

83

83

**ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ
МВ и ССО СССР
РАДИОЭЛЕКТРОНИКА**

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ — 1985

УДК 621.396.235

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПРИ МНОГОКАНАЛЬНОМ ПРИЕМЕ СИГНАЛА

ТРИФОНОВ А. П., РАДЧЕНКО Ю. С.

Получены асимптотические точные (при увеличении отношения сигнал/шум) выражения для характеристик оценки максимального правдоподобия с учетом аномальных ошибок. Рассмотрена оценка отношения сигнал/шум и приведены результаты проверки точности найденных формул путем математического моделирования.

Хотя вопросам многоканального (разнесенного) приема посвящено значительное число работ, в них основное внимание уделяется задачам обнаружения и различения сигналов [1, 2]. Рассмотрим здесь оценку максимального правдоподобия (ОМП) неэнергетического параметра [3] радиосигнала, передаваемого по ν параллельным каналам с медленными общими замираниями по амплитуде и фазе. Сигнал на выходе i -го канала ($i = \overline{1, \nu}$) запишется в виде

$$x_i(t) = a_{0i} F(t, l_0) \cos [\omega_0 t + \psi(t, l_0) - \varphi_{0i}] + n_i(t). \quad (1)$$

Здесь $F(t, l)$ и $\psi(t, l)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции, зависящие от неизвестного неэнергетического параметра $l \in [-L/2, L/2]$, подлежащего оценке; a_{0i} ; φ_{0i} — неизвестные амплитуда и фаза сигнала на выходе i -го канала; $n_i(t)$ — реализации центрированных гауссовских процессов с корреляционной матрицей

$$\hat{B}(t_1 - t_2) = \langle n_i(t_1) n_k(t_2) \rangle = \hat{B}_0 R(t_1 - t_2), \quad (i, k = \overline{1, \nu}),$$

\hat{B}_0 — неотрицательно определенная симметричная числовая матрица, элементы которой определяют уровень помех в каждом канале и их межканальную корреляцию.

Для получения ОМП l_m неизвестного параметра l необходимо сформировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП), который равен [2]

$$M(l) = \vec{\eta}^+(l) \hat{Q}^{-1} \vec{\eta}(l)/2, \quad (2)$$

где $\vec{\eta}^+(l) = \|\vec{X}^+(l) \vec{Y}^+(l)\|$ — блочный вектор; (+) — символ транспонирования, а \hat{Q} — блочная матрица

$$\hat{Q} = \left\| \begin{array}{cc} \hat{B}_0^{-1} & \vec{0} \\ \vec{0} & \hat{B}_0^{-1} \end{array} \right\| d^2,$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{X}^+(l) \\ \vec{Y}^+(l) \end{array} \right\} = \int_0^T \int_0^T \vec{x}^+(t_1) \hat{B}_0^{-1} h(t_1, t_2) F(t_2, l) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} [\omega_0 t_2 + \psi(t_2, l)] dt_1 dt_2,$$

$$d^2 = \int_0^T \int_0^T F(t_1, l) F(t_2, l) h(t_1, t_2) \cos [\omega_0(t_1 - t_2) + \psi(t_1, l) - \psi(t_2, l)] dt_1 dt_2 / 2,$$

функция $h(t_1, t_2)$ определяется из интегрального уравнения $\int_0^T R(t_1 - t) h(t, t_2) dt = \delta(t_1 - t_2)$; T — время наблюдения.

