

86 86

РАДИОТЕХНИКА

1986, № 4

иллюстрируется зависимость этих коэффициентов от отношения $f_d/\Delta f_n$ для функции (4). Задание нулевых начальных условий (рис. 1) приводит к возникновению переходного процесса, который учитывается автоматически при вычислении коэффициентов $c(n, i)$ и не влияет на корреляционную функцию моделируемого процесса.

Таким образом, на основе обобщения метода скользящего суммирования получен весьма простой алгоритм (1) моделирования нестационарных случайных процессов. Исходной информацией для моделирования служит корреляционная функция процесса, а подготовительные операции сводятся к элементарному вычислению коэффициентов алгоритма (1) по (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1971.

Поступила после доработки 15 июля 1985 г.

УДК 621.391

А. П. ТРИФОНОВ, Ю. В. НЕВЕЖИН

ХАРАКТЕРИСТИКИ БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ ГИПОТЕЗ О НАБЛЮДАЕМОМ ПРОЦЕССЕ

В предположении малых отношений сигнал-шум получены асимптотически точные выражения для рассеяния байесовской оценки при квадратичной функции потерь. Приводятся результаты моделирования байесовской оценки на ЭВМ.

Аналогично [1] положим, что с вероятностью p_i , $i = \overline{1, r}$, $\sum_{i=1}^r p_i = 1$, справедлива одна из гипотез H_i : наблюдаемая реализация случайного процесса $x(t)$ при $t \in [0, T]$ представляет собой аддитивную смесь одного из r полезных сигналов $s_i(t, \lambda)$ и гауссовского белого шума $n_i(t)$, т. е.

$$x(t) = s_i(t, \lambda_0) + n_i(t). \quad (1)$$

Неизвестный параметр $\lambda \in \Lambda$, подлежащий оценке, считаем неэнергетическим [2], одинаковым для всех сигналов и распределенным с плотностью вероятности $W(\lambda)$. Тогда байесовская оценка (БО) λ_0 параметра λ при квадратической функции потерь согласно [1] определяется выражением

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^r P_{ips} \lambda_{i0}, \quad (2)$$

где P_{ips} — апостериорная вероятность гипотезы H_i , λ_{i0} — БО при квадратической функции потерь, найденная в предположении, что гипотеза H_i верна с вероятностью 1 [2].

Применительно к непрерывной обработке наблюдаемых данных (2) удобно переписать в виде

$$\lambda_0 = \left\{ \sum_{i=1}^r p_i \int_{\Lambda} W(\lambda) \exp[M_i(\lambda)] d\lambda \right\}^{-1} \sum_{i=1}^r p_i \int_{\Lambda} \lambda W(\lambda) \exp[M_i(\lambda)] d\lambda, \quad (3)$$

где

$$M_i(\lambda) = 2 \int_0^T x(t) s_i(t, \lambda) dt / N_{0i} \quad (4)$$

— логарифм функционала отношения правдоподобия; $z^2_i = 2 \int_0^T s^2_i(t, \lambda) dt / N_{0i}$ — отношение сигнал-шум; N_{0i} — спектральная плотность помехи для гипотезы H_i .

Пусть верна гипотеза H_k . Тогда, подставляя (1) в (4), получаем

$$M_{ik}(\lambda) = z_k z_i S_{ik}(\lambda, \lambda_0) + z_i N_{ik}(\lambda) \sqrt{\alpha_{ik} - z_i^2/2}, \quad (5)$$

