

Подписной индекс 72674

ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

2, 2003
ТОМ 6

Пороговый последовательный алгоритм обнаружения сигнала с неизвестной длительностью

Ю.Э. Корчагин

Выполнен синтез порогового алгоритма обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью. Показана возможность сокращения времени анализа решающей статистики по сравнению с максимально правдоподобным алгоритмом обнаружения. Результаты конкретизированы для прямоугольного импульса со скошенной вершиной.

Задачи обработки сигналов, прошедших неустойчивый канал распространения, имеют большое практическое и теоретическое значение при изучении распространения радиоволн. Такими являются каналы подвижной радиосвязи в условиях пересечённой местности, каналы, использующие отражение радиоволн от метеорных следов или спорадического слоя E в ионосфере и др. Обнаружение сигнала, отражённого от спорадического слоя E , позволяет зарегистрировать сам факт наличия этого слоя и исследовать свойства среды распространения. Поэтому представляет интерес синтез и анализ алгоритмов обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью, наблюдаемого на фоне шума.

Задача обнаружения сигнала с неизвестной длительностью на фоне аддитивного гауссовского белого шума рассматривалась в ряде работ [1-5]. Был синтезирован максимально правдоподобный (МП) алгоритм обнаружения. Найдены теоретические и экспериментальные характеристики МП обнаружителя. Однако МП алгоритмы приводят к необходимости анализа принятой реализации на всём априорном интервале возможных значений длительности сигнала. В работе [6] на примере задачи обнаружения и оценки момента разладки интенсивности пуассоновского потока показано, что сократить время анализа без потери качества обнаружения позволяет применение порогового алгоритма (ПА). Поэтому целесообразно рассмотреть пороговый алгоритм обнаружения сигнала с неизвестной длительностью.

Пусть на фоне аддитивного гауссовского белого шума подлежит обнаружению сигнал

$$s(t, \tau_0) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, & t < 0, t > \tau_0, \end{cases} \quad (1)$$

форма которого описывается непрерывной функцией $f(t)$, а τ_0 — его длительность, принимающая значения из априорного интервал

$$\tau_0 \in [T_1, T_2]. \quad (2)$$

Сформулируем задачу обнаружения в терминах теории проверки статистических гипотез [1-3]. Подлежит проверке простая гипотеза H_0 : $x(t) = n(t)$ — сигнал отсутствует в наблюдаемой реализации $x(t)$ — против сложной альтернативы H_1 : $x(t) = \gamma_0 s(t, \tau_0) + n(t)$ — сигнал присутствует. Здесь $n(t)$ — реализация гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 .

Будем также считать, что интервал наблюдения $[0, T_0]$ удовлетворяет условию $0 < T_1 \leq T_2 \leq T$, так что сигнал (1) полностью размещается в этом интервале. Располагая реализацией $x(t)$, необходимо вынести решение о наличии или отсутствии сигнала (1) в принятой реализации.

Для синтеза алгоритма обнаружения можно воспользоваться методом МП [1-3], согласно которому приёмное устройство формирует логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) [2, 4-5]

$$L(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^{\tau} [x(t) - f(t)/2] f(t) dt \quad (3)$$

для всех возможных значений длительности из априорного интервала (2). Решение о наличии или отсутствии сигнала в наблюдаемых данных принимается в результате сравнения абсолютного максимума логарифма ФОР $L = \sup L(\tau)$, $L = \sup L(\tau)$ с порогом h , задаваемым выбранным критерием оптимальности. Если порог превышен ($L > h$), выносится решение о наличии сигнала. В противном случае ($L < h$) выносится решение об отсутствии сигнала.

В тех случаях, когда требуется уменьшить время анализа, целесообразно использовать пороговый ал-

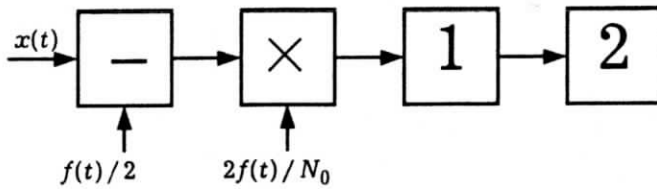


Рис. 1.