Рассмотрим коротко основные свойства ЛФОП. Представим (2) в виде суммы $M(l) = S(l_0, l) + N(l) + v$, где $S(l_0, l) = \langle M(l) \rangle - v$ — сигнальная, а $N(l) = M(l) - \langle M(l) \rangle$ — шумовая функции [3]. Усредняя (2) по реализациям помехи при фиксированных значениях неизвестных параметров сигнала, получаем:

$$S(l_0, l) = z^2 G^2(l_0, l) / 2 = z^2 \{S_c^2(l_0, l) + S_s^2(l_0, l)\} / 2, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} S_c(l_1, l_2) \\ S_s(l_1, l_2) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2d^2} \int_0^T \int_0^T F(t_1, l_1) F(t_2, l_2) h(t_1, t_2) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} [\omega_0(t_1 - t_2) + \psi(t_1, l_1) - \psi(t_2, l_2)] dt_1 dt_2,$$

$$z^2 = [\vec{\pi}_{0c}^+ \hat{B}_0^{-1} \vec{\pi}_{0c} + \vec{\pi}_{0s}^+ \hat{B}_0^{-1} \vec{\pi}_{0s}] d^2, \quad (4)$$

$$\vec{\pi}_{0c}^* = \| a_{0i} \cos \varphi_{0i} \|, \quad \vec{\pi}_{0s}^* = \| a_{0i} \sin \varphi_{0i} \|.$$

Шумовая функция $N(l)$ представляет собой реализацию центрированного случайного процесса, корреляционная функция которого имеет вид

$$K_N(l_1, l_2) = \langle N(l_1) N(l_2) \rangle = v G^2(l_1, l_2) + z^2 \{S_c(l_1, l_2) [S_c(l_0, l_1) S_c(l_0, l_2) + S_s(l_0, l_1) S_s(l_0, l_2)] + S_s(l_1, l_2) [S_c(l_0, l_1) S_s(l_0, l_2) - S_s(l_0, l_1) S_c(l_0, l_2)]\}. \quad (5)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением класса узкополосных радиосигналов, для которых при $|l_1 - l_2| \rightarrow \infty$ $G(l_1, l_2) = o(|\ln |l_1 - l_2||^{-1})$, а при $|l_1 - l_2| \rightarrow 0$

$$G(l_1, l_2) = 1 - \gamma^2 (l_1 - l_2)^2 / 2 + q^2 (l_1 - l_2)^4 / 4! + o(|l_1 - l_2|^4), \quad (6)$$

$$\text{где } \gamma^2 = \left[\frac{\partial^2 G(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} \right]_{l_1=l_2} < \infty, \quad q^2 = \left[\frac{\partial^4 G(l_1, l_2)}{\partial l_1^2 \partial l_2^2} \right]_{l_1=l_2} < \infty. \quad (7)$$

Согласно (6) предполагается, что законы амплитудной и фазовой модуляции полезного сигнала непрерывно дифференцируемы по параметру l не менее чем дважды [4, 5]. Достаточным условием справедливости (7) является существование пяти непрерывных производных сигнала по l для всех $t \in [0, T]$ [5]. Сформулированное ограничение на класс полезных сигналов обеспечивает асимптотическую (при отношении сигнал/шум $z \rightarrow \infty$) эффективность и состоятельность ОМП параметра l [6].

Характеристики ОМП неэнергетического параметра. Обозначим Δ — длительность сигнальной функции, так что $S(l_0, l_0 \pm \Delta) \approx 0$. Тогда априорный интервал возможных значений неизвестного параметра $[-L/2, L/2]$ можно разбить на два интервала: L_s , к которому отнесем значения $l \in [l_0 - \Delta, l_0 + \Delta]$, и L_N , к которому отнесем остальную часть интервала $[-L/2, L/2]$. Будем считать, что $L \gg \Delta$ и отношение сигнал/шум (ОСШ) z^2 (4) для принятого сигнала не слишком мало. Тогда, согласно [3], можем записать выражение для условного смещения (систематической ошибки):

$$b(l_m | l_0, \vec{\pi}_0) = \langle l_m - l_0 \rangle = P_0 b_0 - l_0 (1 - P_0) \quad (8)$$

и рассеяния (среднего квадрата ошибки)

$$V(l_m | l_0, \vec{\pi}_0) = \langle (l_m - l_0)^2 \rangle = P_0 \sigma_0^2 + (1 - P_0)(l_0^2 + L^2/12) \quad (9)$$