где

$$S_{ik}(\lambda, \lambda_0) = \frac{2}{N_{0i}} \int_0^T s_k(t, \lambda_0) s_i(t, \lambda) dt / z_k z_i; \quad (6)$$

$$N_{ik}(\lambda) = \frac{2}{N_{0i}} \int_0^T n_k(t) s_i(t, \lambda) dt / z_i \sqrt{\alpha_{ik}}; \quad (7)$$

$$\alpha_{ik} = N_{0k}/N_{0i}.$$

Нормированная шумовая функция (7) представляет собой реализацию гауссовского случайного процесса, для которого находим [2]:

$$\langle N_{ik}(\lambda) \rangle = 0; \quad \langle N_{ik}(\lambda_1) N_{jk}(\lambda_2) \rangle = \begin{cases} S_{ii}(\lambda_1, \lambda_2) & \text{при } i = j; \\ S_{ij}(\lambda_1, \lambda_2) \sqrt{\alpha_{ij}} & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что для нормированной сигнальной функции (6) справедливо неравенство $|S_{ij}(\lambda_1, \lambda_2)| \leq 1$. Если сигналы, соответствующие различным гипотезам, ортогональны при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta$, то

$$S_{ij}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} S_{ii}(\lambda_1, \lambda_2) & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Класс таких сигналов включает в себя узкополосные радиосигналы, разнесенные по частоте, импульсные сигналы, разнесенные по времени, сигналы, ортогональные в усиленном смысле [3], и т. д. Полагая далее отношение сигнал-шум для каждого из r сигналов малым, т. е. $z_i \ll 1$, $i = \overline{1, r}$, найдем характеристики БО λ_0 .

Естественной характеристикой БО является байесовский риск, который при квадратической функции потерь совпадает с рассеянием оценки

$$V(\lambda_0) = \int_{\Delta} V(\lambda_0/\lambda) W(\lambda) d\lambda, \quad (8)$$

где

$$V(\lambda_0/\lambda_0) = \sum_{k=1}^r p_k V_k(\lambda_0/\lambda_0) \quad (9)$$

— условное рассеяние БО;

$$V_k(\lambda_0/\lambda_0) = \langle (\lambda_0 - \lambda_0)^2 \rangle \quad (10)$$

— условное рассеяние БО, когда верна гипотеза H_k .

Подставим в (3) значение логарифма функционала отношения правдоподобия из (5) и разложим полученное выражение в ряд Маклорена по z_i , $i = \overline{1, r}$. Аналогично [2, 4], отбросим члены разложения порядка малости $z_i z_k z_m z_n$ ($i, k, m, n = \overline{1, r}$) и менее. Это разложение существенно упрощает выполнение усреднения в (10), так как шумовые функции $N_{ik}(\lambda)$ входят в коэффициенты разложения лишь в положительных степенях. Аппроксимацию БО (3) в виде отрезка ряда Маклорена подставим в (10) и выполним усреднение по реализациям помехи. Подставляя затем результат в (9), для условного рассеяния БО имеем

$$\begin{aligned} V(\lambda_0/\lambda_0) = & (\lambda_{pr} - \lambda_0)^2 + \sum_{k, i=1}^r p_k p_i^2 \alpha_{ki} z_i^2 I_i + 2(\lambda_{pr} - \lambda_0) \left[\sum_{k=1}^r p_k^2 z_k^2 \int_{\Delta} (\lambda - \lambda_{pr}) \times \right. \\ & \times W(\lambda) S_k(\lambda, \lambda_0) d\lambda - \sum_{k, i=1}^r p_k p_i^2 z_i^2 \alpha_{ki} \times \\ & \times \left. \int_{\Delta} \int_{\Delta} (\lambda_1 - \lambda_{pr}) W(\lambda_1) W(\lambda_2) S_i(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } \lambda_{pr} = \int_{\Delta} \lambda W(\lambda) d\lambda;$$

$$I_i = \iint_{\Lambda \Lambda} (\lambda_1 - \lambda_{pr}) (\lambda_2 - \lambda_{pr}) W(\lambda_1) S_i(\lambda_1, \lambda_2) W(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (12)$$

Усредняя (11) по истинным значениям неизвестного параметра λ_0 , получаем безусловное рассеяние (байесовский риск) (8):

$$V(\lambda_0) = \sigma_{pr}^2 + \sum_{k,i=1}^r p_k p_i^2 z_i^2 \alpha_{ik} I_i - 2 \sum_{k=1}^r p_k^2 z_k^2 I_k, \quad \sigma_{pr}^2 = \int_{\Lambda} (\lambda - \lambda_{pr})^2 W(\lambda) d\lambda. \quad (13)$$

Заметим, что, положив в (11), (13) $r=1$, приходим к результату [2, 4].