горитм [6], согласно которому анализ решающей статистики $L(\tau)$ (3) прекращается либо в момент $\tau' < T_2$ первого превышения ею порога h , либо в момент времени T_2 , если $\tau' \geq T_2$. При этом среднее время анализа не превосходит T_2 и может быть существенно уменьшено соответствующим выбором порога. Решение о наличии сигнала (1) в наблюдаемой реализации принимается, если реализация $L(\tau)$ пересекает порог h при $\tau' \in [T_1, T_2]$. В противном случае принимается решение об отсутствии сигнала. Тогда для времени анализа можем записать

$$T_a = \begin{cases} \tau', & T_1 \leq \tau' \leq T_2, \\ T_2, & \tau' > T_2. \end{cases}$$

Блок-схема порогового алгоритма обнаружения изображена на рис. 1.

Здесь обозначено 1 — интегратор на интервале времени $[0, t]$, 2 — решающее устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала интегратора с порогом h и выносящее решение о наличии или отсутствии сигнала.

Поскольку ПА может обеспечить сокращение времени анализа по сравнению с МП алгоритмом, найдём среднее время анализа ПА. Статистические характеристики времени анализа можно определить, зная статистические характеристики случайной величины τ' . Наиболее полной характеристикой времени τ' первого достижения границы h реализацией логарифма ФОП является функция распределения времени первого достижения границы. Обозначим $L_j(\tau) = L(\tau | H_j)$, $j = 0, 1$, $T_{aj} = T_a$ и $t_j = \tau'$ при условии справедливости гипотезы H_j , $F_j(h, T)$ — функция распределения времени t_j

$$F_j(h, T) = P\{t_j < T\}. \quad (4)$$

Вероятность достижения границы $F_j(h, T)$ можно выразить через вероятность

$$\tilde{F}_j(h, T) = P\left\{L_j(\tau) < h \atop T_1 \leq \tau \leq T\right\} \quad (5)$$

недостижения процессом $L_j(\tau)$ границы h к моменту времени T

$$F_j(h, T) = 1 - \tilde{F}_j(h, T). \quad (6)$$

Для определения функции (5) исследуем статистические характеристики случайного процесса $L_j(\tau)$.

Поскольку логарифм ФОП (3) представляет собой линейное преобразование гауссовского случайного

процесса $x(t)$, он также является гауссовским, а следовательно, для полного статистического описания процесса $L_j(\tau)$ достаточно найти его математическое ожидание $S_j(\tau) = \overline{L_j(\tau)}$ и корреляционную функцию $B_j(\tau_1, \tau_2) = [L_j(\tau_1) - S_j(\tau_1)][L_j(\tau_2) - S_j(\tau_2)]$. Выполняя усреднение, находим

$$S_j(\tau) = \overline{L_j(\tau)} = \frac{2j}{N_0} \int_0^{\min(\tau, \tau_0)} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau} f^2(t) dt = \\ = j \min[Q(\tau), Q(\tau_0)] - Q(\tau)/2, \quad (7)$$

$$B_j(\tau_1, \tau_2) = [\overline{L_j(\tau_1) - S_j(\tau_1)}][\overline{L_j(\tau_2) - S_j(\tau_2)}] = \\ = \frac{2}{N_0} \int_0^{\min(\tau_1, \tau_2)} f^2(t) dt = \min[Q(\tau_1), Q(\tau_2)], \quad (8)$$

где обозначено

$$Q(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^{\tau} f^2(t) dt \quad (9)$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приемника МП для сигнала длительности τ .

Перейдём аналогично [4,5] в выражении (3) к новой переменной $\lambda = Q(\tau)$, $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$, $\Lambda_1 = Q(T_1)$, $\Lambda_2 = Q(T_2)$. Учитывая (7) и (8), можем представить случайный процесс $L_j(\tau)$ в виде

$$L_j(\tau) = L_j[\tau(\lambda)] = \mu_j(\lambda) = \mu(\lambda | \gamma_0 = j) = \\ = j \min(\lambda, \lambda_0) - \lambda/2 + v(\lambda). \quad (10)$$

Здесь $\lambda_0 = Q(\tau_0)$, $v(\lambda)$ — гауссовский случайный процесс, а $\tau(\lambda)$ определяется из решения уравнения $Q(\tau) = \lambda$. Из (7), (8) следует, что $v(\lambda)$ обладает моментами

$$v(\lambda) = 0, \quad v(\lambda_1) v(\lambda_2) = \min(\lambda_1, \lambda_2).$$