ОМП параметра l_0 . Здесь $\vec{\pi}_0^+ = \|\vec{\pi}_{0c}^+ \vec{\pi}_{0s}^+\|$; b_0 и σ_0^2 — условные смещение и рассеяние надежной оценки, а P_0 — вероятность надежной оценки. Для сигналов (1), удовлетворяющих условиям (6), (7), получаем [3]

$$b_0 \approx 0; \quad \sigma_0^2 = \sigma_0^2(l_m | l_0, \vec{\pi}_0) = \left\{ \frac{\partial^2 K_N(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2} \left/ \left[\frac{\partial^2 S(l_0, l)}{\partial l^2} \right] \right. \right\}_{l_0}. \quad (10)$$

Подставляя (3) и (5) в (10) и выполняя дифференцирование, имеем для больших z

$$\sigma_0^2 = (2\nu + z^2)/z^4 \gamma^2. \quad (11)$$

При отсутствии медленных замираний сигнала (1), т. е. при априори известных коэффициентах передачи каждого из ν каналов, рассеяние надежной оценки определяется выражением [3]

$$\sigma^2 = 1/z^2 \gamma^2. \quad (12)$$

Из сравнения (11) и (12) следует, что наличие медленных замираний приводит (при равных отношениях сигнал/шум) к увеличению рассеяния в $(2\nu + z^2)/z^2$ раз. Если обозначить $z_c^2 = z^2/\nu$ — ОСШ, приходящееся на один канал, то проигрыш в точности надежной оценки равен $(2 + z_c^2)/z_c^2$. Когда $z_c^2 \ll 1$, этот проигрыш может достигать значительной величины. Очевидно, формулы (11), (12) при $z_c^2 \ll 1$ можно использовать, только если $z^2 = z_c^2 \nu \gg 1$, т. е., когда число каналов велико. При небольшом числе каналов (в частности при $\nu = 1$) в силу условия $z^2 \gg 1$ имеем, что $2\nu/z^2 \ll \ll 1$. В этом случае формула (11) переходит в формулу (12), совпадающую с выражением для дисперсии надежной оценки параметра сигнала при одноканальном приеме [3].

В соответствии с определением вероятности надежной оценки $P_0 = \int F_N(H) dF_s(H)$. Здесь $F_s(\cdot)$ — распределение абсолютного максимума ЛФОР (2) при $l \in L_s$, $F_N(\cdot)$ — то же при $l \in L_N$. Воспользовавшись найденными в [2] аппроксимациями распределений $F_s(\cdot)$ и $F_N(\cdot)$, получаем

$$P_0 = \int_{\sqrt{2\nu-1}}^{\infty} \frac{x^\nu}{z^{\nu-1}} \exp \left[-\frac{x^2 + z^2}{2} - \frac{\xi x^{2\nu-1}}{(\nu-1)! 2^{\nu-1/2} \sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] \times \\ \times I_{\nu-1}(zx) dx, \quad (13)$$

где $\xi = L\gamma$ — приведенная длина априорного интервала, а $I_\nu(\cdot)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, порядка ν .

Формулы (8), (9), (11), (13) позволяют приблизительно определить смещение и рассеяние ОМП l_m , причем точность этих формул возрастает с увеличением z и ξ .

На рис. 1, а приведены зависимости $\rho = 12V(l_m/l_0, \vec{\pi}_0)/L^2$ нормированного рассеяния оценки от ОСШ z^2 для различного числа каналов ν и $\xi = 40$. Как следует из рис. 1, а, зависимость рассеяния оценки от ОСШ имеет пороговый характер [3, 7]. При этом для фиксированного ОСШ z^2 рассеяние оценки увеличивается с ростом числа каналов ν , т. е. с уменьшением ОСШ z_c^2 , приходящегося в среднем на один канал.