Если все гипотезы H_i равновероятны, т. е. $p_i=1/r$, а сигналы при всех гипотезах обладают одинаковыми отношениями сигнал-шум $z_i^2=z^2$ и сигнальными функциями $S_i(\lambda_1, \lambda_2)=S(\lambda_1, \lambda_2)$, то (13) упрощается и принимает вид

$$V(\lambda_0) = \sigma_{pr}^2 - z^2 I/r, \quad (14)$$

где I определяется из (12) при $S_i(\lambda_1, \lambda_2)=S(\lambda_1, \lambda_2)$.

Сопоставляя (14) с результатом из [2, 4], видим, что при наличии нескольких гипотез уменьшение рассеяния оценки в r раз ниже, чем при одной гипотезе.

Полученные формулы (11) и (13) для рассеяния БО являются приближенными и аналитически оценить их точность затруднительно. Можно лишь утверждать, что их точность возрастает с уменьшением отношения сигнал-шум, т. е. (11) и (13) асимптотически точны при $z_i \rightarrow 0$, $i=\overline{1, r}$. При определении границ применимости асимптотических формул (11) и (13) на ЭВМ ЕС-1060 было выполнено моделирование БО при $r=2$, $z_1=z_2=z$, одинаковой для обеих гипотез форме сигнальных функций $S(\lambda_1, \lambda_2)=\exp[-(\lambda_1-\lambda_2)^2/2]$ и равномерной априорной плотности вероятности

$$W(\lambda) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{при } |\lambda| \leq \Delta/2, \\ 0 & \text{при } |\lambda| > \Delta/2. \end{cases}$$

Для получения оценки (3) на основе последовательности некоррелированных нормальных случайных чисел методом скользящего суммирования [5] формировались значения реализации $N_n(\lambda)$ (7) с шагом $\Delta\lambda=0,05$. Затем согласно (3) и (5) вычислялась БО. При $\Delta=10$ для каждого набора параметров λ_0 , z и p_i статистические характеристики БО определялись на основе обработки 400 независимых реализаций шумовых функций.

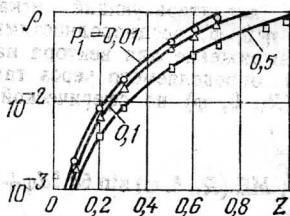


Рис. 1

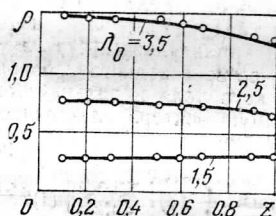


Рис. 2

Зависимости нормированного условного рассеяния БО $\rho = V(\lambda_0/\lambda_0) / \sigma_{pr}^2$ от отношения сигнал-шум, рассчитанные по (11), и результаты моделирования приведены на рис. 1, 2. Рис. 1 соответствует значению $\lambda_0=0$, рис. 2 — $p_1=0,5$.

Следует отметить удовлетворительную аппроксимацию экспериментальных зависимостей $\rho(z)$ асимптотической формулой (11) при $z \leq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шинаков Ю. С. Радиотехника, 1971, т. 26, № 4.
2. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех.—М.: Сов. радио, 1978.
3. Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н. Расчет помехо-

- устойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник.—М.: Сов. радио, 1981.
4. Трифонов А. П. Проблемы передачи информации, 1972, т. 8, № 2.
5. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.—М.: Сов. радио, 1971.

Поступила 10 июля 1985 г.