Используя представление (10), функцию распределения (5) перепишем как

$$\tilde{F}_j(h, T) = \tilde{G}_j(h, Q(T)), \quad (11)$$

где

$$\tilde{G}(h, \Lambda) = P\left\{\mu_j(\lambda) < h \atop \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda\right\}.$$

Аналогично (6) вероятность достижения границы h процессом $\mu_j(\lambda)$ на отрезке $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda]$ равна $G_j(h, \Lambda) = 1 - \tilde{G}_j(h, \Lambda)$. Обозначим λ'_j — моменты первого достижения границы h процессом $\mu_j(\lambda)$ и перепишем искомое распределение времени первого достижения границы h логарифмом ФОП в виде $F_j(h, T) = G_j(h, Q(T))$, где $G_j(h, \Lambda) = P\{\lambda'_j < \Lambda\}$.

Поскольку $y_j(\lambda) = h - \mu_j(\lambda)$ — реализация марковского случайного процесса с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1j} = \begin{cases} 1/2 - j, & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0, \\ 1/2, & \lambda_0 < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases} \quad k_{2j} = 1, \quad j = 0, 1, \quad (12)$$

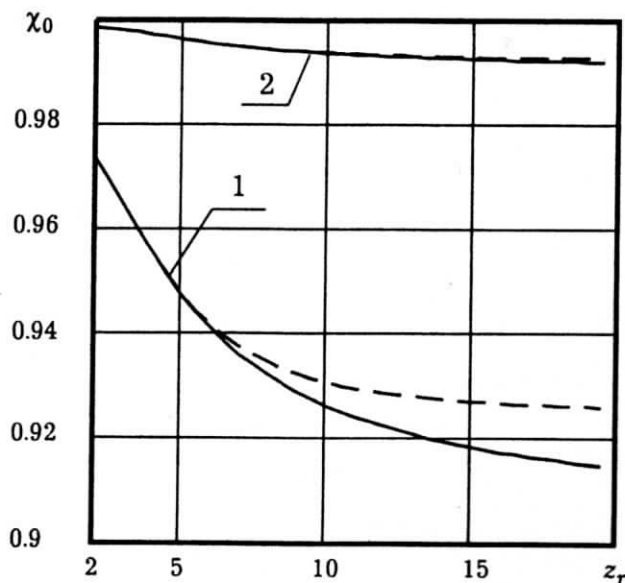


Рис. 2.

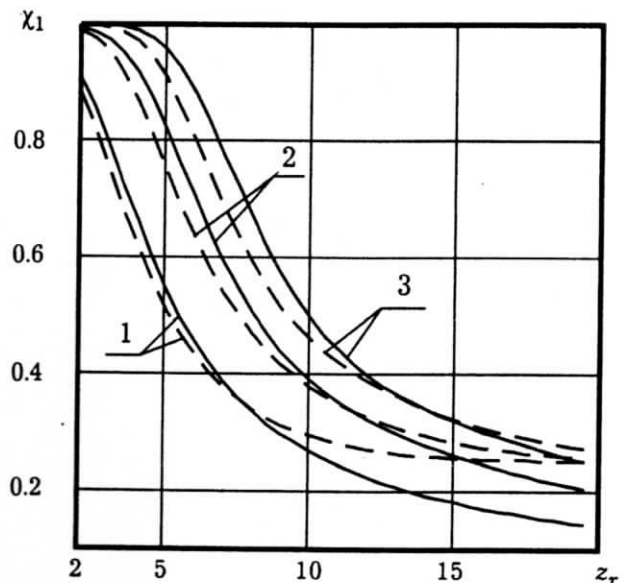


Рис. 3.