Оценка ОСШ. Найденные характеристики ОМП l_m зависят от ОСШ (4) для принятого сигнала, которое перепишем в виде

$$z^2 = \vec{\pi}_0^+ \hat{Q} \vec{\pi}_0. \quad (14)$$

Эта величина определяется априори неизвестными значениями амплитуд и фаз сигнала (1), т. е. полученные характеристики ОМП l_m являются условными по отношению к параметрам каналов. Поэтому из-

мерение величины ОСШ необходимо для контроля характеристик ОМП l_m в процессе приема [7].

В качестве оценки неизвестного ОСШ будем использовать величину z_m^2 , получаемую из (14) заменой истинного значения вектора $\vec{\pi}_0$ на его ОМП $\vec{\pi}_m$. Записывая ЛФОРП для всех неизвестных параметров и решая уравнение правдоподобия, получаем $\vec{\pi}_m = \hat{Q}^{-1} \vec{\eta}(l_m)$. Подставляя $\vec{\pi}_m$ в (14), находим оценку ОСШ $z_m^2 = \vec{\eta}^+ (l_m) \hat{Q}^{-1} \vec{\eta}(l_m)$. Сопоставление этой формулы

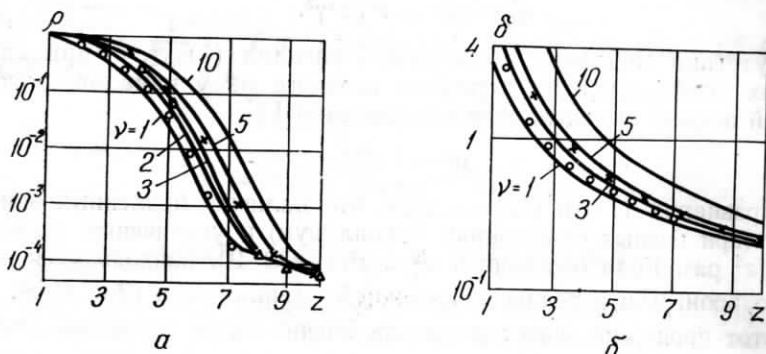


Рис. 1

с (2) показывает, что $z_m^2 = 2M(l_m)$, т. е. оценка ОСШ равна удвоенной величине абсолютного максимума ЛФОРП (2). Следовательно, распределение оценки ОСШ имеет вид

$$F_z(x) = P\{z_m^2 < x\} = \beta_\nu(x/2), \quad (15)$$

где, согласно [2]

$$\beta_\nu(c) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{\xi c^{\nu-1/2}}{(\nu-1)! \sqrt{\pi}} \exp(-c)\right] \int_0^{\sqrt{2c}} \frac{x^\nu}{z^{\nu-1}} \exp\left(-\frac{x^2+z^2}{2}\right) I_{\nu-1}(zx) dx, & c \geq \nu - 1/2, \\ 0, & c < \nu - 1/2. \end{cases}$$

С помощью (15) можно найти смещение и рассеяние оценки z_m^2 , однако вычислительные трудности оказываются при этом значительными. Поэтому ограничимся рассмотрением случая, когда вероятность надежной оценки P_0 (13) не слишком мала.

Тогда смещение и рассеяние оценки ОСШ равны: $b(z_m^2 | z^2) = \langle z_m^2 - z^2 \rangle = -2\nu$; $V(z_m^2 | z^2) = \langle (z_m^2 - z^2)^2 \rangle = 4z^2 + 4\nu^2 + 4\nu$. Относительная среднеквадратичная погрешность оценки ОСШ определяется выражением $\delta = \sqrt{V(z_m^2 - z^2)}/z^2 = 2\sqrt{1 + \nu(1 + \nu)}/z$. Зависимости нормированной среднеквадратичной погрешности оценки ОСШ от z для различного числа каналов ν приведены на рис. 1, б.

