)}/\tau_0=2\sqrt{26}/(\mu q^2). \quad (15)$$

Частный случай оценки длительности при $q\ll 1$, когда верны формулы (14), (15) и измеритель (8) близок к оптимальному, представляет основной практический интерес. Действительно, при $q\gg 1$, когда уровень помех относительно мал, длительность случайного сигнала может быть с удовлетворительной точностью определена непосредственно по наблюдаемой реализации (1).

Отметим, что расчет характеристик оценки по формулам (12)—(15) для конкретных корреляционных функций показывает удовлетворительную точность упрощенных формул (14), (15) уже при $q\lesssim 0{,}05$—$0{,}15$. Так, при прямоугольной форме спектра мощности анализируемого случайного сигнала применение формул (14) вместо (12), (13) приводит к погрешности не более 20%, как только $q\leqslant 0{,}11$. Для экспоненциально-коррелированного случайного сигнала этот же уровень погрешности достигается при $q\leqslant 0{,}15$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирский Г. Я.* Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. — М.: Энергия, 1972. — 456 с.
2. *Виленкин С. Я.* Статистическая обработка результатов исследования случайных функций. — М.: Энергия, 1979. — 320 с.
3. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.

4. Вопросы статистической теории радиолокации, т. 1/Под ред. Г. П. Тартаковского.— М.: Сов. радио, 1963. — 424 с. Авторы: П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.
5. *Кремер И. Я., Владимиров В. И., Карпухин В. И.* Модулирующие помехи и прием радиосигналов. — М.: Сов. радио, 1972. — 480 с.
6. *Трифонов А. П.* Прием сигнала с неизвестной длительностью на фоне белого шума. — Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 1, с. 90—98.
7. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
8. *Трифонов А. П., Галун С. А.* Эффективность приема случайного импульсного сигнала на фоне белого шума. — Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, № 8, с. 1622—1630.

Рекомендована кафедрой радиофизики

Поступила в редакцию 19 марта 1984 г.