то можем записать

$$\begin{aligned} \tilde{G}_j(h, \Lambda) &= P\{y_j(\lambda) > 0, \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda]\} = \\ &= \int_0^\infty W_j(y, \Lambda) dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $W_j(y, \lambda)$ — решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_j(y, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y} [k_{1j} W_j(y, \lambda)] - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_{2j} W_j(y, \lambda)] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

при граничных условиях $W_j(y=0, \lambda) = W_j(y=\infty, \lambda) = 0$ и начальном условии

$$W_j(y, \lambda)|_{\lambda=\Lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \exp\left[-\frac{(y-h+\Lambda_1(j-1/2))^2}{2\Lambda_1}\right].$$

Применяя метод отражения с переменной знака [7, 8], находим решение уравнения (14) с коэффициентами (12) отдельно для случая $\Lambda < \lambda_0$ и для случая $\Lambda > \lambda_0$. Подставляя это решение в выражение (13), а затем (13) в формулу (11) и (11) в (6) получаем выражение для функции распределения (4) времени первого достижения границы h реализацией логарифма ФОРП в виде

$$\begin{aligned} F_0(h, \eta) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi q(\eta_1)}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi-h-q(\eta_1)/2)^2}{2q(\eta_1)}\right] \times \\ &\times \left\{ \Phi\left(\frac{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_1)}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_1)}}\right) - \right. \\ &\left. - \exp(-\xi) \Phi\left(\frac{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_1)}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_1)}}\right) \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} F_1(h, \eta) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi q(\eta_1)}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi-h+q(\eta_1)/2)^2}{2q(\eta_1)}\right] \times \\ &\times \left\{ \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_1)}} - \frac{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_1)}}{2}\right) - \right. \\ &\left. - \exp(\xi) \Phi\left(-\frac{\xi}{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_1)}} - \frac{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_1)}}{2}\right) \right\} d\xi, \\ \eta &\in [\eta_1, \eta_0], \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} F_1(h, \eta) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi q(\eta_0)}} \times \\ &\times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi+q(\eta_0)/2)^2 + h^2 - hq(\eta_0)}{2q(\eta_0)}\right] \left\{ \exp\left(\frac{\xi h}{q(\eta_0)}\right) \times \right. \\ &\times \Phi\left(h\sqrt{\frac{q(\eta_0)-q(\eta_1)}{q(\eta_0)q(\eta_1)}} + \xi\sqrt{\frac{q(\eta_1)}{q(\eta_0)(q(\eta_0)-q(\eta_1))}}\right) - \\ &- \exp\left(-\frac{\xi h}{q(\eta_0)}\right) \times \Phi\left(h\sqrt{\frac{q(\eta_0)-q(\eta_1)}{q(\eta_0)q(\eta_1)}} - \right. \\ &\left. - \xi\sqrt{\frac{q(\eta_1)}{q(\eta_0)(q(\eta_0)-q(\eta_1))}}\right) \left\} \times \right. \\ &\times \left\{ \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{q(\eta)-q(\eta_0)} + \frac{\xi}{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_0)}}\right) - \right. \\ &\left. - \exp(-\xi) \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{q(\eta)-q(\eta_0)} - \frac{\xi}{\sqrt{q(\eta)-q(\eta_0)}}\right) \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (16b)$$

$\eta \in [\eta_0, 1]$.

Здесь обозначено: $\eta = T/T_2$, $\eta_1 = T_1/T_2$, $\eta_0 = \tau_0/T_2$, $q(\eta) = Q(T_2\eta)$.

Заметим, что функции (15), (16) позволяют найти вероятности ошибок обнаружения — вероятность ложной тревоги

$$\alpha = P\{t_0 < T_2\} = F_0(h, 1) \quad (17)$$

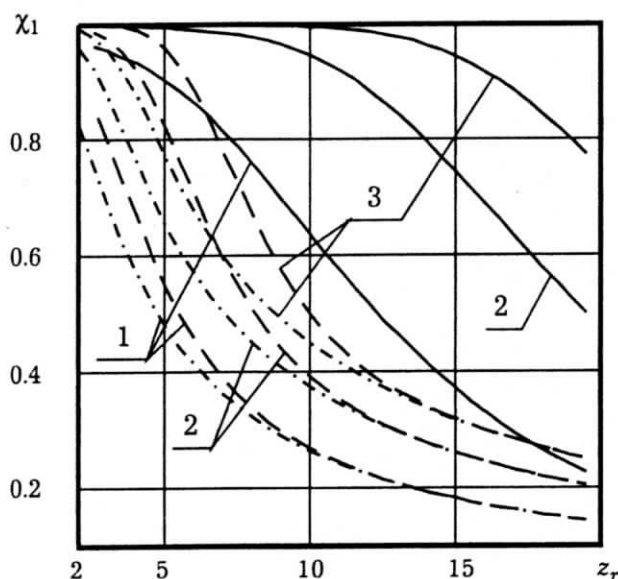


Рис. 4.