Рассмотренная оценка ОСШ является смещенной. Однако величина смещения не зависит от истинного значения ОСШ z . Поэтому можно указать несмещенную оценку $\tilde{z}_m^2 = z_m^2 - 2\nu$, рассеяние которой равно $V(\tilde{z}_m^2 | z^2) = 4z^2 + 4\nu$. Заметим, что при необходимости с помощью (15) нетрудно указать доверительные границы для оценки ОСШ.

Результаты математического моделирования. Полученные выражения для характеристик ОМП l_m являются асимптотически точными при $z \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow \infty$ и будут приближенными при конечных значениях этих параметров. Для определения границ применимости приведенных формул

при конечных значениях z и ξ было выполнено моделирование оценки на ЭВМ БЭСМ-6. Моделирование проводилось для числа каналов $\nu = 1, 2, 3$; значений $\xi = 10, 40$ и диапазона ОСШ $z = 1-10$. Полагалось, что огибающая сигнальной функции (3) и ее квадратура имеют вид

$$G(l_1 - l_2) = S_c(l_1 - l_2) = \exp[-(l_1 - l_2)^2/2], \quad S_s(l_1 - l_2) = 0. \quad (16)$$

Такой вид функции (3) соответствует, например, радиосигналу (1) с колокольной огибающей при оценке его задержки или несущей частоты на фоне белого шума [3]. Матрица \hat{B}_0 выбиралась диагональной с одинаковыми ненулевыми элементами. В процессе моделирования формировался случайный процесс

$$M(l) = \sum_{i=1}^{\nu} \{z_c G_i(l - l_0) + N_{ci}(l)\}^2 + N_{si}^2(l)/2, \quad (17)$$

где $|l| \leq \xi/2$, $N_{ci}(l)$ и $N_{si}(l)$ — стационарные независимые гауссовские случайные процессы с нулевым средним значением и корреляционными функциями $[2] \langle N_{ci}(l_1) N_{ci}(l_2) \rangle = \langle N_{si}(l_1) N_{si}(l_2) \rangle = G(l_1 - l_2)$; $\langle N_{si}(l_1) \times N_{ci}(l_2) \rangle = 0$. Реализации стационарных гауссовских случайных процессов $\{N_c(l) N_s(l)\}$ формировались методом скользящего суммирования из последовательности независимых гауссовских чисел с параметрами $(0, 1)$ [8, 9]. Шаг дискретизации по l выбирался равным 0,1. В результате максимальная среднеквадратичная ошибка, вызванная заменой непрерывного процесса $M(l)$ дискретной последовательностью, не превышала 5%. Оценки l_m и z_m^2 определялись по положению и величине абсолютного максимума $M(l)$ (17).

Для удобства сопоставления результатов моделирования и теоретических расчетов по формулам (8), (9), (11), (13) были выбраны значения $l_0 = 0$; $z_c^2 = z_0^2/\sqrt{2}$, где $z_0 = 1, 2, 3, \dots$, так что $z = z_0/\sqrt{2}$.

Для сокращения затрат машинного времени применялся метод независимых испытаний [8], который был реализован следующим образом. В каждом цикле статистических испытаний вырабатывались шесть независимых реализаций стационарного гауссовского процесса с корреляционной функцией (16). Длина реализаций соответствовала максимальному значению $\xi = 40$. Затем на основе этих реализаций формировался набор процессов $M(l)$ (17) для всего исследуемого диапазона параметров $\nu = 1, 2, 3$; $\xi = 10, 40$; $z_0 = 1-10$. Таким образом, в каждом цикле определялось по 60 оценок l_m и z_m^2 при $\nu = 1$, и по 20 оценок для $\nu = 2, 3$. Всего было проведено 10^4 циклов испытаний. В результате с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 10-15%. На рис. 1, а и б приведены экспериментальные характеристики оценок l_m (при $\xi = 40$) и z_m^2 (при $\xi = 10$), полученные в процессе математического моделирования. Как следует из сравнения экспериментальных и теоретических зависимостей, их удовлетворительное согласование наблюдается при ОСШ $z > 2-3$ и значениях $\xi \geq 10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов И. С., Финк Л. М. Передача дискретных сообщений по параллельным каналам. — М.: Сов. радио, 1971. — 408 с.
2. Трифонов А. П. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами. — В кн.: Теория обнаружения сигналов. — М.: Радио, и связь, 1984, с. 12-89.
3. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
4. Куликов Е. И., Трифонов А. П. О некоторых свойствах сигнала на выходе оптимального приемника. — Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 12, с. 2254-2256.
5. Трифонов А. П. Асимптотические характеристики оптимального обнаруже-