и условную вероятность пропуска сигнала с длительностью τ_0

$$\beta(\tau_0) = P\{t_1 > T_2\} = 1 - F_1(h, 1). \quad (18)$$

Подставляя функции распределения (15) и (16) в выражения (17) и (18), соответственно получаем для вероятностей ложной тревоги

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi q(\eta_1)}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi - h - q(\eta_1)/2)^2}{2q(\eta_1)}\right] \times \\ \times \left\{ \Phi\left(\frac{\sqrt{q(1) - q(\eta_1)}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{q(1) - q(\eta_1)}}\right) - \exp(-\xi) \Phi\left(\frac{\sqrt{q(1) - q(\eta_1)}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{q(1) - q(\eta_1)}}\right) \right\} d\xi \quad (19)$$

и пропуска сигнала

$$\beta(\tau_0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi q(\eta_0)}} \times \\ \times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi + q(\eta_0)/2)^2 + h^2 - hq(\eta_0)}{2q(\eta_0)}\right] \times \left[\exp\left(\frac{\xi h}{q(\eta_0)}\right) \times \right. \\ \times \Phi\left(h \sqrt{\frac{q(\eta_0) - q(\eta_1)}{q(\eta_0)q(\eta_1)}} + \xi \sqrt{\frac{q(\eta_1)}{q(\eta_0)(q(\eta_0) - q(\eta_1))}}\right) - \\ \left. - \exp\left(-\frac{\xi h}{q(\eta_0)}\right) \Phi\left(h \sqrt{\frac{q(\eta_0) - q(\eta_1)}{q(\eta_0)q(\eta_1)}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \xi \sqrt{\frac{q(\eta_1)}{q(\eta_0)(q(\eta_0) - q(\eta_1))}}\right) \right] \times \\ \times \left[\Phi\left(\frac{1}{2} \sqrt{q(\eta) - q(\eta_0)} + \frac{\xi}{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_0)}}\right) - \right. \\ \left. - \exp(-\xi) \Phi\left(\frac{1}{2} \sqrt{q(\eta) - q(\eta_0)} - \frac{\xi}{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_0)}}\right) \right] d\xi. \quad (20)$$

Как и следовало ожидать, выражения (19), (20) для вероятностей ошибок обнаружения ПА совпадают с вероятностями ошибок МП алгоритма, найденными в [4,5].

Используя выражения (15), (16), находим среднее время анализа ПА

$$\bar{T}_{aj} = P\{t_j < T_1\}T_1 + \bar{t}_j + P\{t_j > T_2\}T_2 = \\ = T_2 \left[\eta_1 + \int_{\eta_1}^1 [1 - F_j(h, \eta)] d\eta \right].$$

Выигрыш во времени анализа ПА по сравнению с алгоритмами МП будем характеризовать величинами

$$\chi_j = \bar{T}_{aj} / T_2, \quad j = 0, 1. \quad (21)$$

Для определения величины порога можно использовать различные критерии, в частности, критерий Неймана-Пирсона, согласно которому порог h_p выбирается из условия $\alpha(h_p) = p$, где p — заранее заданная величина.

Конкретизируем полученные результаты для прямоугольного импульса со скошенной вершиной [5,9]

$$f(t) = A \left[1 + \frac{(d-1)t}{T_2} \right] \sqrt{\frac{3}{d^2 + d + 1}}, \quad (22)$$

где параметр A характеризует амплитуду сигнала, $d = f(T_2)/f(0)$ — наклон скошенной вершины импульса. Множитель $\sqrt{3/(d^2 + d + 1)}$ в выражении (22) необходим для того, чтобы энергия сигнала максимальной длительности

$$E_{\max} = \int_0^{T_2} f^2(t) dt = A^2 T_2$$

не зависела от наклона его вершины и тем самым была возможность сравнивать эффективность алгоритмов обнаружения и оценки длительности сигналов с одинаковыми энергиями и разным наклоном вершин. Подставляя функцию (22) в формулу (9), находим выражение для ОСШ на выходе приёмника МП

$$Q(\tau) = 3z_r^2 \frac{\tau}{T_2} \frac{1 + (d-1)\tau/T_2 + (d-1)^2(\tau/T_2)^2/3}{d^2 + d + 1},$$

где $z_r^2 = 2A^2 T_2 / N_0$ — ОСШ на выходе приёмника МП для прямоугольного импульса амплитуды A и длительности T_2 .

На рис. 2 показаны зависимости величины выигрыша χ_0 (21) во времени анализа от ОСШ z_r для прямоугольного импульса со скошенной вершиной (22) с наклоном $d = 10$ при использовании порога h_p . На рис. 3 показаны аналогичные зависимости выигрыша χ_1 (21). При расчёте сплошных кривых на рис. 2, 3 предполагалось $\eta_1 = 0.1$, а штриховых — $\eta_1 = 0.25$. Кривые 1 на рис. 2 и 3 соответствуют $p = 10^{-1}$, кривые 2 — $p = 10^{-2}$, кривые 3 на рис. 3

соответствуют $p = 10^{-3}$. При отсутствии сигнала и $p < 10^{-2}$ выигрыш $\chi_0 \approx 1$, то есть пороговый алгоритм обнаружения не даёт выигрыша во времени анализа. Длительность принятого сигнала при расчётах была выбрана в середине априорного интервала $\eta_0 = (1 + \eta_1) / 2$.

Как видно из рис. 2 и 3, уменьшение вероятности ложной тревоги, что соответствует росту порога, приводит к увеличению времени анализа. Изменение длины априорного интервала возможных значений длительности оказывает существенное влияние на выигрыш во времени анализа при наличии сигнала в принятой реализации. При малых отношениях сигнал/шум увеличение длины априорного интервала значений длительности приводит к увеличению времени анализа, а при больших отношениях сигнал/шум, наоборот, к уменьшению времени анализа.

На рис. 4 изображены зависимости выигрыша χ_1 (21) во времени анализа от ОСШ z_r для прямоугольного импульса со скошенной вершиной (22) с наклоном $d = 10$ при использовании порога h_p , $\eta_1 = 0.1$ и различных длительностях принятого сигнала.

Сплошными линиями на рис. 4 показаны выигрыши, рассчитанные для $\eta_0 = 0.2$, штриховыми — для $\eta_0 = 0.5$, штрих-пунктирными — для $\eta_0 = 0.9$. Кривые 1 на рис. 3 соответствуют $p = 10^{-1}$, кривые 2 — $p = 10^{-2}$, кривые 3 — $p = 10^{-3}$. Из рис. 4 следует, что увеличение длительности сигнала приводит к сокращению времени анализа, особенно при больших отношениях сигнал/шум. Это связано с ростом энергии принятого сигнала при увеличении длительности.

Приведённые результаты позволяют без снижения эффективности обнаружения сократить время анализа принятой реализации по сравнению с временем анализа максимально правдоподобного алгоритма обнаружения.

Литература

1. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992. — 320 с.
2. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
3. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. — 432 с.
4. Трифонов А.П. Обнаружение сигнала с неизвестной длительностью // Сборник «Памяти А.Н. Малахова». Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2000. — С. 65–69.
5. Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э. Приём сигнала с неизвестной длительностью // Известия вузов. Радиофизика. — 2002. — Т. 65. — № 7. — С. 625–637.
6. Галун С.А., Трифонов А.П. Обнаружение и оценка момента изменения интенсивности пуассоновского потока // Автоматика и телемеханика, 1982. — № 6. — С. 95–105.
7. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977. — 488 с.
8. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Оптимальная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов. М.: Сов. радио. 1975. — 704 с.
9. Грязнов М.И., Гуревич М.Л., Рябинин Ю.А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь. 1991. — 216 с.

Threshold Serial Algorithm for Detecting of Signal with Unknown Duration

Yu.E. Korchagin

The threshold algorithm for detecting an arbitrary-shaped signal with unknown duration has been synthesized. Reduction of the detection time in compare with maximum likelihood has been show. Obtained results for rectangle pulse with oblique top have been realized.



Корчагин Юрий Эдуардович — кандидат физико-математических наук (2000 г.), ассистент кафедры радиофизики Воронежского государственного университета. Область научных интересов: исследование алгоритмов приёма разрывных квазидетерминированных сигналов с неизвестными параметрами на фоне помех.