ния квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовской помехи.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, вып. 4, с. 180—183.

6. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания.— М.: Наука, 1979.— 528 с.

7. Фалькович С. Е., Хомяков Э. Н. Статистическая теория измерительных радиосистем.— М.: Радио и связь, 1981.— 228 с.

8. Поляк Ю. Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах.— М.: Сов. радио, 1971.— 399 с.

9. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1971.— 328 с.

Поступила в редакцию после переработки 27.12.84.

УДК 621.391.256

РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ПРИЕМА В ЦЕЛОМ ДЛЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОГО КАНАЛА СВЯЗИ

ТУРКИН А. И.

Рассмотрен синтез рекуррентного алгоритма декодирования линейных кодов для гауссовского полунепрерывного канала связи. Получен алгоритм и оценка средней вероятности ошибочного декодирования.

Известно [1, 2, 3], что процедура оптимального декодирования в целом для линейных кодов представляет собой экстремальную задачу целочисленного программирования и сводится к поиску кодового слова, максимизирующего апостериорную вероятность наблюдения. Понятно, что даже для сравнительно коротких кодов оптимальную процедуру декодирования реализовать невозможно вследствие катастрофического роста числа операций (пропорционального числу разрешенных кодовых слов кода), затрачиваемых при получении оценки переданного сообщения. В связи с этим становится понятной актуальность задачи поиска методов приема в целом, допускающих простую техническую реализацию и имеющих характеристики помехоустойчивости, близкие к идеальным [1—3]. Такие методы в ряде случаев сводятся к целочисленным экстремальным задачам условной оптимизации, например, максимизации апостериорной вероятности наблюдаемых сигналов при ограничениях, образующих подмножество (со сравнительно небольшим числом элементов) разрешенных кодовых слов, в котором отыскивается наиболее вероятное кодовое слово, и принимаемое в качестве результата декодирования [1, 2, 9].

В настоящей работе рассматривается методика построения конструктивного алгоритма декодирования линейного кода непереборного типа на основе численных методов решения непрерывных экстремальных задач условной оптимизации [4].

Пусть при передаче дискретных сообщений, состоящих из nR двоичных символов, по гауссовскому полунепрерывному каналу связи без памяти используется блочный линейный (n, k) -код Y с порождающей $(nR \times n)$ матрицей $G = \{g_{ij}\}_{i,j}$, $g_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$; n — длина кода; k — длина отрезка кодируемого сообщения; $R = kn^{-1}$ — относительная скорость кода [8]. В результате передачи кодового слова $y(x^l) \in Y$ ($y(x^l) = \{y_j(x^l)\}_{j=1}^n$; l — номер передаваемого сообщения $l = 1, 2, \dots, 2^{nR}$) на выходе канала наблюдается случайный вектор $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^n$, причем каждая из случайных величин ξ_j зависит от одного передаваемого кодового символа, а именно, от $y_j(x^l)$. Будем считать, что входные последовательности канала состоят из символов $+1$ и -1 , а выходная последовательность состоит из нормально распределенных случайных величин $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ с условной плотностью распределения вероятности